多項式計画による飽和系の局所安定解析

杉 江 俊 治*・植 田 克 樹*,**

Local Stability Analysis of Saturating Systems via Polynomial Programming

Toshiharu SUGIE* and Katsuki UEDA*,**

This paper considers local stability analysis of the systems with input saturation via polynomial programming. First, describing the saturated inputs in terms of logic variables, we derive a local stability condition with the aid of generalized S-procedure of polynomials with higher degree of freedom. Then, we obtain a Lyapunov function using Sum of Squares decomposition, which specifies the region of attraction. Moreover, it is shown that the method can be easily extended to the case where piecewise quadratic Lyapunov functions are adopted. Finally we demonstrate its effectiveness through numerical examples.

Key Words: stability analysis, saturation, sum of squares, numerical optimization, S-Procedure

1. はじめに

現実の制御系には入力制約が存在することが多いが、これを考慮せずに制御系を設計した場合、ワインドアップ現象が起こったり¹⁾、制御系が不安定化することがある。よって入力制約を陽に考慮した制御系の解析・設計法が重要となる。

飽和系における漸近安定領域の解析はその基本的な問題の一つである。従来より飽和要素をセクタ有界な不確かさ²⁾とみなして漸近安定領域を求める手法が提案され、円板条件などの利用が広く研究されてきた^{2), 3)}。しかし円板条件は保守性が大きく、漸近安定領域は実際より狭くなる。またこれをアンチワインドアップ補償器の設計に適用して得られる漸近安定領域は線形解析による補償器によるものと同じであることが指摘されている⁴⁾。そこで飽和をセクタ有界な不確かさと近似せず、より特性を考慮した解析・設計法が望まれて来た。

Hu 等は円板条件より保守性が低くなり得る局所安定条件を提案し⁵⁾、これを LMI(線形行列不等式)を用いた数値最適化問題として扱う手法を提案した。さらに Lyapunov 関数を 2 次形式に限り、飽和入力も 1 入力である場合は、この手法で得られた漸近安定領域に対して局所安定条件が必要十分条件であることを示した⁶⁾が、多入力系の場合は必要性はいえない⁷⁾。ほかに区分的 2 次 Lyapunov 関数を用いたり^{8), 9)}、

飽和を等式制約を用いて扱う^{10), 11)}ことでより保守性が小さい漸近安定領域を与える局所安定条件が提案されている。しかし、さらに保守性を改善できる余地がある。

一方、制御系の種々の問題を多項式計画問題として記述しその非負制約に二乗和分解^{12)~14)}を適用する手法が提案されている^{15)~17)}。飽和系の局所安定条件が既存の手法では LMI で記述されており^{8)~11)}、多項式を用いてより必要十分条件に近い条件が得られる可能性がある。

本論文の目的は、多項式計画問題の枠組みを用いることにより、飽和系における局所安定条件の保守性改善の可能性を検討することにある。具体的には、自由度の高い S-Procedure として安定解析問題を定式化し、漸近安定領域を二乗和分解を用いて求める手法を提案し、数値例の実際検討により、その可能性について考察する。

本文では以下の記号を用いる。 $\mathbf{R}[x]$ を $x \in \mathbf{R}^n$ の各要素を変数とするスカラー多項式の集合、 $\deg(f)$ を $f \in \mathbf{R}[x]$ の最高次数とする。たとえば、 $x = [x_1, x_2]^T$ のとき $f(x) = 2x_1^3 + x_1^2x_2^3 + 5x_1x_2^2 + 3x_2$ なる 2 変数多項式は $f \in \mathbf{R}[x]$ であり、 $\deg(f) = 5$ となる。また、Lyapunov 関数 $V(x)$ および正数 γ が与えられたとき、レベルセットを $\Xi(V, \gamma) := \{x \in \mathbf{R}^n \mid V(x) \leq \gamma\}$ と表わす。さらに、スカラー q に対して飽和関数 $\sigma(q)$ を次式で定義する。

$$\sigma(q) := \begin{cases} 1 & , q > 1 \\ q & , -1 \leq q \leq 1 \\ -1 & , q < -1 \end{cases}$$

