操作量をコストに含めない確率的LQ制御

齊藤 充行*・山中 一雄**・川崎 直哉***

Stochastic LQ Control without Costing Control Power

Mitsuyuki SAITO*, Kazuo YAMANAKA** and Naoya KAWASAKI***

We consider a particular type of LQ control problem, in which the control power is excluded from the cost function and state-observation noise is assumed. Our goal is a state feedback law that minimizes the state covariance matrix. A necessary and sufficient condition is found for a static feedback law to be optimal among all the dynamic state feedback laws. The condition is stated in terms of an algebraic Riccati equation, which is different from that appearing in the usual LQ control.

Key Words: LQ theory, Minimum variance control, State feedback

1. ま え が き

レギュレータ問題を最適制御問題として素朴に定式化すれば、状態ベクトルを原点にできるだけ近づけるという意味で、出力整定誤差の2乗を評価関数にとり、その値を最小化する制御則を求める問題となる。しかし、この定式化によると、一般に最適制御問題の解が存在する保証がない。これに対し、よく知られたLQ制御問題は、出力整定誤差の2次形式に加えて制御入力（操作量）の2次形式を含む評価関数を想定し、この評価関数を最小化するような制御則を求める最適制御問題となっている^{1), 2)}。

LQ制御問題において操作量を評価関数に含めることは、解の存在を保証するだけでなく、過大な操作入力の抑制や状態観測誤差を許容する余有³⁾を生むなどの効用をもたらす。また、その解である最適レギュレータは、最適性とは別の意味でいくつかの良い性質をもつことが知られている^{1), 2), 4)}。一方、LQ制御問題の原点に立ち返ってみると、評価関数の中に操作量の2次形式を含めることが、最適性の意味を曖昧にしているとの見方もできる。

これまでにも、出力整定誤差を直接評価するLQ制御問題に関連することがらとして、操作量を評価する重みを限り

なく0に近づけるときの最適解のふるまいに関していろいろなことが明らかにされている¹⁾。これをある種の間接的なアプローチとすれば、本論文では、より直接的なアプローチとして、評価関数に操作量を含まなくても解が得られるような、新しいLQ制御問題の定式化を試みる。そこでは、状態を観測したときの誤差（雑音）の存在を前提とすることで、この状態観測雑音の存在が状態フィードバックゲインを抑制する効果をもつことを期待する。このような状態観測雑音を仮定する修正版LQ制御問題に対し、その可解条件を調べる。

結果として、よく知られているRiccati方程式とは異なる形のRiccati方程式が現れる。このRiccati方程式の解を用いて、最適解が静的状態フィードバックの形で得られるための必要十分条件が記述される。

2. 問題の定式化

対象とする制御系は、1入力1出力の制御対象を含む以下のようなものとする。

$$y(t) = cx(t) \quad (1)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t) + Dw(t) \quad (2)$$

$$u(t) = -k[x(t) + v(t)] \quad (3)$$

ただし、 y は出力（制御量）、 x は n 次元状態ベクトル、 u は操作量を表わす。 k を除く係数はすべて定数で、 b は n 次元列ベクトル、 c は n 次元行ベクトル、 A と D は、 $n \times n$ 行列である。 A は安定であると仮定する。変数 t は時刻を表わす。 w はシステム雑音、 v は状態観測雑音を表わし、それらはつぎのような白色雑音とする。

$$E \begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

* 茨城大学大学院 日立市中成沢町 4-12-1

** 茨城大学工学部 日立市中成沢町 4-12-1

*** 上越教育大学学校教育学部 上越市山屋敷 1

* Graduate School of Science and Engineering, Ibaraki University, Hitachi

** Department of Systems Engineering, Ibaraki University, Hitachi

*** Faculty of Education, Joetsu University of Education, Joetsu

(Received July 22, 2005)

(Revised January 30, 2006)

$$\begin{aligned} & E \begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(s)^T & v(s)^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \delta(t-s). \end{aligned} \quad (5)$$

I は $m \times m$ 単位行列, $M \triangleq NN^T > 0$, N は正則な $n \times n$ 行列を表わす.

制御則 (3) において, k は定数ベクトルとは限らず, ラプラス変換によってプロパーな有理関数に対応する線形作用素を表わすものとする. 閉ループ系 (1)~(3) を安定にする k の全体を Ω で表わす.

