高周波化フィードバックによる線形周期係数システムの特性乗数配置

穂 高 一 条*・軸 屋 一 郎*

Characteristic Multiplier Assignment for Linear Periodic Systems by Raising Frequency

Ichijo HODAKA* and Ichiro JIKUYA*

This paper addresses an assignment problem of characteristic multipliers for continuous-time linear periodic systems by linear periodic state feedback. The authors have proposed a feedback control law by a method of raising frequency which enables to approximate the solution to a closed-loop system to the solution to a prescribed linear time-invariant system. This suggests that the feedback control by raising frequency may also approximately assign characteristic multipliers to a prescribed set of complex numbers. This paper shows that the suggestion is indeed the case in the sense of precise assignment, by modifying the feedback control by raising frequency.

Key Words: linear periodic system, characteristic multiplier, pole assignment, averaging method

1. はじめに

連続時間・線形周期係数システムの制御に関する最も基本的な問題の一つに、特性乗数配置問題がある。特性乗数とは、周期係数システムの、初期値に依存しない固有の数値であり、基本行列の一周期あたりの変化分に相当する行列（モノドロミー行列とよばれる）の固有値である。また、特性乗数配置問題とは、この特性乗数を所望の位置に配置する状態フィードバック則を求めることである。したがって、特性乗数配置問題を解くフィードバックによって、閉ループシステムの一周期ごとの応答を規定することができる。よって、特性乗数配置問題は、線形定数係数システム（線形時不変システム）における極配置問題に相当するものと位置づけることができる。

この特性乗数配置問題を扱った研究は、Brunovsky¹⁾が最初である。彼は、制御対象が可制御ならば、制御対象と同じ周期の係数をもつ状態フィードバックが存在して、特性乗数を任意に配置できることを示した。これは、定数係数システムにおける可制御性と極配置可能性の関係に並行する結果である。ただし、そのフィードバック則の構成手順では、周期係数閉ループシステムの解の評価に伴って Gronwall-Bellman の不等式、陰関数定理が利用されており、必要となる計算を実行することはたいへん困難である。Tornambe ら²⁾は、制御対象および配置先の特性乗数に非常に厳しい制限を課しているが、特性乗数を配置するフィードバック則の明示的な

表現を、不定積分の繰り返しによって与えている。Kern³⁾、Calico ら⁴⁾は、特性指数（モノドロミー行列の対数関数の固有値）を配置するフィードバック則、および、それが存在するための十分条件を与えている。Sinha ら⁵⁾、Lee ら⁶⁾は、周期係数システムの解を、有限個のチェビシェフ多項式によって展開表現して、それをモノドロミー行列全体を指定するフィードバック則の構成法に利用している。Montagnier ら⁷⁾もまた、モノドロミー行列全体を指定する状態フィードバック則を提案している。ただし、フィードバックゲインがもつ周期には、制御対象の周期に可制御性指数をかけたものを想定している点で 1) と異なる。以上の研究は、制御対象、制御則ともに連続時間周期係数としている点で 1) と同じ制御問題を扱っている。

一方、制御対象には連続時間周期係数システムを想定するが、制御則には、サンプル・ホールドの仕組みを利用することを前提として、特性乗数・指数配置あるいはモノドロミー行列全体の指定を制御目標とする研究がいくつかある。この方向での最初の研究は、Kabamba⁸⁾による。彼は、sampled state periodic hold (SSPH) 制御というタイプの状態フィードバック則を提案し、可制御ならば、モノドロミー行列の固有値を任意に配置できることを示している。Al-Rahamani ら⁹⁾は、Kabamba⁸⁾による SSPH の周期ゲインを区分的に定数となるゲインに置き換えた状態フィードバック則を採用し、それによるモノドロミー行列の固有値配置法を提案している。河野¹⁰⁾は、Kabamba⁸⁾による SSPH にサンプル時刻を追加したモノドロミー行列の固有値配置法を提案している。Chen ら¹¹⁾は、ある意味で強い可制御性のもと、特性指数を配置するサンプル・ホールドフィードバックを提案している。なお、Yame ら¹²⁾は、こ

* 名古屋大学大学院工学研究科

* Graduate School of Engineering, Nagoya University
(Received October 21, 2005)
(Revised December 15, 2005)

れらサンプル・ホールドの仕組みを利用したフィードバックによる配置法においては、閉ループシステムが純粋な意味での連続時間周期係数システム（連続かつ周期的な行列値関数 $A(\cdot)$ によるシステム $x' = A(t)x$ のこと）とはならず、1) をはじめとする純粋に連続時間周期係数システムの枠内で問題を扱った研究と区別する必要があることを指摘している。

以上の先行研究に対し、筆者らは 13), 14) において、扱うことのできる制御対象を限定しているものの、特性乗数を漸近的に配置する周期係数状態フィードバック則の構成法を、純粋な連続時間周期係数システムの枠内で提案している。これは、閉ループシステムの係数の周期を十分短く指定（高周波化）するような周期係数状態フィードバックを用いるものであり、それによって、閉ループシステムの応答を所望の定数係数システムの応答に漸近させるものである。したがって閉ループシステムの特性乗数を、指定した値に近づけることができるが、より近づけるには一般にフィードバックゲインが大きくなり、実際的にはなくなる可能性がある。

