極の領域を指定した拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の LMI 解法の導出とその応用

石原 義之*・千田 有一**

Extended $\mathcal{H}_\infty$ Control with Pole Placement Constraints via LMI Approach and Its Application

Yoshiyuki ISHIHARA* and Yuichi CHIDA**

In this paper, we consider a $\mathcal{H}_\infty$ control problem with constraints on closed-loop pole location. In this problem, it is difficult to locate closed-loop poles in preferable region if weighting functions include unstabilizable or undetectable poles close to the imaginary axis. In order to overcome this problem, we present a solvability condition of extended $\mathcal{H}_\infty$ control problem with pole placement constraints via LMI approach. Finally, we show an application result of the proposed method to a vibration isolation control and verified the performance of the designed controller by experiments.

Key Words: extended $\mathcal{H}_\infty$ control, LMI, frequency shaping, active vibration isolation

1. はじめに

$\mathcal{H}_\infty$ 制御によれば、閉ループ系の周波数応答を直接的に整形できるため、周波数領域の設計仕様に関して直感的でシステマティックな設計を行なうことができる。しかしながら、減衰性の悪い共振極をもつ制御対象の場合、虚軸近傍や減衰性の悪い閉ループ極が生じることがある。その場合、極配置制約を付加した形で $\mathcal{H}_\infty$ 制御を用いることにより、時間応答仕様を直接指定することが望ましい。

極配置制約を付加した $\mathcal{H}_\infty$ 制御の解法として、ロバスト安定度指定法や LMI に基づく方法⁴⁾が提案されているが、これらの方法では設計パラメータである重み関数極が不可制御・不可観測とならない範囲でしか極配置領域を指定することができない。一方、狭帯域周波数外乱に対するアクティブ振動絶縁制御系の設計問題³⁾においては、重み関数に虚軸近傍極を含ませる必要があり、極配置制約を容易に課すことができない。この問題点を回避するため、筆者らは文献²⁾において不安定重みを許容する拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御^{7),8)}とロバスト安定度指定法を組み合わせた設計手法を提案し、一定の改善が図れることを示した。しかし、この手法では閉ループ系の安定度が指定できるものの、減衰比の指定ができないために、時間

応答仕様の設定が十分に行なえなかった。そこで、本論文では減衰比の指定を含めたより一般的な形で極配置制約を課した上で、拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御を解くための LMI 解法を示す。

拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の解法は、平田らによって LMI 可解条件が導かれている⁶⁾。一方、極配置 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の LMI 解法は Chilali らによって示されている⁴⁾。両者の方法を組み合わせれば、求める制御器が得られると考えられるが、両者の示した LMI 条件は制御器パラメータが解くべき変数として LMI 内に含まれる変数変換型と、含まれない変数消去型と異なった形式となっており、単純に組み合わせることはできない。そこで、本論文ではまず Chilali らが示した結果とは異なり、変数消去型 LMI によって極配置 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の可解条件を導出する。つぎに、この結果を拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御条件に拡張することによって極配置拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の LMI 解法を導出する。最後に、導出した解法をアクティブ振動絶縁系の設計に応用した例を示し、計算機シミュレーションと実験結果によってその有効性を検証する。

2. 極配置 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の可解条件

本論文で考察する一般化プラントを

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (1)$$

とし、 $G(s)$ は

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (2)$$

であるとする。考える $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題は厳密にプロパーな制

* 信州大学工学系研究科機械システム工学専攻 (現在, (株) 東芝) 長野市若里 4-17-1

** 信州大学工学部機械システム工学科 長野市若里 4-17-1

* Graduate School of Engineering, Shinshu University; 4-17-1, Wakasato, Nagano

** Department of Mechanical Systems Engineering, Shinshu University; 4-17-1, Wakasato, Nagano

(Received April 27, 2005)

(Revised February 28, 2006)

制御器 $K(s) := \{A_K, B_K, C_K, 0\}$ を用いた出力フィードバック制御 $u = K(s)y$ によって閉ループ系を内部安定とし, w, z 間の閉ループ伝達関数 G_{zw} を $G_{zw} \in \mathcal{BH}_\infty$ とすることとなる. ただし, 閉ループ系 $G_{zw} = \{A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, 0\}$ は次式で表わされる.

$$G_{zw} = \left[\begin{array}{cc|c} A & B_2 C_K & B_1 \\ B_K C_2 & A_K & B_K D_{21} \\ \hline C_1 & D_{12} C_K & 0 \end{array} \right] \quad (3)$$

このとき, 以下の仮定

A) (A, B_2) 可安定

B) (A, C_2) 可検出

のもとで, 極配置 $\mathcal{H}_\infty$ 制御に関するつぎの2つの補題が知られている.

[補題1] (有界実補題⁵⁾) (2) 式の一般化プラントにおいて, 以下の2つの条件は等価である.

(i) 閉ループ系 (G_{22}, K) が内部安定で $\|G_{zw}\|_\infty < 1$ となる厳密にプロパーかつフルオーダーの制御器 $K(s) = \{A_K, B_K, C_K, 0\}$ が存在する.