評価指標として, 定常状態における状態ベクトルの共分散行列 $J(k) = Ex(t)x(t)^T$ をとり (時刻 t によらない), これをつぎの意味で「最小」にする制御則を求める問題を考える. すなわち,

$$J(k_0) \leq J(k), \quad k \in \Omega \quad (6)$$

を満足する $k_0 \in \Omega$ がこの問題の解となる. ここに, 不等号は右辺と左辺の差が準正定行列となることを表わす. このとき, $k_0 \in \Omega$ が定数ベクトルとして求まるなら, 実際に適用するうえで好ましい. そこで, ここでは LQ 問題の解の意味をいままこし限定し, (6) 式を満足する定数ベクトル $k_0 \in \Omega$ のことであるとする. そして, このような問題の可解条件について考える.

備考 1) 上の LQ 問題では, 最適解の候補をあらかじめ定数の k に限定しているわけではないことに注意が必要である. すなわち, ある定数の k_0 が, 定数とはかぎらない k の集合 Ω の中で最適になり得るかどうか, 考察の対象である.

備考 2) 状態ベクトルの共分散行列を最小にする問題は, 出力係数 c に無関係に出力分散 $Ey(t)^2$ を最小にする問題であると言いかえることもできる.

Fig. 1 LQ control problem

3. 可解条件

A が安定であることから, つぎのような Riccati 方程式を満足する準正定対称行列 Π が一意に存在する.

$$0 = DD^T + A\Pi + \Pi A^T - \Pi M^{-1}\Pi \quad (7)$$

この Π に対して

$$bk_0 = \Pi M^{-1} \quad (8)$$

となる定数ベクトル k_0 が存在するならば, 次章で証明されるように, この k_0 が求める制御則を与える. 言い換えれば, (8) 式を満足するような定数ベクトル k_0 が存在することは, 静的な状態フィードバックが最適制御則となる十分条件となる. 条件 (8) は相当保守的に見えるかもしれないが, 状態ベクトルの共分散行列を最小にする $k_0 \in \Omega$ が定数ベクトルの中に見つかるためには, 必要でもある. すなわち, (8) 式の条件が満足されないならば, 任意の定数ベクトル $k_0 \in \Omega$ に対して,

$$cJ(k)c^T < cJ(k_0)c^T \quad (9)$$

となる c および $k \in \Omega$ が存在することが示される.

以上のことをまとめると, つぎの定理となる.

《定理 1》 定数ベクトル k_0 について, 以下の 2 項目は等価である.

- (1) $bk_0 M = \Pi$ が成立つ.
- (2) k_0 は Ω に属し, なおかつ,

$$J(k_0) \leq J(k), \quad k \in \Omega \quad (6)$$

が成立つ.

[例題 1] つぎのようなシステムを考える.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

このとき, (7) 式の Riccati 方程式の解は

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となり, 定数ベクトル

$$k_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

が条件式 (8) を満たす. ゆえに, この k_0 による制御則 (3) は最適である.

なお, 可解条件 (8) が, Riccati 方程式 (7) の解 Π によって表現されていることは, 条件 (8) が間接的に制御対象の特性を表わすパラメータ A, b, D, M についての条件でもあることを意味している.

備考) Riccati 方程式 (7) は, 制御対象 (1), (2) に対するカルマン・フィルタを作るときに現れる Riccati 方程式である. このことは, 上で定式化した問題が状態ベクトル x に関する最小分散制御問題と等価であることと関係がある. それについての詳細は付録 B で述べる.

4. 定理 1 の証明

4.1 証明のための準備

以下では、伝達関数表現にもとづき、 H_2 最適制御の議論においてよく知られた手順を使う⁷⁾。

Fig. 1 より、つぎの関係が得られる。以後、とくに断らなければ、 x, u 等は時間関数ではなく、ラプラス変換のほうを表わすものとする。

$$x = \Phi Dw + \Phi bu \quad (10)$$

$$u = -k(\Phi Dw + \Phi bu + v) \quad (11)$$

ここに、 $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ とおいた。

(11) 式を u について解くと、

$$u = -Q(\Phi Dw + v). \quad (12)$$

ここに、

$$Q = (1 + k\Phi b)^{-1}k \quad (13)$$

とおいた。当面、 k の代りに Q を最適化の対象と考える。

(12) 式を (10) 式に代入すると、つぎの等式が得られる。

$$x(s) = (I - \Phi bQ)\Phi Dw - \Phi bQv \quad (14)$$

ここで時間関数 $x(t)$ の共分散行列を、

$$Ex(t)x(t)^T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma(j\omega) d\omega \quad (15)$$