そこで本論文では、この高周波化フィードバックゲインに、ある周期関数をかけることによって、特性乗数を厳密に配置することができることを示す。これによって、高周波化の度合いを一定値以上とするだけで、厳密な特性乗数配置が可能となり、13), 14) のような、特性乗数のより正確な配置に起因する過大なフィードバックゲインを回避することができる。必要となる計算は、主として行列の代数演算のみであり、制御則をシンボリックに表現できる点で、ほかの先行研究より有利である。また、高周波化の度合いを進めてゆくと、13), 14) 同様、一般に大きなフィードバックゲインを要するが、閉ループシステムの応答がある定数係数システムの応答に近づくことを保証できることが示される。これによって、特性乗数の正確な配置に加えて、特性乗数配置だけでは規定できない周期点間の応答をも整形できるという、ほかの先行研究には見られない特徴をもつことになる。

以下では、 $\mathbb{R}$ は実数全体、 $\mathbb{C}$ は複素数全体、 $\mathbb{R}^n$ は n 次元の実・列ベクトル全体、 $\mathbb{R}^{m \times n}$ は $m \times n$ の実行列全体を表わすものとする。また、 $0_{m \times n}$ は $m \times n$ のサイズをもつ零行列、 I_n は n 次の単位行列であるとする。さらに、 $\|v\|$ は列ベクトル v のユークリッドノルム、 $\|A\|$ は行列 A の最大特異値、 A^T は行列 A の転置行列、 $\text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ は $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を順に対角要素に並べてできる対角行列を表わすものとする。

2. 問題設定

連続時間・周期係数システムは、一般に、 t を時刻、 x を状態変数、 u を制御入力、 $A(\cdot), B(\cdot)$ を適当なサイズをもつ周期関数として、

$$x' = A(t)x + B(t)u, \quad x' := \frac{dx}{dt}$$

のように表わされる。本論文では、このようなシステムのう

ち、制御対象としてとくに、

$$x' = Ax + bg(t)u \quad (1)$$

の形で表わされるような、入力部の係数のみが周期関数となる一入力システムを考える。ただし、 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ であり、 $g(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は周期 $T(>0)$ をもつ連続な周期関数であるとする。

(1) 式で表わされる制御対象に対して、周期係数状態フィードバック

$$u = h(t)x \quad (2)$$

を施すことを考える。ここで、 $h(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}$ は (1) 式と同じ周期 T をもつ連続な周期関数であるとする。

本論文で扱う制御対象は、(1) 式のように一般の場合より限定されたものであるが、(1) 式に (2) 式を施したときの閉ループシステムは

$$x' = A_{cl}(t)x, \quad A_{cl}(t) := A + bg(t)h(t) \quad (3)$$

なる周期係数システムとなる。したがって、(3) 式の解を、フィードバックゲイン $h(\cdot)$ を用いて陽に表現することは一般に不可能であり、 $h(\cdot)$ が (3) 式の応答に及ぼす影響を観察することは、数値的には可能であるが、解析的には困難である。

周期係数システムの応答をある意味で特徴づける、システム固有の指標として、特性乗数が利用できる。今、閉ループシステム (3) 式の実基本行列の一つ $W(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が与えられたとする。すなわち、

$$W'(t) = A_{cl}(t)W(t), \quad \det W(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

とする。このとき、定数行列 $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在して、 $W(t+T) = W(t)C, \forall t \in \mathbb{R}$ が成り立つ¹⁵⁾。この事実は、一般の時変係数システムにはみられない、周期係数システム特有の性質である。この定数行列 C の固有値を (3) 式の特性乗数とよぶ¹⁵⁾。このような行列 C は基本行列の選び方に依存して決まるが、特性乗数は基本行列の選び方によらず、システム固有の値となる。とくに、 $W(0) = I_n$ を満たす基本行列 $W(t)$ を $W_0(t)$ と表わすと、対応する C はモノドロミー行列 $W_0(T)$ となるので、特性乗数はモノドロミー行列の固有値とみなしてもよい。このとき、初期条件 $x(0) = x_0$ に対する (3) 式の解 $x(\cdot)$ は

$$x(iT) = W_0(T)^i x_0, \quad i = 1, 2, \dots$$

を満たす。よって、特性乗数を所望の値に配置できれば、閉ループシステム (3) 式の周期 T ごとの応答を規定できることになる。たとえば、すべての特性乗数を絶対値 1 未満の値に配置すれば、閉ループシステムの原点は指数安定化される。

なお、(3) 式のモノドロミー行列 $W_0(T)$ について、Liouville の公式¹⁵⁾ から $\det W_0(T) > 0$ が成り立つので、特性乗数 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \in \mathbb{C}$ は常に $\prod_{i=1}^n \sigma_i > 0$ を満たすこと

になる。したがって、配置先の特性乗数としては、 s に関する n 次実係数多項式

$$\psi(s) = s^n + \theta_n s^{n-1} + \cdots + \theta_2 s + \theta_1$$

$$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}, (-1)^n \theta_1 > 0) \quad (4)$$

の零点として与えるのが適当である。

そこで、つぎのような特性乗数配置問題を考える。

[問題1] 制御対象 (1) 式に対して、状態フィードバック (2) 式を施した周期係数閉ループシステム (3) 式の特性乗数を、(4) 式の零点に一致させるような、周期 T をもつ連続なフィードバックゲイン $h(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}$ を求めよ。■

(注意) 入力変換 $u = \tilde{u}/g(t)$ を行なえば、(1) 式は

$$x' = Ax + b\tilde{u}$$

となり、問題1は定数係数システムの極配置問題となる。したがって、可制御性を仮定すれば、問題1は容易に解ける。ただしこの手順が許されるのは $g(t) \neq 0, \forall t$ の場合のみであり、 $g(t) = 0$ となる t が存在する場合には、(1) 式に対する制御入力 u が非有界となり、破綻する。よって、興味のあるのは、 $g(t) \neq 0$ であり、かつ、 $g(t) = 0$ となる t が存在する場合である。■