2. 数学的準備

本章では本研究の前提となる事項および定理を紹介する。

* 京都大学情報学研究科 宇治市五ヶ庄

** (株) 東芝デジタルメディアネットワーク社 青梅市

* Graduate School of Informatics, Kyoto University, Uji, Kyoto

** Toshiba Corporation, Digital Media Network Company, Oume

(Received September 8, 2005)

(Revised April 17, 2006)

前半ではパラメータ依存多項式計画問題とこれを効率良く扱う二乗和分解の技術的背景¹³⁾を説明し、後半では飽和系の局所安定条件を導く基礎となる定理を紹介する。

2.1 多項式計画問題

既知の $c \in \mathbf{R}^m$ と係数に未知パラメータ $p \in \mathbf{R}^{\bar{m}}$ をアフィンに含む多項式 $f_1(p), \dots, f_r(p) \in \mathbf{R}[\bar{x}]$ ($\bar{x} \in \mathbf{R}^{\bar{n}}$) が与えられたとき、つぎのパラメトリックな多項式計画問題を考える。

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbf{R}^{\bar{m}}} c^T p \\ \text{subject to } f_k(\bar{x}, p) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \quad (k=1, \dots, r) \end{aligned}$$

すなわち、 $\bar{x}$ の r 個の多項式 $\{f_1(p), \dots, f_r(p)\}$ が任意の $\bar{x}$ に対してすべて非負になるような p の内、目的関数 $c^T p$ の最小値とそれを与える p を求める問題である。

本研究では飽和系の局所安定条件を Lyapunov 関数の係数やマルチプライアの各要素を未知パラメータとした多項式計画問題として定式化することを考える。

2.2 非負多項式と二乗和緩和

$2r$ 次の多項式 $f \in \mathbf{R}[\bar{x}]$ が任意の $\bar{x} \in \mathbf{R}^{\bar{n}}$ に対して $f(\bar{x}) \geq 0$ を満足するとき、 $f(\bar{x})$ は非負であるという。一方 $f(\bar{x})$ が高々 r 次の有限個の $\bar{n}$ 変数多項式 $g_1(\bar{x}), \dots, g_L(\bar{x})$ の二乗の総和

$$f(\bar{x}) = \sum_{l=1}^L g_l(\bar{x})^2$$

のように表わされるとき、 $f(\bar{x})$ を二乗和 (Sum of Squares, SOS) 多項式という。本稿では $\Sigma[\bar{x}]$ を $\bar{x} \in \mathbf{R}^{\bar{n}}$ の各要素を変数とする $\bar{n}$ 変数二乗和多項式の集合とする。

非負多項式の集合と $\Sigma[\bar{x}]$ は厳密には一致しないため後者は前者の十分条件ではあるが、 $f(\bar{x}) \notin \Sigma[\bar{x}]$ となるような非負多項式は稀であることから両者を等価であるとみなすことが多い。これを二乗和緩和 (SOS Relaxation) という¹³⁾。

2.3 二乗和分解の半正定値計画への変換

前節の二乗和緩和に基づいて非負多項式を二乗和多項式に変形する二乗和分解は半正定値計画問題に帰着できる。今、 $2r$ 次非負多項式 $f(\bar{x}) \geq 0$ が与えられたとする。このとき、これが 1 および $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{\bar{n}}$ やその積からなる高々 r 次の単項式を各要素としてもつベクトル $v(\bar{x})$ と未知パラメータ p をアフィンに含む対称行列 $M(p)$ を用いてつぎのように表わされるとする。

$$f(\bar{x}) = v(\bar{x})^T M(p) v(\bar{x}) \quad (1)$$

未知パラメータ p が (1) 式の両辺を展開し係数比較して得られる等式制約と半正定値制約 $M(p) = M_L(p)^T M_L(p) \geq 0$ を満足すれば、 $M_L(p) v(\bar{x}) =: [g_1(\bar{x}) \cdots g_L(\bar{x})]^T$ とおくことにより

$$f(\bar{x}) = \sum_{l=1}^L g_l(\bar{x})^2 \in \Sigma[\bar{x}]$$

を得る。すなわち、 $f(\bar{x})$ の二乗和分解を求める問題が、 $M(p) \geq 0$ を満足する p を見つける半正定値計画問題に帰着される。パラメトリックな多項式 $f(\bar{x}, p)$ が非負になるような p を求めることも、全く同様にしてできる。