のように表わすとき、パワースペクトル密度関数 Σ は (14) 式から、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} \Sigma(s) &= (I - \Phi bQ)\Phi DD^T \Phi^* (I - \Phi bQ)^* \\ &\quad + \Phi bQNN^T Q^* b^T \Phi^* \\ &= \Phi bQ(\Phi DD^T \Phi^* + NN^T)Q^* b^T \Phi^* \\ &\quad - \Phi DD^T \Phi^* Q^* b^T \Phi^* \\ &\quad - \Phi bQ\Phi DD^T \Phi^* + \Phi DD^T \Phi^* \end{aligned} \quad (16)$$

ここに、 $*$ は転置をとって s を $-s$ で置き換えることを表わす。

まず、 Q の 2 次項の係数に関するスペクトル分解により、

$$\Phi DD^T \Phi^* + NN^T = HH^* \quad (17)$$

となるような、実有理伝達関数 H が、(7) 式を用いて、つぎのように求められる^{5), 6)} (このとき H と H^{-1} は安定である；付録 A を参照)。

$$H \triangleq N + \Phi \Pi N^{-T} \quad (18)$$

(16) 式に (17) 式を代入し、 Q について平方完成することでつぎの式を得る。

$$\begin{aligned} \Sigma(s) &= (\Phi bQH - \Phi DD^T \Phi^* H^{-*}) \\ &\quad \cdot (\Phi bQH - \Phi DD^T \Phi^* H^{-*})^* + \Phi DD^T \Phi^* \\ &\quad - \Phi DD^T \Phi^* H^{-*} H^{-1} \Phi DD^T \Phi^* \end{aligned} \quad (19)$$

(15) 式と (19) 式から、いま考えている問題は、 $\Phi DD^T \Phi^* H^{-*} \in L_2$ に最も近い $\Phi bQH \in H_2$ を与えるような、プロパーで安定な Q を見つけることに帰着する。

ここで (17), (18) 式を使うと、 $\Phi DD^T \Phi^* H^{-*}$ を安定項 ($\in H_2$) と反安定項 ($\in H_2^\perp$) に分解することができる。

$$\Phi DD^T \Phi^* H^{-*} = \Phi \Pi N^{-T} + (N - NN^T H^{-*}) \quad (20)$$

(20) 式の右辺第 1 項は安定 ($\in H_2$)、残りの項は反安定 ($\in H_2^\perp$) である。もし、つぎの方程式を満足する Q_0 を見つけることができるならば、この Q_0 (に対応する k) が (15) 式を最小とし、最適となる。

$$\Phi bQ_0 H - \Phi \Pi N^{-T} = 0 \quad (21)$$

また、特定の c に対して、方程式

$$c\Phi bQ_0 H - c\Phi \Pi N^{-T} = 0 \quad (22)$$

を満足するプロパーで安定な Q_0 があれば、それがその c に対して $Ey(t)^2$ を最小にする制御則を与える。そうでないときは、左辺の 2-ノルムの「最小化」に関する追加の手順が必要となる (4.3 節を参照)。

4.2 (1) $\Rightarrow$ (2) の証明

はじめに、任意の $k \in \Omega$ に対し、つぎの等式が成立することに注意する (この式はつぎの 4.3 でも使用する)。

$$\begin{aligned} \Phi bQH - \Phi \Pi N^{-T} \\ = \Phi(I + bk\Phi)^{-1}(bkM - \Pi)N^{-T} \end{aligned} \quad (23)$$

この等式は、つぎのようにして導くことができる。まず、(13) 式に左から $b(1 + k\Phi b)$ を掛けると、

$$b(1 + k\Phi b)Q = bk$$

となる。この式の左辺において

$$b(1 + k\Phi b) = b + bk\Phi b = (I + bk\Phi)b$$

となることを用いると、つぎの式が得られる。

$$bQ = (I + bk\Phi)^{-1}bk \quad (24)$$

これを代入することにより、(23) 式の左辺は

$$\begin{aligned} \Phi bQH - \Phi \Pi N^{-T} \\ = \Phi(I + bk\Phi)^{-1}[bkH - (I + bk\Phi)\Pi N^{-T}] \end{aligned}$$

となり、この式の右辺にさらに (18) 式を代入すると、(23) 式の右辺が導出される。

ここで、ある定数の $k_0 \in \Omega$ に対して $bk_0 M = \Pi$ が成り立つと仮定すると、(23) 式から、この k_0 に対応する Q_0 は (21) 式を満足する。□