3. 漸近的な特性乗数配置

筆者らは、問題1に対して、特性乗数配置を漸近的な意味で可能にする高周波化フィードバックを提案している^{13), 14)}。本節では、この高周波化フィードバック制御の概要および問題1に対する位置づけを述べる。

高周波化フィードバックによる方法では、制御対象 (1) 式の入力係数に含まれる周期関数 $g(\cdot)$ を

$$g(t) = g_0 \prod_{i=1}^L \sin \frac{2\pi}{T}(t - g_i T) \quad (5)$$

の形に限定する。ここで、 g_0 は0でない実数、 L は自然数、 g_i ($i = 1, 2, \dots, L$) は $0 \leq g_i < 1$ を満たす相異なる有理数であるとする。この場合、複数の時刻 t で $g(t) = 0$ となっており、どのような有界な関数をかけても0となる時刻を取り除くことはできない。つぎの命題は、 $g(\cdot)$ にある有界な周期関数 $f(\cdot)$ をかけることによって0となる時刻を追加し、積 $gf(\cdot)$ を任意に高い周波数をもつ平均値1の周期関数とする（高周波化する）ことができることを示している。

[命題]¹³⁾ (5) 式の $g(\cdot)$ および任意の自然数 N_0 に対して、周期 T の滑らかな関数 $f(\cdot)$ および自然数 $N (\geq N_0)$ が存在して

$$g(t)f(t) = 1 - \cos \frac{4\pi N}{T}t \quad (6)$$

が成り立つ。■

(注意) (6) 式を満たす $f(\cdot)$ は、具体的には

$$f(t) = \frac{(-1)^N 2^{2N-1}}{g_0} \prod_{i=1}^{\tilde{L}} \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{f_i T}{2N} \right) \quad (7)$$

と表わされる (g_0 は (5) 式に含まれる定数)。ただし、 $\tilde{L}$ は自然数、 f_i は0以上の整数であり、いずれも $g(\cdot)$, N_0 から決まる¹³⁾。■

この (6) 式を満たす $f(\cdot)$ を用いた状態フィードバック

$$u = h(t)x, \quad h(t) := f(t)k \quad (8)$$

を考える。ただし、 $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ は設計パラメータである。このとき、対応する閉ループシステム (3) 式は、

$$x' = A_{cl}(t)x, \quad A_{cl}(t) := A + \left(1 - \cos \frac{t}{\epsilon}\right)bk \quad (9)$$

となる。ただし、 $\epsilon := T/(4\pi N)$ とおいた。(6) 式における N をいくらでも大きくするような $f(\cdot)$ が存在するので、(9) 式における ϵ はいくらでも小さくすることができる。したがって、(9) 式に平均法¹⁶⁾を適用でき、(9) 式の解は、平均システム（定数係数システム）

$$x' = (A + bk)x \quad (10)$$

の解で近似されることになる。したがって、 (A, b) が可安定ならば、 $A + bk$ を安定化するような k を選ぶことができ、 N を十分大きくするような $f(\cdot)$ によって、周期係数フィードバック (8) 式は、閉ループシステム (9) 式を安定化するだけでなく、その解を (10) 式の解に漸近させることができる¹³⁾。さらに、閉ループシステム (9) 式の基本行列 $W_0(t)$ (ただし、 $W_0(0) = I_n$) は、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|W_0(T) - e^{(A+bk)T}\| = 0$$

を満たすことが示される¹⁴⁾。

以上のように、高周波化フィードバックによって、閉ループシステムの応答を、ある定数係数システムの応答に近づけることができ、その結果、閉ループシステム (9) 式の特性乗数は、(10) 式の特性乗数 ($e^{(A+bk)T}$ の固有値) に漸近する。しかし、この方法による特性乗数配置は漸近的なものであり、配置を厳密に行なうことはできない。とくに、配置をより正確に行ないたい場合、パラメータ N を大きくすることが必要となり、そのため、(7) 式から明らかなように、ゲインが許容できないほど大きくなってしまふことがある。

4. 厳密な特性乗数配置

本節では、本論文で提案する、厳密な意味での特性乗数配置法を述べる。前節で見たように、高周波化フィードバックによって漸近的な意味での特性乗数配置が可能となったが、ここではこの高周波化フィードバックゲインに、ある周期関数をかけることによって、厳密な意味での特性乗数配置が可能となることを示す。その際、高周波化の度合いを表わす設計パラメータ N がある値以上であれば、特性乗数が厳密に配置されることがわかる。

以下、 (A, b) は可制御であると仮定する。このとき、 A, b

は可制御正準形

$$A = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & I_{n-1} \\ -a_1 & -a_2 \cdots -a_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

で与えられるとして差し支えない。

高周波化フィードバック (8) 式を修正して

$$u = h(t)x, \quad h(t) := f(t)kY(t)^{-1} \quad (12)$$

とおく。ここで、修正部 $Y(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ は、周期 T をもつ C^1 級関数であるとし、正則、すなわち、 $\det Y(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ とする。また、

$$k = [a_1 - q_1 \quad a_2 - q_2 \quad \cdots \quad a_n - q_n] \quad (13)$$

とおく。ただし、 $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ は実数である。 $f(\cdot)$ は、前節同様、(6) 式を満たすものとする、対応する閉ループシステム (3) 式は

$$x' = \left(A - \left(1 - \cos \frac{t}{\epsilon} \right) (A - Q) Y(t)^{-1} \right) x \quad (14)$$