(ii) つぎの不等式を満たす $X_{cl} > 0$ が存在する.

$$A_{cl} X_{cl} + X_{cl} A_{cl}^T + X_{cl} C_{cl}^T C_{cl} X_{cl} + B_{cl} B_{cl}^T < 0 \quad (4)$$

[補題2] 閉ループ極が指定した LMI 領域 $\mathcal{D}$ に配置される必要十分条件は以下を満たす正定対称行列 $X_D > 0$ が存在することである⁴⁾.

$$[\alpha_{kl} X_D + \beta_{kl} A_{cl} X_D + \beta_{lk} X_D A_{cl}^T]_{1 \leq k, l \leq m} < 0 \quad (5)$$

ただし, α_{kl}, β_{kl} は指定した LMI 領域 $\mathcal{D}$ によって決定されるパラメータである.

LMI 領域 $\mathcal{D}$ は Chilali らによって示された複素平面の部分集合であり⁴⁾, たとえば Fig. 2 の斜線部分で示される領域である. また, $m = 2$ の場合, (5) 式は次式となる.

$$\left[\begin{array}{c} \alpha_{11} X_D + \beta_{11} A_{cl} X_D + \beta_{11} X_D A_{cl}^T \\ \alpha_{21} X_D + \beta_{21} A_{cl} X_D + \beta_{12} X_D A_{cl}^T \\ \alpha_{12} X_D + \beta_{12} A_{cl} X_D + \beta_{21} X_D A_{cl}^T \\ \alpha_{22} X_D + \beta_{22} A_{cl} X_D + \beta_{22} X_D A_{cl}^T \end{array} \right] < 0 \quad (6)$$

《定理1》(極配置 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の可解条件) 1. $G_{zw} \in \mathcal{BH}_\infty$ とし同時に閉ループ極を指定した LMI 領域 $\mathcal{D}$ に配置する, 極配置 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題が可解であるための十分条件は以下の1)~4)の(行列)不等式を満たす F, L と対称行列 X, Y が存在することである.

$$1) A_F X + X A_F^T + X C_F^T C_F X + B_1 B_1^T < 0 \quad (7)$$

$$X > 0 \quad (8)$$

$$2) Y A_L + A_L^T Y + C_1^T C_1 + Y B_L B_L^T Y < 0 \quad (9)$$

$$Y > 0 \quad (10)$$

$$3) \rho(Y^{-1} X^{-1}) < 1 \quad (11)$$

ただし $\rho(\cdot)$ はスペクトル半径を表わす.

$$4) \left[\alpha_{kl} \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} + \beta_{kl} \Phi + \beta_{lk} \Phi^T \right]_{1 \leq k, l \leq m} < 0 \quad (12)$$

$$\Phi := \begin{bmatrix} A_F X & A \\ -(C_1^T C_F X + Y B_L B_L^T + A^T) & Y A_L \end{bmatrix} \quad (13)$$

ただし, α_{kl}, β_{kl} は指定した LMI 領域 $\mathcal{D}$ によって決定されるパラメータである. また, F, L は以下の A_F, A_L を安定化する行列である.

$$A_F := A + B_2 F, \quad C_F := C_1 + D_{12} F \quad (14)$$

$$A_L := A + L C_2, \quad B_L := B_1 + L D_{21} \quad (15)$$

2. 可解条件が成り立つ場合, 制御器の一つは次式で与えられる.

$$K(s) = \{A_K, B_K, C_K, 0\} \quad (16)$$

ただし,

$$A_K = (A + L C_2) X Z^{-1} + B_2 C_K + B_L B_L^T Z^{-1} + Y^{-1} (A^T + C_1^T C_F X) Z^{-1} \quad (17)$$

$$B_K = -L \quad (18)$$

$$C_K = F X Z^{-1} \quad (19)$$

であり, Z は以下を満たす対称行列である.

$$Z := X - Y^{-1} \quad (20)$$

(証明) 補題1,2の行列不等式が共通解をもつという範囲で考えると, $G_{zw} \in \mathcal{BH}_\infty$ とし閉ループ極を指定した LMI 領域に配置するための必要十分条件は, つぎの行列不等式

$$\Theta := A_{cl} X_{cl} + X_{cl} A_{cl}^T + X_{cl} C_{cl}^T C_{cl} X_{cl} + B_{cl} B_{cl}^T < 0 \quad (21)$$

$$\Delta := [\alpha_{kl} X_{cl} + \beta_{kl} A_{cl} X_{cl} + \beta_{lk} X_{cl} A_{cl}^T]_{1 \leq k, l \leq m} < 0 \quad (22)$$