4.3 (2) $\Rightarrow$ (1) の証明

$bk_0 M \neq \Pi$ であるような $k_0 \in \Omega$ をとり、(13) 式によってこれに対応する Q を Q_0 で表わす。このとき、ふたたび (23) 式から、 $\Phi bQ_0 H - \Phi \Pi N^{-T} \neq 0$ であることが判る。

この式の左辺に適当な $c \neq 0$ を左から掛けると、つぎの式を得る。

$$c\Phi bQ_0 H - c\Phi \Pi N^{-T} \neq 0 \quad (25)$$

ここで, Q_0 を $Q_0 + \Delta$ とおきかえると, (25) 式の左辺は,

$$g\Delta H + r \quad (26)$$

におきかわる. ここに r と g はつぎのように定義される.

$$g(s) = c\Phi b = c(sI - A)^{-1}b, \quad (27)$$

$$r(s) = gQ_0H - c\Phi\Pi N^{-T} \quad (28)$$

r は (25) 式のもとの左辺である. ここで g はかならずしも最小移相でないとして, つぎのように全域通過要素と最小移相要素に分解する.

$$g(s) = \theta(s)\rho(s) \quad (29)$$

ここに, θ は $\theta(s)\theta(-s) \equiv 1$ を満たしてかつ安定であり, ρ は最小移相である. このとき, (26) 式の平方は, つぎのように書き直すことができる.

$$\begin{aligned} & (g\Delta H + r)(g\Delta H + r)^* \\ &= (\theta\rho\Delta H + r)(\theta\rho\Delta H + r)^* \\ &= (\rho\Delta H + \theta^{-1}r)(\rho\Delta H + \theta^{-1}r)^* \end{aligned} \quad (30)$$

これを (より正確には (15) 式に左から c^T , 右から c を乗じた式を), プロパーで安定な Δ を用いてできるだけ「小さく」することを考える. $\rho\Delta H$ は安定であることに注意し, $\theta^{-1}r$ をつぎのように安定項と反安定項に分解する.

$$\rho\Delta H + \theta^{-1}r = \rho\Delta H + \{\theta^{-1}r\}_+ + \{\theta^{-1}r\}_- \quad (31)$$

ここに, $\{\cdot\}_+$ は安定項 ($\in H_2$) を表わし, $\{\cdot\}_-$ は反安定項 ($\in H_2^\perp$) を表わす. このとき, $\{\theta^{-1}r\}_+ \neq 0$ である. すると, 十分大きな自然数 ν と十分小さな $\tau > 0$ をとって,

$$\Delta(s) = -(\tau s + 1)^{-\nu} \rho^{-1} \{\theta^{-1}r\}_+ H^{-1} \quad (32)$$

を安定かつプロパーとし, なおかつこの Δ によって (30) 式 (の虚軸上の積分) を「より小さく」することができる. これは, この特定の c に対して $cJ(k)c^T < cJ(k_0)c^T$ となる $k \in \Omega$ があることを意味している. $\square$

5. あとがき

本論文では, 出力整定誤差のみを評価し, 評価関数に操作量を含めなくても解が得られるような, 新しい LQ 制御問題を定式化した. すなわち, 状態フィードバックを行なう際に状態観測雑音が混入することを前提とし, 状態の共分散行列を評価指標とした. そして, 最適状態フィードバック則が静的状態フィードバックの形で求まるかどうか考えた. 結果として, よく知られている Riccati 方程式とは異なる形の Riccati 方程式が現れ, この Riccati 方程式にもとづいて, 静的状態フィードバック則が最適となるための必要十分条件が得られた.

参考文献

- 1) H. Kwakernaak and R. Sivan: Linear Optimal Control Systems, Wiley-Interscience (1972)
- 2) 伊藤, 木村, 細江: 線形制御系の設計理論, 計測自動制御学会, 第3章 (1978)

- 3) 齊藤, 山中, 川崎: 状態帰還 LQ 制御において許容される状態観測誤差について, 計測自動制御学会論文集, 40-4, 477/479 (2004)
- 4) N. Kawasaki and E. Shimemura: Pole Placement in a Specified Region Based on a Linear Quadratic Regulator, International Journal of Control, 48-1, 225/240 (1988)
- 5) 有本卓: カルマン・フィルター, 産業図書, 第5章 (1977)
- 6) B.D.O. Anderson: An algebraic solution to the spectral factorization problem, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-12-4, 410/414 (1967)
- 7) M.J. Grimble: Robust Industrial Control, Prentice Hall (1994)
- 8) 内田, 山中: 状態推定の理論, コロナ社 (2004)

《付 録》

A. H と H^{-1} の安定性について

A が安定と仮定したことから,

$$H \triangleq N + \Phi\Pi N^{-T} \quad (18)$$

が安定であることは自明である.