となる。ただし、 $\epsilon = T/(4\pi N)$ であり、

$$Q = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & I_{n-1} \\ -q_1 & -q_2 \cdots -q_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (15)$$

とおいた。

仮に、周期関数 $Y(\cdot)$ は、行列微分方程式

$$Y'(t) = AY(t) - Y(t)Q - \left(1 - \cos \frac{t}{\epsilon} \right) (A - Q) \quad (16)$$

を満たすとする。このとき、 $W(t) = Y(t)e^{Qt}$ とおくと、(16) 式および $Y(\cdot)$ の正則性から、 $W(t)$ は (14) 式の基本行列になることが容易に確認できる。さらに、 $Y(\cdot)$ の周期性から $W(t+T) = W(t)e^{QT}, \forall t \in \mathbb{R}$ が成り立つことがすぐにわかる。したがって、特性乗数の定義から、閉ループシステム (14) 式の特性乗数は、 e^{QT} の固有値に厳密に配置される。

以上から、問題 1 を解く周期係数状態フィードバック (12) 式は、つぎのような手順で設計すればよい。

Step 1) e^{QT} の固有値が配置先の特性乗数 ((4) 式の零点) に一致するように (15) 式の実数 $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ を求め、(13) 式によって k を決定する。

Step 2) (16) 式を満たす周期 T の連続関数 $Y(\cdot)$ が正則となるような N を求め、 $f(\cdot)$ を (6) 式によって決定する。

ただし、そのような設計パラメータ k および N が存在するか、さらに、それに伴う計算が実行可能なものは議論する必要がある、以下にそれを述べる。

4.1 設計パラメータ k の計算

一般に、実行列 $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が与えられたとき、行列 X を未知とする行列方程式 $e^X = C$ は、 C が正則ならば解 X をもつ^{15), 17)}。しかしそのような解 X が実行列とならない場合があり、実行列 X の存在を保証するには、 C の固有構造にある制限を加えなければならないことが知られている¹⁷⁾。

一方、 k (および Q) はフィードバックゲインの一部であるから、それらを実数の範囲で求めたい。しかし、(4) 式の零点として与えられた配置先の特性乗数に、 e^{QT} の固有値を一致させるような Q が実行列として存在するかどうかは、上で述べたように単純な問題ではない。

そこで本論文では、配置先の特性乗数として (4) 式の零点を考えるが、とくに、

$$\psi(s) \neq 0, \quad \forall s \in \{s \in \mathbb{R} : s \leq 0\} \quad (17)$$

を仮定する。すなわち、配置先の特性乗数は、負の実数を含まないとする (この仮定は (4) 式における仮定 $(-1)^n \theta_1 > 0$ を含む)。このとき、Step 1 における実行列 Q の存在および計算は、以下のように与えることができ、設計パラメータ k は (13) 式から決まる。

[補題 1] (17) 式を満たす (4) 式が

$$\psi(s) = (s - \alpha_1)^{l_1} (s - \alpha_2)^{l_2} \cdots (s - \alpha_r)^{l_r}$$

と因数分解されたとする。ここで、 r は $1 \leq r \leq n$ の自然数、 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, r)$ は互いに異なる複素数、 $l_i (i = 1, 2, \dots, r)$ は $\sum_{i=1}^r l_i = n$ を満たす自然数である。そして、複素数 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, r)$ に対して複素数

$$\beta_i = \frac{1}{T} (\log |\alpha_i| + j \arg \alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, r$$

を決める。ただし、 $-\pi < \arg \alpha_i < \pi (i = 1, 2, \dots, r)$ とする。このとき、(15) 式の $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ を

$$s^n + q_n s^{n-1} + \cdots + q_2 s + q_1 = (s - \beta_1)^{l_1} (s - \beta_2)^{l_2} \cdots (s - \beta_r)^{l_r} \quad (18)$$

によって定めることにすると、 $q_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, n)$ であって、 e^{QT} の固有値は、 $\psi(s)$ の零点に一致する。■

(証明) $r = n$ の場合を考える。この場合、複素数 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$ は互いに異なり、かつ、複素平面上で実軸に関して対称となる。したがって、 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ もまたこれと同じ性質をもつ。よって、(18) 式によって定まる $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ はすべて実数となり、また、Vandermonde 行列

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_1^{n-1} & \beta_2^{n-1} & \cdots & \beta_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

は正則となる^{18, p. 35)}。そして

$$V_n \text{diag} [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] V_n^{-1}$$

を作ると、(15) 式のコンパニオン行列 Q に一致する^{18, p. 69)}。このとき、指数関数のもつ性質^{18, p. 311)} から

$$e^{QT} = V_n \text{diag} [e^{\beta_1 T}, e^{\beta_2 T}, \dots, e^{\beta_n T}] V_n^{-1}$$

が成り立つ。 β_i の定義から、 $e^{\beta_i T} = \alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$ となるから、 e^{QT} の固有値は確かに $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ となる。

$r < n$ の場合も、一般化 Vandermonde 行列^{18, p. 69)} を用いることで同様な証明が可能である。■

4.2 設計パラメータ N と $Y(\cdot)$ の計算

前小節で述べた方法によって、(15) 式の行列 Q が決定されたとする。このとき、Step 2 で述べたように、 $Y(\cdot)$ を未知とする行列微分方程式 (16) 式が、正則な周期関数を解にもつように、設計パラメータ N (あるいは ϵ) を求めたい。