が正定解 $X_{cl} > 0$ をもつことである⁴⁾. そこで(7)~(20)式を満たせば(21), (22)式を満たすことを示す. まず X_{cl} を

$$X_{cl} := \begin{bmatrix} X & Z \\ Z & Y \end{bmatrix} \quad (23)$$

と書いても一般性は失われない. $Y := (X - Z)^{-1}$ とすると, $X_{cl} > 0$ と $X > 0, Y > 0$ および $\rho(Y^{-1} X^{-1}) < 1$ が等価であることは schur 補題を用いて容易に確かめられる. ここで, 変換行列 T を

$$T := \begin{bmatrix} I & 0 \\ Y & -Y \end{bmatrix} \quad (24)$$

のように定義する. T は正則であるので(21), (22)式の Θ と Δ に合同変換

$$\hat{\Theta} := T\Theta T^T$$

$$\hat{\Delta} := \text{diag}(T, \dots, T) \Delta \text{diag}(T^T, \dots, T^T)$$

を行なうと負定性は保存され、 $\Theta < 0 \Leftrightarrow \hat{\Theta} < 0$, $\Delta < 0 \Leftrightarrow \hat{\Delta} < 0$ となる. 実際に (3) 式の A_{cl}, B_{cl}, C_{cl} を代入して計算を行なうと,

$$\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} \hat{\Theta}_{11} & \hat{\Theta}_{21}^T \\ \hat{\Theta}_{21} & \hat{\Theta}_{22} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\hat{\Theta}_{11} = (A + B_2 F)X + X(A + B_2 F)^T + B_1 B_1^T + X(C_1 + D_{12} F)^T (C_1 + D_{12} F)X \quad (26)$$

$$\hat{\Theta}_{22} = Y(A + LC_2) + (A + LC_2)^T Y + C_1^T C_1 + Y(B_1 + LD_{21})(B_1 + LD_{21})^T Y \quad (27)$$

$$\hat{\Theta}_{21} = Y(A - B_K C_2)X + Y(B_2 C_K - A_K)Z + A^T + C_1^T (C_1 + D_{12} F)X + Y(B_1 + LD_{21})B_1^T \quad (28)$$

を得る. ただし, $F := C_K Z X^{-1}$, $L := -B_K$ である. 一方, $\hat{\Delta}$ は,

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \alpha_{kl} \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} + \beta_{kl} \begin{pmatrix} A_F X & A \\ \Psi & Y A_L \end{pmatrix} + \beta_{lk} \begin{pmatrix} A_F X & A \\ \Psi & Y A_L \end{pmatrix}^T \end{bmatrix}_{1 \leq k, l \leq m} \quad (29)$$

$$\Psi = Y(A - B_K C_2)X + Y(B_2 C_K - A_K)Z \quad (30)$$

となる. ここで, A_K, B_K, C_K を定理 1 の (17)~(19) 式のように選ぶと, $\hat{\Theta}_{21} = 0$ となり $\hat{\Theta}_{11} < 0$ と (7) 式, $\hat{\Theta}_{22} < 0$ と (9) 式は等価となる. また, (30) 式の Ψ は A_K を (17) 式のように選ぶと,

$$\begin{aligned} \Psi &= Y(A - B_K C_2)X + Y(B_2 C_K - A_K)Z \\ &= -(C_1^T C_F X + Y B_L B_1^T + A^T) \end{aligned} \quad (31)$$

と変形でき, (12) 式 $\Rightarrow$ (29) 式を得る. したがって, (7)~(20) 式を満たすとき, $\hat{\Theta} < 0$, $\hat{\Delta} < 0$ となり, $X > 0$, $Y > 0$ と併せて $X_{cl} > 0$ となるので, (21), (22) 式が成り立ち, $G_{zw} \in \mathcal{BH}_\infty$ および極配置制約条件が満たされる. ■

(注意) (21) 式と (22) 式が共通解を持つ範囲の問題に限定して考えれば, 定理 1 の 1 は必要十分条件となる. 必要性の証明は (7)~(11) 式の条件において, $X^{-1} = \mathcal{X}$, $Y^{-1} = \mathcal{Y}$ とおいた $\mathcal{Y}, \mathcal{X}$ についての条件が $\mathcal{H}_\infty$ 制御可解条件の必要十分条件⁹⁾となっていることから明らかである.

(注意) 定理 1 で示した $\mathcal{H}_\infty$ 制御の可解条件 (7)~(11) 式は文献⁹⁾と等価であるが, 制御器の形式は異なる. これは, (28) 式で $\Theta_{21} = 0$ となるように A_K を選んでいるためであり, これによって (31) 式の変形を行なうことができ, 制御器変数を行列不等式から消去できる. また, (7)~(12) 式は $M := FX, N := YL$ の変数変換と schur 補題により容易に

LMI に帰着でき, 導出される LMI 条件は制御器パラメータを変数として含まない形式となる.

3. 極配置型拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の可解条件

3.1 問題設定

以下で考察する一般化プラントは, 評価出力 z 側のみ周波数重み関数 $W_z(s)$ が直結されている Fig. 1 の構造のものに限定する. また, q はスカラー重みである. このとき, 拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題はプロパーな制御器 $K(s)$ を用いた出力フィードバック制御 $u = K(s)y$ によって, (G_{22}, K) で構成される閉ループ系を内部安定とし, w, z 間の閉ループ伝達関数を $G_{zw} \in \mathcal{BH}_\infty$ とすることとなる. ここで, 閉ループ極を Fig. 2 の斜線部分で表わされた LMI 領域 $\mathcal{D}$ に配置することを考える. もし, $W_z(s)$ の極が斜線部分の外側に存在した場合, これらの極は拡大系の不可検出モードとなり標準 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の枠組みで解くことはできない. この点に, 拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御を用いる意義がある.

Fig. 1 Structure of augmented system

Fig. 2 LMI region $\mathcal{D}$ and poles of A_{pz}

文献⁶⁾に従って, 拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題の前提条件として以下を仮定しておく.