(注) ツールボックス SOSTOOLS を用いれば、多項式計画問題を (その非負制約に二乗和緩和を行なうことで) 半正定値計画問題に変換して、(i) 目的関数の最小値を求める、(ii) 制約式に含まれるアフィンなパラメータを解くことで未知多項式や二乗和多項式を求める、などが可能である。なお SOSTOOLS は半正定値計画問題を解くためにツールボックス SeDuMi を用いている。この詳細については文献¹²⁾を参照されたい。

2.4 二乗和多項式を用いた S-Procedure

つぎに、飽和系の局所安定条件を導くための基礎となる結果を定理の形で示しておく。その構造は S-Procedure を一般化したものとなっている。

《定理 1》 多項式 $f_0, \dots, f_k, h_1, \dots, h_u \in \mathbf{R}[\bar{x}]$ および $g_0 := \epsilon \bar{x}^T \bar{x} (\epsilon > 0)$ が与えられたとする。このとき、

$$\begin{aligned} s_0(\bar{x}) f_0(\bar{x}) - \sum_{k=1}^r s_k(\bar{x}) f_k(\bar{x}) - \sum_{l=1}^u t_l(\bar{x}) h_l(\bar{x}) \\ - g_0^2(\bar{x}) \in \Sigma[\bar{x}] \end{aligned} \quad (2)$$

を満足する $\{s_k\}_{k=0}^r \in \Sigma[\bar{x}]$ と $\{t_l\}_{l=1}^u \in \mathbf{R}[\bar{x}]$ が存在するならば、次式の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \bigcap_{k=1}^r \{\bar{x} \in \mathbf{R}^{\bar{n}} \mid f_k(\bar{x}) \geq 0\} \setminus \{0\} \subseteq \{\bar{x} \in \mathbf{R}^{\bar{n}} \mid f_0(\bar{x}) > 0\} \\ \forall \bar{x} \text{ s.t. } h_l(\bar{x}) = 0 \quad (l=1, \dots, u) \end{aligned} \quad (3)$$

この結果は、条件付きの不等式関係を条件なしの不等式関係に変換する S-Procedure において、通常はマルチプライアとして非負定数を用いるのに対して、これを二乗和多項式に拡張して自由度を高めたものとなっている。定理を証明するためにつぎの代数幾何学による補題を準備しておく。

[補題 1] (Positivstellensatz; P-Satz^{14), 15)}

多項式 $\{f_1, \dots, f_r\}, \{g_1, \dots, g_t\}, \{h_1, \dots, h_u\} \in \mathbf{R}[\bar{x}]$, $\bar{x} \in \mathbf{R}^{\bar{n}}$ が与えられたとき、つぎの条件 a), b) は等価である。

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \left\{ \bar{x} \in \mathbf{R}^{\bar{n}} \mid \begin{array}{l} f_1(\bar{x}) \geq 0, \dots, f_r(\bar{x}) \geq 0 \\ g_1(\bar{x}) \neq 0, \dots, g_t(\bar{x}) \neq 0 \\ h_1(\bar{x}) = 0, \dots, h_u(\bar{x}) = 0 \end{array} \right\} = \emptyset \\ \text{b)} \quad f + g^2 + h = 0 \text{ を満たす多項式 } f \in \mathcal{P}(f_1, \dots, f_r), \\ g \in \mathcal{M}(g_1, \dots, g_t), h \in \mathcal{I}(h_1, \dots, h_u) \text{ が存在する.} \end{aligned}$$

ここで有限な非負整数の集合 $\mathbf{Z}_+$ に対して

$$\mathcal{M}(g_1, \dots, g_t) := \begin{cases} 1, & t=0 \\ \prod_{k=1}^t g_k^{m(k)}(\bar{x}), & t \neq 0, m(k) \in \mathbf{Z}_+ \end{cases}$$

は $\{g_1, \dots, g_t\}$ から生成される Multiplicative Monoid,

$$\mathcal{P}(f_1, \dots, f_r) := \left\{ s_0 + \sum_{i=1}^l s_i b_i \mid \begin{array}{l} l \in \mathbf{Z}_+, s_i \in \Sigma[\bar{x}] \\ b_i \in \mathcal{M}(f_1, \dots, f_r) \end{array} \right\}$$

は $\{f_1, \dots, f_r\}$ から生成される錐,

$$\mathcal{I}(h_1, \dots, h_u) := \left\{ \sum_{l=1}^u h_l p_l \mid p_l \in \mathbf{R}[\bar{x}] \right\}$$

は $\{h_1, \dots, h_u\} \in \mathbf{R}[\bar{x}]$ のイデアルである. $\square$

これは, 二乗和分解アプローチでは基本となる補題として知られている.