つぎの結果は、 N をある値以上とすれば、そのような $Y(\cdot)$ の存在を保証することができ、また、そのときの $Y(\cdot)$ は代数方程式を解くことによって与えられることを示している。

[補題 2] 自然数 N が与えられているとする。 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, $\{\mu_l\}_{l=1}^n$ をそれぞれ A , Q の固有値とすると、 $\mu_l - \lambda_i \neq 0$, $\mu_l - \lambda_i \neq \pm j4\pi N/T$, $\forall l, \forall i$ と仮定する。また、 $\epsilon = T/(4\pi N)$ とおく。このとき、つぎの (i), (ii) が成り立つ。

(i) 行列微分方程式 (16) 式の周期 T をもつ解 $Y(\cdot)$ はただ一つであり、周期 $T/(2N)$ の (もちろん周期 T でもある)

$$Y(t) = I_n + \epsilon Z_1 \sin \frac{t}{\epsilon} - \epsilon^2 Z_2 \cos \frac{t}{\epsilon} \quad (19)$$

で与えられる。ただし、 $Z_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ はそれぞれ行列方程式

$$Z_1 + \epsilon^2 (A^2 Z_1 - 2AZ_1 Q + Z_1 Q^2) = A - Q \quad (20)$$

$$Z_2 + \epsilon^2 (A^2 Z_2 - 2AZ_2 Q + Z_2 Q^2) = A^2 - 2AQ + Q^2 \quad (21)$$

のただ一つの解である。

(ii) 定数 $\epsilon_0 > 0$ が存在して、 $0 < \epsilon < \epsilon_0$ ならば、(19) 式の $Y(t)$ は $\det Y(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ を満たす。■

(証明) (i) $Z(t) = Y(t) - I_n$ とおくと、(16) 式は

$$Z'(t) = AZ(t) - Z(t)Q + (A - Q) \cos \frac{t}{\epsilon} \quad (22)$$

と書き直される。そして、(22) 式の両辺をベクトル化すると、

$$z'(t) + Hz(t) = \text{vec}(A - Q) \cos \frac{t}{\epsilon} \quad (23)$$

を得る。ただし、

$$H := I_n \otimes (-A) + Q^T \otimes I_n \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$$

であり、 $z(t) := \text{vec} Z(t) \in \mathbb{R}^{n^2}$ とおいた。ここで、記号 $\text{vec} M$ は、 $m \times n$ の行列 M を構成する n 本の列ベクトルを縦に並べて得られる mn 次元の列ベクトルを表わし、また、記号 $\otimes$ は Kronecker 積を表わす^{18, Chapter 12)}。今、

$$I_{n^2} + \epsilon^2 H^2 = I_n \otimes I_n + \epsilon^2 (I_n \otimes A^2 - 2Q^T \otimes A + (Q^T)^2 \otimes I_n)$$

の n^2 個の固有値は

$$1 + \epsilon^2 (\mu_l - \lambda_i)^2 \quad (i, l = 1, 2, \dots, n)$$

となることがわかるが^{18, p. 411)}、これらは、仮定 $\mu_l - \lambda_i \neq j/\epsilon$, $\forall i, \forall l$ より、どれも 0 ではない。したがって、 $I_{n^2} + \epsilon^2 H^2$ は正則である。ゆえに、(20) 式、(21) 式をそれぞれベクトル化した

$$(I_{n^2} + \epsilon^2 H^2) z_1 = \text{vec}(A - Q) \quad (24)$$

$$(I_{n^2} + \epsilon^2 H^2) z_2 = \text{vec}(A^2 - 2AQ + Q^2) \quad (25)$$

はいずれもただ一つの解 $z_1 = \text{vec} Z_1 \in \mathbb{R}^{n^2}$, $z_2 = \text{vec} Z_2 \in \mathbb{R}^{n^2}$ をもつ。したがって、

$$z(t) = \epsilon z_1 \sin \frac{t}{\epsilon} - \epsilon^2 z_2 \cos \frac{t}{\epsilon} \quad (26)$$

を定義することができるが、これが (23) 式の周期 $T/(2N)$ をもつ解になっていることは、代入によって直ちにわかる。

一方、 $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ がともに (23) 式の周期 T をもつ解であるとする。このとき、 $\tilde{\xi}(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t)$ とおくと、(23) 式から $\tilde{\xi}'(t) + H\tilde{\xi}(t) = 0$ が成り立ち、定数ベクトル $\zeta \in \mathbb{R}^{n^2}$ が存在して、 $\tilde{\xi}(t) = e^{-Ht}\zeta$ となる。 $\tilde{\xi}(\cdot)$ もまた周期 T をもつので、 $\tilde{\xi}(0) = \tilde{\xi}(T)$ すなわち、 $0 = (I_{n^2} - e^{-HT})\zeta$ が成立する。ここで、 H の固有値は $\{\mu_l - \lambda_i\}_{i,l=1}^n$ であるから^{18, p. 411)}、 $I_{n^2} - e^{-HT}$ の固有値は

$$1 - e^{-(\mu_l - \lambda_i)T} \quad (i, l = 1, 2, \dots, n)$$

となる^{18, p. 312)}。仮定 $\mu_l - \lambda_i \neq 0, \forall l, \forall i$ から、 $I_{n^2} - e^{-HT}$ は正則となり、結局、 $\zeta = 0$ 、すなわち、 $\xi_1(t) = \xi_2(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ となる。