A') (A, B_2) 可安定

B') A_{pz} を除いて (A, C_2) 可検出. ただし, A_{pz} は $W_z(s)$ のすべての不安定極に対応するジョルダン行列である.

C') $[C_2, D_{21}]$ は行フルランク.

また, 次式を満たす行フルランクな行列 U_0 の集合を $\mathcal{U}_0$ とし, $U_0 \in \mathcal{U}_0$ に対し次式を満たす L の集合を $\mathcal{L}(\mathcal{U}_0)$ で定義する (注 1).

$$U_0(A + LC_2) = A_{pz}U_0 \quad (32)$$

$$U_0(B_1 + LD_{21}) = 0 \quad (33)$$

(注 1) $\mathcal{L}(\mathcal{U}_0)$ の定義としては, 文献⁶⁾よりも緩い条件で定義しているが, これは本論文が十分条件のみを議論しているため, (32), (33) 式のみで十分であるためである.

このとき、拡大系 G に対する拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御器 K が存在するためには、 $\mathcal{U}_0 \neq \emptyset$ とならなければならない。この条件は A_{pz} が G_{zw} の不可制御モードとならなければならないことを示し、 $\{A, B_1, C_2, D_{21}\}$ の不変零点になるという条件と等価である。

3.2 極配置型拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の可解条件とその導出

仮定 A'), B'), C') のもとで、本論文の主要結果となるつぎの定理を得る。

《定理2》(極配置型拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の可解条件) 1. 周波数重みが評価出力 z にのみ直結された、Fig. 1 の構造をもつ拡大系において、極配置型拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題が可解であるための十分条件は、仮定 A'), B'), C') のもとで少なくとも一つの $U_0 \in \mathcal{U}_0$ について、以下の1)~4)の(行列)不等式を満たす F と $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_0)$ 、および対称行列 X, Y が存在することである。

$$1) A_F X + X A_F^T + X C_F^T C_F X + B_1 B_1^T < 0 \quad (34)$$

$$X > 0 \quad (35)$$

$$2) U_1(Y A_L + A_L^T Y + C_1^T C_1 + Y B_L B_L^T Y) U_1^T < 0 \quad (36)$$

$$U_0 Y = 0, \quad U_1 Y U_1^T > 0 \quad (37)$$

$$3) \left[\alpha_{kl} \begin{pmatrix} X & U_1^T \\ U_1 & U_1 Y U_1^T \end{pmatrix} + \beta_{kl} \Omega + \beta_{lk} \Omega^T \right]_{1 \leq k, l \leq m} < 0 \quad (38)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} A_F X \\ -U_1(C_1^T C_F X + Y B_L B_1^T + A^T) \\ A U_1^T \\ U_1 Y A_L U_1^T \end{bmatrix} \quad (39)$$

であり、 α_{kl}, β_{kl} は指定した LMI 領域によって決定されるパラメータである。

$$4) \rho(Y^\dagger X^{-1}) < 1 \quad (40)$$

ただし、 $Y^\dagger$ は

$$Y^\dagger := U_1^\dagger \{ (U_1^\dagger)^T Y U_1^\dagger \}^{-1} (U_1^\dagger)^T \quad (41)$$

で表わされる行列である。また、 U_1 は $[U_0^T, U_1^T]$ を正則とし $\text{Im} U_1^T = \text{Ker} U_0$ を満たす任意の行列とする。ただし、 Im, Ker はそれぞれ像と零化空間を表わす。また A_F, A_L および C_F, B_L の定義は (14), (15) 式と同様である。

2. 可解条件が成り立つ場合、制御器の一つは定理1の2.で(17), (19) 式の Y^{-1}, Z を (41) 式の $Y^\dagger$ と以下の Z に置き換えたもので与えられる(注2)。

$$Z := X - Y^\dagger \quad (42)$$

(注2) Z が正則であることは (40) 式より若干の計算によって導ける。

また、 $U_1^\dagger$ は U_1 の疑似逆行列を表わすものとする。

3.3 定理2の証明

定理1と同様の手順で証明する。まず、 A_{pz} が G_{zw} の不可制御モードとなることを示し、これを除いた G_{zw} の最小実現を求める。文献⁶⁾と同様に、以下の相似変換行列 T を定義する。

$$T := \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & T_U^T \end{bmatrix}, \quad T_U := \begin{bmatrix} U_1 \\ U_0 \end{bmatrix}, \quad T_U T_U^T = I \quad (43)$$

ただし、記述を簡略化するため、一般性を失うことなく $T_U T_U^T = I$ と仮定している。この場合、 $U_1^\dagger = U_1^T$ として計算できる。(3) 式の A_{cl}, B_{cl}, C_{cl} を (43) 式の T を用いてそれぞれ相似変換し、 $U_0(A + B_2 C_K - B_K C_2 - A_K) = 0$ の関係を用い整理すると、

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{cl} &:= T^{-1} A_{cl} T \\ &= \begin{bmatrix} A + B_2 C_K & B_2 C_K U_1^T & * \\ -U_1 J & U_1(A - B_K C_2 - J) U_1^T & * \\ 0 & 0 & A_{pz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\tilde{B}_{cl} := T^{-1} B_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 \\ U_1(B_K D_{21} - B_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$J := A + B_2 C_K - B_K C_2 - A_K \quad (46)$$