つぎに, この逆行列 H^{-1} の安定性について確認する. H の行列式をとると,

$$\begin{aligned} \det H &= \det\{N + \Phi\Pi N^{-T}\} \\ &= \det\{[I + (sI - A)^{-1}\Pi M^{-1}]N\} \\ &= \det\{I + (sI - A)^{-1}\Pi M^{-1}\} \cdot \det N \\ &= \det[(sI - A)^{-1}\{(sI - A) + \Pi M^{-1}\}] \cdot \det N \\ &= \det(sI - A)^{-1} \cdot \det(sI - A + \Pi M^{-1}) \cdot \det N \end{aligned} \quad (A.1)$$

となり, $\det(sI - A)^{-1} = [\det(sI - A)]^{-1}$ に注意すると, $\det H$ の零点は $A - \Pi M^{-1}$ の固有値であることがわかる. そして, 付録 B で述べるカルマン・フィルタとの関係から, それらはすべて左半平面にある. こうして H^{-1} は安定であることが判る.

B. カルマン・フィルタとの関係について

Riccati 方程式 (7) は, 架空の線形系 (状態を z で表わす)

$$m(t) = z(t) + v(t), \quad \frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + Dw(t) \quad (B.1)$$

に対するカルマン・フィルタ

$$\frac{d\hat{z}(t)}{dt} = A\hat{z}(t) + \Pi M^{-1}(m(t) - \hat{z}(t)) \quad (B.2)$$

に対応している. 以下では, このことと本文の結果との関係についての考察を述べる.

カルマン・フィルタ (B.2) による状態推定誤差 $z - \hat{z}$ を x_0 で表わすことにすると, x_0 はつぎの式にしたがう.

$$\frac{dx_0}{dt} = Ax_0(t) - \Pi M^{-1}x_0(t) + Dw(t) \quad (B.3)$$

このとき, $A - \Pi M^{-1}$ は安定である. ここで, 本文で扱った制御問題の可解条件 (8) が成立つとすると, 推定誤差 x_0 の方程式はつぎのようになる.

$$\frac{dx_0}{dt} = Ax_0(t) - bk_0x_0(t) + Dw(t) \quad (B.4)$$

これに対し、ベクトル k_0 を、 $A - bk$ を安定化する任意の k で置換えてできる「誤差方程式」

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) - bkx(t) + Dw(t) \quad (\text{B.5})$$

を考えて比較すると、カルマン・フィルタの最適性により、定常状態でつぎの不等式が成立つ。

$$Ex_0(t)x_0(t)^T \leq Ex(t)x(t)^T \quad (\text{B.6})$$

(B.4)-(B.6) 式は、定数ベクトル k_0 が、本文で扱った制御問題の解であることを意味している。このように考えることにより、可解条件 (8) の十分性の別証明がカルマン・フィルタの理論を使ってできたことになる。

なお、評価関数が通常の LQ 問題と同じであれば、分離定理によって⁸⁾、制御対象 (1), (2) に対するカルマン・フィルタを介した動的状態フィードバック制御則が得られる。ただし、本文で扱った制御問題の場合、評価関数の特殊性のために、この論法はそのままでは適用できない。

[著者紹介]

齊藤 充行 (学生会員)

2000 年帝京大学理工学部機械・精密システム工学科卒業。2002 年上越教育大学大学院学校教育研究科修士課程修了。2002 年茨城大学大学院理工学研究科博士後期課程入学。現在に至る。

山中 一雄 (正会員)

1974 年早稲田大学理工学部電気工学科卒業。79 年早稲田大学大学院理工学研究科博士課程修了。同年茨城大学助手。88 年茨城大学助教授を経て、93 年より茨城大学教授 (工学部システム工学科)。現在に至る。主な研究対象は、不確定性を含む系の制御問題、神経回路網の数理モデルなど。電気学会、システム制御情報学会などの会員。

川崎 直哉 (正会員)

1975 年早稲田大学理工学部電気工学科卒業。80 年早稲田大学大学院理工学研究科博士後期課程修了。81 年高知大学教育学部助手。同助教授を経て、90 年上越教育大学助教授。97 年同教授。2004 年より同副学長。現在に至る。主な研究対象は、線形制御系の設計問題、メカトロニクス教育教材の製作・教育実践等。電気学会、IEEE などの会員。