以上より、(23) 式の周期 T の解はただ一つ (26) 式である。最後に、(26) 式に対してベクトル化の逆の操作を行ない、 $Z(t) = Y(t) - I_n$ を代入すれば、(19) 式が得られる。

(ii) 記号を簡略化するため、実数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ を

$$\gamma_1 = \|A - Q\|, \quad \gamma_2 = \|A^2 - 2AQ + Q^2\|,$$

$$\gamma_3 = \|A^2\| + 2\|A\|\|Q\| + \|Q^2\|$$

とおく ($\|\cdot\|$ は行列の最大特異値)。仮定 $\mu_l - \lambda_i \neq 0, \forall l, \forall i$ から、これらはすべて正の定数である。(20) 式に三角不等式を適用して

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \|A - Q\| &\geq \|Z_1\| - \epsilon^2 \|A^2 Z_1 - 2AZ_1 Q + Z_1 Q^2\| \\ &\geq (1 - \epsilon^2 \gamma_3) \|Z_1\| \end{aligned}$$

を得る。全く同様に、(21) 式から、 $\gamma_2 \geq (1 - \epsilon^2 \gamma_3) \|Z_2\|$ が得られる。これらの評価式を (19) 式から得られる $\|Y(t) - I_n\| \leq \epsilon \|Z_1\| + \epsilon^2 \|Z_2\|$ に代入して、 $\epsilon^2 < 1/\gamma_3$ のとき、

$$\|Y(t) - I_n\| \leq \frac{\epsilon \gamma_1 + \epsilon^2 \gamma_2}{1 - \epsilon^2 \gamma_3}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

となるが、上式右辺は

$$0 < \epsilon < \frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + 4(\gamma_2 + \gamma_3)}}{2(\gamma_2 + \gamma_3)} =: \epsilon_0 \quad (27)$$

のとき、1 より小さいことが容易にわかる。そして、 $\epsilon_0^2 < 1/\gamma_3$ となることが確認できる。以上より、 $0 < \epsilon < \epsilon_0$ ならば、 $\|Y(t) - I_n\| < 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$ が成り立つ。今、各 $t \in \mathbb{R}$ に対して $Y(t)$ の固有値を $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ と表わすと、 $Y(t) - I_n$ の固有値は $\{\lambda_i - 1\}_{i=1}^n$ となる。一方 $\|Y(t) - I_n\| < 1$ であるか

ら $|\lambda_i - 1| < 1$. したがって, どの λ_i も 0 以下の実数にはならない. そして $Y(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ であるから, その固有値 λ_i は, 正の実数となるかまたは, 実数でない複素数で共役な組として現れる. したがって, このような固有値 λ_i の積である $\det Y(t)$ は必ず正となる. 結局, $\det Y(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ となる. ■

最後に本節の結果をまとめておく.

《定理 1》 問題 1 を考える. $g(\cdot)$ は (5) 式の形で与えられるとし, (4) 式の $\psi(\cdot)$ は (17) 式と $\psi(e^{\lambda_i T}) \neq 0, \forall i$ を満たすとする ($\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ は A の固有値). そして, (A, b) は可制御正準形 (11) 式であると仮定し, (18) 式, (15) 式の $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ および (13) 式の $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ を与えておく. このとき, 自然数 N が存在して, (19) 式, (20) 式, (21) 式を満たす正則な $Y(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, (6) 式を満たす $f(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ がそれぞれただ一つ決まり, 周期係数状態フィードバック (12) 式による閉ループシステム (3) 式の実数乗数は $\psi(\cdot)$ の零点に配置される. ■

(注意) 仮定 $\psi(e^{\lambda_i T}) \neq 0, \forall i$ は, 補題 2 の仮定 $\mu_i - \lambda_i \neq 0, \forall i, \forall \lambda_i$ に対応するもので, 配置先の特性乗数が, 制御対象の特性乗数 $\{e^{\lambda_i T}\}_{i=1}^n$ を含まないことを意味する. ■

5. 閉ループシステムの漸近的性質

前節では, 特性乗数配置を厳密に行なう周期係数フィードバックの構成法を述べたが, その存在は, 設計パラメータ N をある値より大きくとることで保証された. そこで本節では, この N をさらに大きくしていった (高周波化した) ときの閉ループシステムの応答が示す振る舞い, とくに, 特性乗数では規定されない周期点間の応答を調べる.

まず, 前節で述べた方法により状態フィードバック (12) 式を構成すると, それによる閉ループシステムは (14) 式となる. さらにその基本行列の一つは, $W(t) = Y(t)e^{Qt}$ となる. したがって, 閉ループシステム (14) 式の解は, 初期条件を $x(0) = x_0$ とすると,

$$x(t) = Y(t)e^{Qt}Y(0)^{-1}x_0 \quad (28)$$

と陽に与えることができる. 今, 設計パラメータ N あるいは $\epsilon = T/(4\pi N)$ は, (27) 式を満たすとして, (28) 式の $x(\cdot)$ は

$$\|x(t) - e^{Qt}x_0\| \leq \epsilon_1 \|e^{Qt}\| \|x_0\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\epsilon_1 := \frac{\epsilon(\gamma_1 + 2\epsilon\gamma_2)}{1 - \epsilon^2(\gamma_2 + \gamma_3)}$$