となり、 A_{pz} が G_{zw} の不可制御モードとなることがわかる。ただし、 $*$ は適当な行列を表わす。以上より、

$$G_{zw} = \{\tilde{A}_{cl}, \tilde{B}_{cl}, \tilde{C}_{cl}, 0\} \quad (47)$$

$$\tilde{A}_{cl} := \begin{bmatrix} A + B_2 C_K & B_2 C_K U_1^T \\ -U_1 J & U_1(A + B_K C_2 - J) U_1^T \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\tilde{B}_{cl} := \begin{bmatrix} B_1 \\ U_1(B_K D_{21} - B_1) \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\tilde{C}_{cl} := \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} C_K & D_{12} C_K U_1^T \end{bmatrix} \quad (50)$$

となり最小実現された G_{zw} を得る。つぎに、新たな相似変換行列 W を

$$W := \begin{bmatrix} I & 0 \\ -U_1 & I \end{bmatrix} \quad (51)$$

と定義し、 $\tilde{A}_{cl}, \tilde{B}_{cl}, \tilde{C}_{cl}$ をさらに相似変換して

$$\begin{aligned} \hat{A}_{cl} &:= W^{-1} \tilde{A}_{cl} W \\ &= \begin{bmatrix} A + B_2 C_K(I - U_1^T U_1) & B_2 C_K U_1^T \\ U_1 \{A_K(I - U_1^T U_1) + B_K C_2\} & U_1 A_K U_1^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\hat{B}_{cl} := W^{-1} \tilde{B}_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 \\ U_1 B_K D_{21} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{cl} &:= \tilde{C}_{cl}W \\ &= \begin{bmatrix} C_1 + D_{12}C_K(I - U_1^T U_1) & D_{12}C_K U_1^T \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (54)$$

とする. この $G_{zw} = \{\hat{A}_{cl}, \hat{B}_{cl}, \hat{C}_{cl}, 0\}$ に対して, 定理 1 と同様に補題 1, 2 の行列不等式が共通解をもつという範囲で考えると, $G_{zw} \in \mathcal{BH}_\infty$ とし閉ループ極を指定した LMI 領域に配置するための必要十分条件は, つぎの行列不等式

$$\Lambda := \hat{A}_{cl}\hat{X}_{cl} + \hat{X}_{cl}\hat{A}_{cl}^T + \hat{X}_{cl}\hat{C}_{cl}^T\hat{C}_{cl}\hat{X}_{cl} + \hat{B}_{cl}\hat{B}_{cl}^T < 0 \quad (55)$$

$$\Gamma := [\alpha_{kl}\hat{X}_{cl} + \beta_{kl}\hat{A}_{cl}\hat{X}_{cl} + \beta_{lk}\hat{X}_{cl}\hat{A}_{cl}^T]_{1 \leq k, l \leq m} < 0 \quad (56)$$

が正定解 $\hat{X}_{cl} > 0$ をもつことである. そこで以下では, (34)~(42) 式を満たせば $X_{cl} > 0$ および (55), (56) 式となることを示す.

まず, $\hat{X}_{cl}$ を (42) 式で定義された Z を用いて

$$\hat{X}_{cl} := \begin{bmatrix} X & ZU_1^T \\ U_1Z & U_1ZU_1^T \end{bmatrix} \quad (57)$$

と定義し, さらに変換行列 S を

$$S := \begin{bmatrix} I & 0 \\ U_1Y & -U_1YU_1^T \end{bmatrix} \quad (58)$$

のように定義すると S は正則であるので, $S\hat{X}_{cl}S^T$ は

$$S\hat{X}_{cl}S^T = \begin{bmatrix} X & U_1^T \\ U_1 & U_1YU_1^T \end{bmatrix} \quad (59)$$

となり,

$$\begin{bmatrix} X & U_1^T \\ U_1 & U_1YU_1^T \end{bmatrix} > 0 \quad (60)$$

と $X > 0$, $U_1YU_1^T > 0$ および $\rho(Y^\dagger X^{-1}) < 1$ が等価であることは schur 補題より容易に確かめられる. また, (55), (56) 式についても同様に変換すると

$$\hat{\Lambda} := SAS^T < 0$$

$$\hat{\Gamma} := \text{diag}(S, \dots, S) \Gamma \text{diag}(S^T, \dots, S^T) < 0$$

となるので,

$$Z = U_0^T U_0 X + U_1^T U_1 Z, \quad YU_1^T U_1 = Y \quad (61)$$

の関係を用いて $\hat{\Lambda}, \hat{\Gamma}$ を整理し, $F := C_K Z X^{-1}, L := -B_K$ と置き整理すると $\hat{\Lambda}, \hat{\Gamma}$ はつぎのようになる.