(定理 1 の証明) (3) 式を補題 1 の条件 a) の構造に書き換えると, つぎの等価な集合関係が得られる.

$$\left\{ \bar{x} \in \mathbf{R}^{\bar{n}} \mid \begin{array}{l} f_1(\bar{x}) \geq 0, \dots, f_r(\bar{x}) \geq 0 \\ -f_0(\bar{x}) \geq 0, g_0(\bar{x}) \neq 0 \\ h_1(\bar{x}) = 0, \dots, h_u(\bar{x}) = 0 \end{array} \right\} = \emptyset \quad (4)$$

ただし, $g_0(\bar{x}) \neq 0$ は $\bar{x} \neq 0$ と等価であることを利用している. (2) 式の左辺を $Q(\bar{x})$ と定義すると, $Q(\bar{x}) \in \Sigma[\bar{x}]$ である. ここで f, g , および h を

$$f := Q(\bar{x}) - f_0(\bar{x})s_0(\bar{x}) + \sum_{k=1}^r f_k(\bar{x})s_k(\bar{x})$$

$$\in \mathcal{P}(f_1(\bar{x}), \dots, f_r(\bar{x}), -f_0(\bar{x}))$$

$$g := g_0(\bar{x}) \in \mathcal{M}(g_0(\bar{x}))$$

$$h := \sum_{l=1}^u t_l(\bar{x})h_l(\bar{x}) \in \mathcal{I}(h_1(\bar{x}), \dots, h_u(\bar{x}))$$

とおくと $f+g^2+h=0$ が成り立つ. よって補題 1 より (4) 式が成立する. これは (3) 式に等価であったので, 定理が証明された. $\square$

また, 本稿ではつぎの S-Procedure も用いる.

[系 1] $\{f_k\}_{k=0}^r \in \mathbf{R}[\bar{x}]$ が与えられたとする. このとき,

$$f_0(\bar{x}) - \sum_{k=1}^r s_k(\bar{x})f_k(\bar{x}) \in \Sigma[\bar{x}] \quad (5)$$

を満たす $\{s_k\}_{k=1}^r \in \Sigma[\bar{x}]$ が存在すれば, 包含関係

$$\bigcap_{k=1}^r \{\bar{x} \in \mathbf{R}^{\bar{n}} \mid f_k(\bar{x}) \geq 0\} \subseteq \{\bar{x} \in \mathbf{R}^{\bar{n}} \mid f_0(\bar{x}) \geq 0\} \quad (6)$$

が成り立つ. $\square$

(証明) 定理 1 において, h_l, g_0 など規定される等式制約, 非零制約がない場合なので, まったく同様に示せる. $\square$

本稿では (3) 式の構造で表わした飽和系の原点近傍の局所安定の十分条件を (2) 式の形で, (6) 式で表わしたリアプノフ関数のクラスを規定する条件を (5) 式の形で定式化し, これを多項式計画問題として扱うことを考える.

3. 対象システムの記述と問題設定

Fig. 1 に示す閉ループ系を考察対象とする. G は線形時不変システム, $\sigma(z) \in \mathbf{R}^m$ はその各要素が 1 に正規化された飽和要素からなるベクトルであり, 各要素は $\sigma_i(z) = \sigma(z_i)$ ($i = 1, \dots, m$) を満たす. $x \in \mathbf{R}^n$ は G の状態, $u \in \mathbf{R}^m$ は入力, $z \in \mathbf{R}^m$ は出力である.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} G : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) = Cx(t) \\ u(t) = \sigma(z(t)) \end{cases} \end{cases}$$

Fig. 1 Closed loop system with saturation

本論文の目的は飽和要素の特性を考慮して, つぎの問題に対する保守性の低い解を与えることである.