と評価される. これはつぎのように確認できる. まず, 評価式

$$\begin{aligned} & \|Y(t)e^{Qt}Y(0)^{-1} - e^{Qt}\| \\ &= \left\| \left\{ (Y(t) - I_n)e^{Qt} + e^{Qt}(I_n - Y(0)) \right\} Y(0)^{-1} \right\| \\ &\leq \{\|Y(t) - I_n\| + \|I_n - Y(0)\|\} \|e^{Qt}\| \|Y(0)^{-1}\| \end{aligned}$$

が成り立つ. 補題 2 の (ii) の証明から

$$\|Y(t) - I_n\| \leq \frac{\epsilon\gamma_1 + \epsilon^2\gamma_2}{1 - \epsilon^2\gamma_3}$$

$$\|I_n - Y(0)\| = \epsilon^2\|Z_2\| \leq \frac{\epsilon^2\gamma_2}{1 - \epsilon^2\gamma_3}$$

がわかる. さらに,

$$\begin{aligned} \|Y(0)^{-1}\| &= \|(I_n - \epsilon^2 Z_2)^{-1}\| \\ &= \left\{ \min_{\|\eta\|=1} \|(I_n - \epsilon^2 Z_2)\eta\| \right\}^{-1} \leq \left\{ 1 - \epsilon^2 \max_{\|\eta\|=1} \|Z_2\eta\| \right\}^{-1} \\ &= (1 - \epsilon^2\|Z_2\|)^{-1} = \frac{1 - \epsilon^2\gamma_3}{1 - \epsilon^2(\gamma_2 + \gamma_3)} \end{aligned}$$

となる. これらから単純計算によって

$$\|Y(t)e^{Qt}Y(0)^{-1} - e^{Qt}\| \leq \epsilon_1 \|e^{Qt}\|$$

が導かれる. すなわち, $\|x(t) - e^{Qt}x_0\| \leq \epsilon_1 \|e^{Qt}\| \|x_0\|$ が確認できた. したがって, 配置先の特性乗数をすべて絶対値 1 未満とすることで閉ループシステムを安定化するならば,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t) - e^{Qt}x_0\| = 0 \quad (29)$$

となる. すなわち, 設計パラメータ N を十分大きくとることで, 閉ループシステムの応答を, 線形定数係数システム

$$\xi' = Q\xi, \quad \xi(0) = x_0 \quad (30)$$

の応答に, 周期点間も含めて近づけることができる. このことは, 設計パラメータ k の決定を, より扱いやすい線形定数係数システムの応答に準じて行なうことができることを示している.

6. 地球の磁場を利用した衛星の姿勢制御

文献 13) では, 高周波化フィードバックの適用例として, アクチュエータに磁気トルカを利用した衛星の姿勢制御問題を採り上げた. そこで本節では, 同問題に対して, 本論文で提案する厳密な特性乗数配置法を検討する.

磁気トルカとは, 地球の磁場の中で電流を流すことによって発生するローレンツ力を利用するものである. 衛星が地球に正対するときを基準の姿勢としたとき, その基準姿勢からみた地球の磁場は, 衛星が地球を周回するにつれて周期的に時間変化することになる. したがって, 角運動量方程式を基準姿勢まわりで線形近似すると, 周期係数システムが得られる. とくに, 三つの姿勢角のうち, ヨー角 γ [rad] に関するダイナミクスを抜き出すと

$$\gamma'' - a_1\gamma = b_1(\cos 2\pi t)u \quad (31)$$

の形となる¹³⁾. ここで, $a_1 \in \mathbb{R}$, $b_1 \in \mathbb{R}$ は衛星の慣性モーメントや地球磁場の強さなどから決まる定数であり, 制御入力 u は磁気トルカの発生する磁気双極子の強さ (単位は [A·m²]) である. また, 時刻 t および時間微分 $'$ は, 衛星の地球周回周期を単位時間としたときのものである.

以下, 13) 同様, 文献 19) の数値例を用いると, $a_1 = 28.8$, $b_1 = -29.9$ となる. そこで, 状態変数を $x_1 = \gamma/28.8$, $x_2 = \gamma'/28.8$ とおけば, (31) 式は

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 28.8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} g_0(\cos 2\pi t)u$$

なる (1) 式の形となる. ただし, $g_0 = -29.9/28.8$ である. この不安定な制御対象に対して, 配置先の特性乗数を

$$\psi(s) = s^2 + 10^{-2}s + 10^{-4}$$

の零点 $-0.005 \pm j0.00866$ として与え, 周期係数状態フィードバック (12) 式により原点を安定化する. まず, 補題 1 によって, 設計パラメータ k は

$$k = \begin{bmatrix} -54.4 & -9.21 \end{bmatrix}$$

となった. つぎに, 設計パラメータ N を与えて $Y(\cdot)$ を補題 2 の (19) 式によって計算する. この場合, $N \geq 1$ のとき, $Y(\cdot)$ は正則となることが確認でき, (20) 式, (21) 式より, $N = 1$ のとき,

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -2.03 & -0.293 \\ 44.7 & 7.74 \end{bmatrix}, Z_2 = \begin{bmatrix} 97.4 & 26.5 \\ -323 & -103 \end{bmatrix}$$

となり, また $N = 6$ のとき

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -0.0820 & -0.0106 \\ 54.0 & 9.16 \end{bmatrix}, Z_2 = \begin{bmatrix} 105 & 27.6 \\ -239 & -88.6 \end{bmatrix}$$

などとなる. 一方, (6) 式を満たす $f(\cdot)$ は任意の自然数 N に対して存在することがわかる. 具体的には,

$$f(t) = \frac{2}{90} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i \cos(2i+1)2\pi t$$

となる.