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{11} & \hat{\Lambda}_{21}^T \\ \hat{\Lambda}_{21} & \hat{\Lambda}_{22} \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_{11} &= (A + B_2 F)X + X(A + B_2 F)^T + B_1 B_1^T \\ &\quad + X(C_1 + D_{12} F)^T (C_1 + D_{12} F)X\end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_{22} &= U_1 \{Y(A + LC_2) + (A + LC_2)^T Y + C_1^T C_1 \\ &\quad + Y(B_1 + LD_{21})(B_1 + LD_{21})^T Y\} U_1^T\end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_{21} &= U_1 \{Y(A - B_K C_2)X + Y(B_2 C_K - A_K)Z \\ &\quad + A^T + C_1^T (C_1 + D_{12} F)X \\ &\quad + Y(B_1 + LD_{21})B_1^T\}\end{aligned} \quad (65)$$

$$\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} X & U_1^T \\ U_1 & U_1 Y U_1^T \end{bmatrix} + \beta_{kl} \Pi + \beta_{lk} \Pi^T \Big|_{1 \leq k, l \leq m} < 0 \quad (66)$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} A_F X & A U_1^T \\ \Upsilon & U_1 Y A_L U_1^T \end{pmatrix} \quad (67)$$

$$\Upsilon = U_1 \{Y(A - B_K C_2)X + Y(B_2 C_K - A_K)Z\} \quad (68)$$

ここで, A_K, B_K, C_K を定理 2 の 2. のように選ぶと, 定理 1 と同様に $\hat{\Lambda}_{21} = 0$ となり, $\hat{\Lambda}_{11} < 0$ と (34) 式, $\hat{\Lambda}_{22} < 0$ と (36) 式は等価となる. また, (68) 式の Υ は,

$$\Upsilon = -U_1(C_1^T C_F X + Y B_L B_1^T + A^T) \quad (69)$$

となり, $\Omega = \Upsilon$ となるので, (38) 式 $\Rightarrow$ (66) 式を得る. したがって, (34)~(40) 式を満たすとき, $\hat{\Lambda} < 0$, $\hat{\Gamma} < 0$ となり, (60) 式から $\hat{X}_{cl} > 0$ が言えるので, (55), (56) 式が満たされ, $G_{zw} \in \mathcal{BH}_\infty$ および極配置制約条件が満たされる.

(注意) (34)~(37) 式, および (40) 式の条件において, $Y^\dagger = \mathcal{Y}$, $X^{-1} = \mathcal{X}$ とおいた $\mathcal{Y}, \mathcal{X}$ についての条件は, 文献⁶⁾の定理 1 の条件と等価となっている. 文献⁶⁾の定理 1 は可解であるための必要十分条件であるが, (34)~(37) 式, および (40) 式はその別表現となっている.

3.4 LMI 条件の導出

定理 2 にもとづき, LMI 条件を導出する. まず, $U_L = U_0 L$ とおけば, (32), (33) 式を満たす U_0 は

$$\begin{bmatrix} U_0 & U_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = A_{pz} \begin{bmatrix} U_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

を満たす零点ベクトルから求められる. $\text{Im}[U_0, U_L]^T$ が唯一に定まる場合, 定理 2 の (34)~(40) 式は容易に LMI に変換でき, LMI の Feasibility Problem を用いて可解性が判定できる. このとき (32), (33) 式を満たす任意の U_1 を用いて,

$$\begin{aligned}A_U &:= U_1 A U_1^\dagger, & C_{1U} &:= C_1 U_1^\dagger, & C_{2U} &:= C_2 U_1^\dagger \\ B_{1U} &:= U_1 B_1, & L_U &:= U_1 L \\ Y_U &:= (U_1^\dagger)^T Y U_1^\dagger > 0, & N &:= Y_U L_U\end{aligned} \quad (71)$$

を定義し, (34), (36), (38) および (40) 式を変形することで直接的につぎの結果を得る.

[系 1] $\text{Im}[U_0, U_L]^T$ が存在するとき, 定理 2 の可解条件はつぎの 4 つの LMI を満たす $X > 0, Y_U > 0, M, N$ の存在性と等価となる.

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_2M + M^TB_2^T + B_1B_1^T \\ C_1X + D_{12}M \\ XC_1^T + M^TD_{12}^T \\ -I \end{bmatrix} < 0 \quad (72)$$

$$\begin{bmatrix} Y_U A_U + A_U^T Y_U + NC_{2U} + C_{2U}^T N^T + C_{1U}^T C_{1U} \\ B_{1U}^T Y_U + D_{21}^T N^T \\ Y_U B_{1U} + ND_{21} \\ -I \end{bmatrix} < 0 \quad (73)$$

$$\left[\alpha_{kl} \begin{pmatrix} X & U_1^\dagger \\ (U_1^\dagger)^T & Y_U \end{pmatrix} + \beta_{kl} \Xi + \beta_{lk} \Xi^T \right]_{1 \leq k, l \leq m} < 0 \quad (74)$$

$$\begin{bmatrix} X & U_1^\dagger \\ (U_1^\dagger)^T & Y_U \end{bmatrix} > 0 \quad (75)$$

ただし,

$$\Xi = \begin{bmatrix} AX + B_2M \\ - \left(C_{1U}^T C_1 X + Y_U B_{1U} B_1^T + C_{1U}^T D_{12} M \right) \\ \quad + ND_{21} B_1^T + (AU_1^\dagger)^T \\ AU_1^\dagger \\ Y_U A_U + NC_{2U} \end{bmatrix} \quad (76)$$

(証明) (34) 式において $M := FX$ とおき整理し, schur 補題を用いることで (72) 式を得る. 同様に (36) 式を (71) 式を用いて整理すれば (73) 式が得られる. また (74) 式は (71) 式を用いて (38) 式を整理すれば容易に得られる. (75) 式は (40) 式と等価な $X - U_1^\dagger \{ (U_1^\dagger)^T Y_U U_1^\dagger \}^{-1} (U_1^\dagger)^T > 0$ の schur 補題から得られる. ■

以上の LMI が可解である場合, 極配置型拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御器はつぎに示す手順で求められる.