【問題 1】 Fig. 1 の閉ループ系に対して状態軌道が $x(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) を満足する $x(0)$ の集合を求めよ. $\square$

4. 局所安定条件

本章では飽和要素の特性を論理変数を用いて記述する方法と Fig. 1 の閉ループ系の $x = 0$ 近傍の局所安定条件を示す.

4.1 入力飽和への論理変数の導入

飽和入力 $u := [u_1 \dots u_m]^T$ の各要素は

$$u_i := \begin{cases} -1 & , C_i x < -1 \\ C_i x & , |C_i x| \leq 1 \\ 1 & , C_i x > 1 \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m)$$

となる. 場合分けされている各入力 u_i ($i = 1, \dots, m$) を, $C_i x$ と $1, -1$ との大小関係を記述する論理変数 $\alpha := [\alpha_1 \dots \alpha_m]^T$, $\beta := [\beta_1 \dots \beta_m]^T$ を導入して, 論理整数混合多項式¹⁸⁾として記述する. α_i, β_i ($i = 1, \dots, m$) は $C_i x$ の値によって ± 1 の値を取るように次式で規定される.

$$\alpha_i(C_i x - 1) \geq 0, (\alpha_i + 1)(\alpha_i - 1) = 0$$

$$\beta_i(C_i x + 1) \geq 0, (\beta_i + 1)(\beta_i - 1) = 0$$

これを用いると

$$u_i = \begin{cases} 1 & , (\alpha_i, \beta_i) = (1, 1) \\ C_i x & , (\alpha_i, \beta_i) = (-1, 1) \\ -1 & , (\alpha_i, \beta_i) = (-1, -1) \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m)$$

となる. これより, 次式を得る.

$$u_i = -\frac{1}{4}(\alpha_i - 1)(\beta_i + 1)C_i x + \frac{1}{4}(\alpha_i + 1)(\beta_i + 1) - \frac{1}{4}(\alpha_i - 1)(\beta_i - 1) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (7)$$

円板条件では飽和入力をセクタ有界な不確かさとしてモデル化してポリトープとして記述しているが, 本稿では論理変数を導入することで飽和入力の値が $C_i x$ の値によって変化する特性を等式で厳密に記述している.

4.2 2次 Lyapunov 関数を用いる場合

本節では Lyapunov 関数のクラスを

$$V(x) = x^T P x$$

とおき、このレベルセット $\Xi(V, 1)$ が漸近安定領域となる条件を記す。ここで閉ループ系に対して、あらかじめ局所安定性を示す Lyapunov 関数 $V_0(x)$ が与えられており、そのレベルセット $\Xi(V_0, 1)$ も漸近安定領域であるとする。

《定理 2》 つぎの 3 式を満足する $V \in \mathbf{R}[x]$, $s_0, \dots, s_{1+2m} \in \Sigma[\bar{x}]$, $\bar{x} := [x^T, \alpha^T, \beta^T]^T$, $t_1, \dots, t_{2m} \in \mathbf{R}[\bar{x}]$, $s_{2+2m} \in \Sigma[x]$ が存在するとき、 $x(0) \in \Xi(V, 1)$ ならば $x(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で原点に収束する。

$$V - l_1 \in \Sigma[x] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & -s_0 \frac{\partial V}{\partial x} (Ax + Bu) - s_1(1 - V) \\ & - \sum_{i=1}^m \{ \alpha_i (C_i x - 1) s_{1+i} + \beta_i (C_i x + 1) s_{1+m+i} \} \\ & - \sum_{i=1}^m \{ (\alpha_i^2 - 1) t_i + (\beta_i^2 - 1) t_{i+m} \} - l_2^2 \in \Sigma[\bar{x}] \quad (9) \end{aligned}$$

$$(1 - V) - (1 - V_0) s_{2+2m} \in \Sigma[x] \quad (10)$$

ただし $l_1 := \epsilon_1 x^T x$, $l_2 := \epsilon_2 x^T x$ であり $u = [u_1 \dots u_m]^T$ には (7) 式が代入されているとする。□

ここで、(8), (9) 式が局所安定条件であり、(10) 式は問題を解いて得られる漸近安定領域が $\Xi(V_0, 1)$ より広がることを規定した条件である。