以上の k , $Y(\cdot)$, $f(\cdot)$ を用いて, 周期係数状態フィードバック (12) 式を構成することができ, 閉ループシステム (14) 式の特性乗数は, 任意の自然数 N に対して $\psi(\cdot)$ の零点に厳密に配置されることになる.

また, 閉ループシステムの漸近的性質 (29) 式を確認するために, 初期条件を $\gamma(0) = 2\pi/360$ [rad], $\gamma'(0) = 0$ [rad/周回] として, 数値シミュレーションを行なった. Fig. 1, Fig. 2 の横軸は t [周回] であり, 縦軸はそれぞれ γ , γ' である. 実線は $N = 1$ と $N = 6$ の場合の閉ループシステム (14) 式の応答であり, 破線は同じ初期条件における (30) 式の応答である. これらの図から, N を大きくすると, (14) 式の応答が (30) 式の応答に, より近づくようすが確認できる.

7. おわりに

本論文では, 線形周期係数システムにおける特性乗数配置問題を考え, あるクラスに属する制御対象に対して, 特性乗数を厳密に配置することができる高周波化・周期係数状態フィードバックを提案した. このフィードバックは, 特性乗数配置のみならず, 閉ループシステムの初期値応答をある線

Fig. 1 γ (left: $N = 1$, right: $N = 6$)

Fig. 2 γ' (left: $N = 1$, right: $N = 6$)

形定数係数システムのそれに漸近させることができ, 単に特性乗数を指定する場合と比べて初期値応答をより詳細に規定することができる. そして提案する制御則を, 地球磁場を利用した衛星の姿勢制御問題に適用し, その効果を例証した.

参考文献

- 1) P. Brunovsky: Controllability and Linear Closed-Loop Controls in Linear Periodic Systems, *J. Differential Equations*, **6**, 296/313 (1969)
- 2) A. Tornambe and P. Valigi: Asymptotic Stabilization of a Class of Continuous-Time Linear Periodic Systems, *Systems & Control Lett.*, **28-4**, 189/196 (1996)
- 3) G. Kern: Linear Closed-Loop Control in Linear Periodic Systems with Application to Spin-Stabilized Bodies, *Int. J. Control*, **31-5**, 905/916 (1980)
- 4) R. A. Calico and W. E. Wiesel: Control of Time-Periodic Systems, *J. Guidance*, **7-6**, 671/676 (1984)
- 5) S. C. Sinha and P. Joseph: Control of General Dynamic Systems with Periodically Varying Parameters via Liapunov-Floquet Transformation, *J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **116**, 650/658 (1994)
- 6) Y. J. Lee and M. J. Balas: Controller Design of Periodic Time-Varying Systems via Time-Invariant Methods, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, **22-3**, 486/488 (1999)
- 7) P. Montagnier and R. J. Spiteri: A Gramian-Based Controller for Linear Periodic Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **49-8**, 1380/1385 (2004)
- 8) P. T. Kabamba: Monodromy Eigenvalue Assignment in Linear Periodic Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **31-10**, 950/952 (1986)
- 9) H. M. Al-Rahamani and G. F. Franklin: Linear Periodic Systems: Eigenvalue Assignment Using Discrete Periodic Feedback, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **34-1**, 99/103 (1989)
- 10) 河野・鈴木・森下: 多重周期サンプル状態ホールド制御による周期係数システムの特性乗数設定, 計測自動制御学会論文集, **25-3**, 319/324 (1989)
- 11) M. Chen and Y. Chen: Static Output Feedback Control for Periodically Time-Varying Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **44-1**, 218/222 (1999)
- 12) J. J. Yame and R. Hanus: On Stabilization and Spectrum Assignment in Periodically Time-Varying Continuous-Time Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **46-6**, 979/983 (2001)

- 13) 穂高・軸屋: 連続時間・線形周期係数システムの高周波化フィードバック制御, 計測自動制御学会論文集, **40**-10, 1054/1059 (2004)
- 14) I. Jikuya and I. Hodaka: On the Use of the Averaging Method for the Characteristic Multiplier Placement Problem, *Proceedings of 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005* (to be published)
- 15) 白岩謙一: 常微分方程式序説, サイエンス社 (1975)
- 16) H. K. Khalil: *Nonlinear Systems*, 3rd ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ (2002)
- 17) W. J. Culver: On the Existence and Uniqueness of the Real Logarithm of a Matrix, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **17**-5, 1146/1151 (1966)
- 18) P. Lancaster and M. Tismenetsky: *The Theory of Matrices*, 2nd ed., Academic Press (1985)
- 19) M. Lovera, E. De Marchi and S. Bittanti: Periodic Attitude Control Techniques for Small Satellites with Magnetic Actuators, *IEEE Trans. Control Systems Technology*, **10**, 90/95 (2002)

=====

[著 者 紹 介]

穂 高 一 条 (正会員)

1997 年名古屋大学工学研究科航空宇宙工学専攻博士課程後期課程退学. 同年名古屋大学工学研究科航空宇宙工学専攻助手, 2001 年名古屋大学工学研究科マイクロシステム工学専攻(現マイクロ・ナノシステム工学専攻)講師, 現在に至る. システム制御理論とその応用の研究に従事(博士(工学)). 日本航空宇宙学会, IEEE の会員.

軸 屋 一 郎 (正会員)

2001 年東京大学大学院工学系研究科博士課程修了. 同年 Twente 大学応用物理学科システム制御部門にて研究員, 2002 年名古屋大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻助手, 現在に至る. システム制御理論の研究に従事(博士(工学)).

=====