Step1 (70) 式を満たす U_0 を求め, $\text{Im}U_1^T = \text{Ker}U_0$ から U_1 を計算する. また, (70) 式から U_L を求める.

Step2 (72)~(75) 式を満たす $X > 0, Y_U > 0, M, N$ を LMI の Feasibility Problem を用いて解く.

Step3 求めた X, Y_U, M, N から, (34)~(40) 式を満たす $F, L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_0), Y$ は

$$Y = U_1^T Y_U U_1, \quad F = MX^{-1} \quad (77)$$

$$L = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_L \\ Y_U^{-1} N \end{bmatrix} \quad (78)$$

として求められる.

Step4 極配置拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御器の 1 つは X および **Step3** で求めた F, L, Y と (42) 式から計算できる Z を用いて, 定理 2 の 2. から計算できる.

4. 振動絶縁制御系設計への応用

4.1 制御対象

以下では, 極配置拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の LMI 解法をアクティブ振

動絶縁制御系の設計に応用した例を示す. 制御対象は **Fig. 3, 4** に示される振動絶縁実験装置とする. この装置は回転型の 2 自由度バネ, マス振動系であり, J_1 下部に取り付けられたモータ d から加えられる振動外乱を J_1 に内蔵された制御用モータ f によって J_2 に伝達しないようアクティブ制御を行なう. 振動外乱としては, 周波数を 3[Hz] の強制振動外乱と設定した. また, フィードバック制御入力 $f = K(s)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$ とし, ロータリエンコーダにより検出した各イナーシャの回転角を数値微分することにより相対速度 $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2$ を求める. リアルタイム制御系は PC とカウンタボード, D/A ボードを用いて構築し, サンプリング周期 10[ms] のデジタル制御系とした. 制御器は双一次変換により離散化し実装した.

この制御対象に対する制御系設計目標を以下とした. 文献²⁾の手法では 2 次共振モード (9.13[Hz]) に十分な減衰比を付加できなかったため, ここでは LMI 解法を用いて閉ループ極の減衰比を指定して共振減衰性の改善を図る.

制御系設計目標

- (1) 0.65[Hz] と 9.13[Hz] の共振モードに適当な減衰比を付加する.
- (2) 3[Hz] の単一周波数外乱 d を θ_2 に伝達させない.
- (3) 虚軸近傍の閉ループ極を回避する.

Fig. 3 Experimental system

Fig. 4 Bode plot of controlled system

4.2 制御器の設計手順

[拡大系の設定] まず, **Fig. 5** に示す拡大系を設定する. $W_r(s), W_n(s)$ は周波数重みであり, ε は拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 問題を可解とするために導入したスカラー重みである. これは文献²⁾で用いたものと同様である. 振動絶縁性能は d から z_1 の閉ループ系伝達関数に対応するので, 外乱周波数でピークを

もたせた $W_n(s)$ によって周波数整形を行なう。このとき、 $W_n(s)$ は指定する安定領域外の固有値（虚軸近傍，小さい減衰比）をもつため，標準 $\mathcal{H}_\infty$ 制御では可解とならないことに注意しておく。実際の設計に用いた重み関数は，文献²⁾と同様である。ゲイン線図を Fig. 6 に示す。ここで，Fig. 5 の拡大系は，拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の前提条件 A'), B'), C') を満たす²⁾。また， $B_1 D_{21}^\dagger = 0$ より $A - B_1 D_{21}^\dagger C_2$ のすべてのモードは $(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2, B_1 D_{21}^\dagger)$ の不可制御モードとなるので，拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御器 K は存在する^{7), 8)}。

Fig. 5 Augmented system

Fig. 6 Gain plot of weighting functions

[零点ベクトルの計算] つぎに，零点ベクトル U_0, U_L を求める。まず，一般化プラントを変換行列 T で対角変換し

$$U_0(T^{-1}AT) + U_L(C_2T) = A_{pz}U_0 \quad (79)$$

$$U_0(T^{-1}B_1) + U_LD_{21} = 0 \quad (80)$$

を満たす U_0 を求める。そのため，まず (80) 式より

$$U_L = -U_0T^{-1}B_1D_{21}^\dagger \quad (81)$$

となるので，(79) 式に代入すると文献²⁾の (29)，(30) 式と同様にして

$$U_0 := \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \quad (82)$$

が得られる。 U_L は求めた U_0 を (81) 式に代入すれば計算できる。

[極配置領域の指定] 制御系設計目標に従い極配置領域の指定を行なう。これは (5) 式のパラメータ α_{kl}, β_{kl} により指定できる。ここでは減衰比を保証する極配置領域 (Fig. 7) を指定する。減衰比を指定する場合，(6) 式は $\alpha_{kl} = 0$ ($k, l = 1, 2$)， $\beta_{11} = \beta_{22} = \sin \phi$ ， $\beta_{12} = \cos \phi$ ， $\beta_{21} = -\cos \phi$ となる。ここで，減衰比パラメータは $\phi = \pi/2.25$ と指定した。

4.3 設計結果

以上の設定の下で，系 1 の LMI について Feasibility Problem を解いた。結果は Feasible となり，求まった X, Y, F, L から制御器 $K(s)$ を得た。この制御器による振動絶縁性能を表す閉ループ系の周波数応答とイナーシャ J_2 の振幅 θ_2 の実験結果の時間応答を Fig. 8, Fig. 9 に示す。比較対象（破線）は文献²⁾で得られた，安定度のみを指定した制御器の応答である。それぞれの図から，外乱周波数 3[Hz] で効果的な振動絶縁性能を得られていることが確認できる。また，Fig. 8 より，提案方法（太実線）は，文献²⁾の方法（破線）と比較して 3[Hz] 以上の周波数帯域においてほとんど差異が無い。よって，ロバスト安定性についての差異はほとんど無いことが確認できる。つぎに，Fig. 10 に文献²⁾の制御器，Fig. 11 に LMI 解法を用いて求めた制御器による閉ループ極マップを示す。文献²⁾の制御器では 2 次共振モードに対応する極（矢印）の減衰比が悪いが，LMI 解法によって得られた制御器は十分な減衰比（約 0.35~0.5）を付加できていることが確認できる。以上の検証結果により本論文で示した LMI 解法の有効性を確認できた。また，Fig. 11 の最も虚軸近傍の極は 0.38 であるが，より大きい安定度を指定したい場合は (6) 式の LMI に安定度を指定する項を加えることもできる。このように極配置に関する仕様を同時にいくつでも指定出来る点も，LMI 解法を用いる大きなメリットとなっている。

Fig. 7 Pole placement region

5. おわりに

本論文では，極配置制約を課した拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の可解条件と制御器の LMI 解法を導出した。さらに，応用例としてアクティブ振動絶縁制御系の設計例を通して，設計方法とその効果を示した。この手法は重み極による極配置制約を受けないため，自由度の高い極設定が行なえる。そのため，ほかの種々のシステムの制御系設計にも応用可能であると期待できる。校閲者の方々には有益なコメントをいただきました。記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 千田，石原，翁，古川，大富：狭帯域周波数外乱に対するアクティブ振動絶縁制御，日本機械学会論文集 C 編，71-705，1537/1543，(2005)
- 2) 千田，石原，大富：拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御による狭帯域周波数外乱の振動絶縁制御，システム制御情報学会論文誌，18-7，261/267，

Fig. 8 Gain plot of vibration isolation performance (RSA:Robust Stability Assignment)

Fig. 9 Time response of vibration isolation performance (RSA:Robust Stability Assignment)

Fig. 10 Pole map (Extended $\mathcal{H}_\infty$ with RSA ²⁾)

Fig. 11 Pole map (LMI extended $\mathcal{H}_\infty$)

- (2005)
- 3) 大築, 植松, 中村, 千田, 古川, 大富, 岡村: セントリフュージロータ振動絶縁系の同定と制御, 計測自動制御学会第1回制御部門大会予稿集, 75/76 (2001)
 - 4) M. Chilali and P. Gahinet: $\mathcal{H}_\infty$ Design with Pole Placement Constraints: an LMI Approach, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, **41**-3, 358/367 (1996)
 - 5) 岩崎徹也: LMI と制御, 昭晃堂 (1997)
 - 6) 平田, 佐藤, 劉, 美多: リカッチ不等式を用いた拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の可解条件の導出, 計測自動制御学会論文集, **34**-7, 741/748, (1998)
 - 7) K.Z. Liu, M. Hirata and T. Sato: All Solutions to the $\mathcal{H}_\infty$ Control Synthesis Problem with Unstable Weights, *Proc. of the 36th IEEE CDC San Diego, Ca.* Dec 1997, 4641/4646 (1997)
 - 8) 美多, 忻欣, 富山, B.D.O.Anderson: 拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御 - $\mathcal{H}_\infty$ サーボ問題と推定問題の統一的解法 -, 計測自動制御学会論文集, **33**-7, 654/664 (1997)
 - 9) 美多 勉: $\mathcal{H}_\infty$ 制御, 昭晃堂 (1994)

[著者紹介]

石原 義之 (正会員)

2005年信州大学工学系研究科博士前期課程修了。同年(株)東芝入社。アクティブ振動制御に関する研究に興味を持つ。

千田 有一 (正会員)

1990年千葉大学大学院自然科学研究科博士課程修了。同年(株)東芝入社, 総合研究所, 研究開発センターにて制御理論と制御応用に関する研究に従事。94年7月~97年3月東京工業大学情報理工学研究科科学研究科客員助教授。2002年信州大学工学部助教授となり現在に至る。制御理論とその応用, ロバスト制御, 振動制御, FDIなどの研究に従事。システム制御情報学会, 日本機械学会, IEEEなどの会員。(学術博士)