(証明) まず、Lyapunov 関数候補の構造から明らかに $V(0) = 0$ である。そして、(8) 式が成り立つとき、 $l_1 := \epsilon_1 x^T x$ は $x = 0$ 以外では 0 にならないことに注意すれば、 $V(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ を得る。すなわち、 V の正定性が成り立つ。

つぎに、正定な $V(x)$ に対して、 $\dot{V} < 0, \forall x \in \Xi(V, 1) \setminus \{0\}$ が成り立てば良いが、これは次式で表現される。

$$\begin{aligned} & \Xi(V, 1) \setminus \{0\} \\ & \cap \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbf{R}^n \\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}^m \end{array} \left| \begin{array}{l} \alpha_i (C_i x - 1) \geq 0, \alpha_i^2 - 1 = 0 \\ \beta_i (C_i x + 1) \geq 0, \beta_i^2 - 1 = 0 \\ (i = 1, \dots, m) \end{array} \right. \right\} \\ & \subseteq \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbf{R}^n \\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}^m \end{array} \left| \frac{\partial V}{\partial x} (Ax + Bu) < 0, (7) \text{ 式} \right. \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

上式は飽和特性に従った上で軌道 $x(t)$ が Lyapunov 関数のレベルセット $\Xi(V, 1)$ において Lyapunov 安定性を満足することを意味する。各 i に対して

$$f_0(\bar{x}) := -\frac{\partial V}{\partial x} (Ax + Bu)$$

$$f_1(\bar{x}) := 1 - V(x)$$

$$f_{1+i}(\bar{x}) := \alpha_i (C_i x - 1)$$

$$f_{m+1+i}(\bar{x}) := \beta_i (C_i x + 1)$$

$$h_i(\bar{x}) := \alpha_i^2 - 1$$

$$h_{m+i}(\bar{x}) := \beta_i^2 - 1$$

$$l(\bar{x}) := l_2(x)$$

と定義して定理 1 の (2) 式の構造をそのまま使うと、(11) 式が成り立つための十分条件として (9) 式が得られる。

さらに、既知の Lyapunov 関数 V_0 と未知の Lyapunov 関数 V のレベルセットの包含関係が

$$\Xi(V_0, 1) \subseteq \Xi(V, 1)$$

満たせばよい。 $1 - V(x)$ を $f_0(\bar{x})$ に、 $1 - V_0(x)$ を $f_1(\bar{x})$ に対応させて系 1 を適用すれば、この十分条件として (10) 式を得る。以上で定理が証明された。□

以上の結果より、問題 1 の解を得る一つの方法はつぎの問題 2 を解くことになる。

【問題 2】 (8), (9), (10) 式の制約のもとで、

$$\min_{P, s_0, \dots, s_{2+2m}, t_1, \dots, t_{2m}} \text{trace} P$$

を求めよ。□

なお、上記問題を解くためにあらかじめ ϵ_1, ϵ_2 を小さな正定数として設定しておく必要があるが、それぞれを V の 2 次項の係数の $1/100$, $1/10$ 程度の大きさを選ぶことが一つの目安としてあげられる。

4.3 アルゴリズム

この問題 2 は (9) 式に未知多項式同士の積が含まれるので凸問題にはならない。そのような項は一方の変数を固定しながら各二乗和制約に二乗和分解を適用することで半正定値計画問題に帰着することにする。以下に漸近安定領域を与えるアルゴリズムの一例を示す。

【アルゴリズム 1】

初期化: 初期 Lyapunov 関数 $V_0 \in \mathbf{R}[x]$ を選択する。

step 1: $V = V_0$ に対して (9) 式を満足する $s_0, \dots, s_{1+2m}, t_1, \dots, t_{2m}$ を求める。解けなければ V_0 の選択が不適切であると判断して初期化に戻る。

step 2: $V = V_0$ と step 1 で求めた s_0, s_1 に対して (8) ~ (9) 式を満足し、かつ目的関数 $\text{trace} P$ を最小化する $s_2, \dots, s_{2+2m}, t_1, \dots, t_{2m}, V = x^T P x$ を求め、 $\Xi(V, 1)$ を漸近安定領域とする。□

初期化において V_0 に円板条件から得たリアプノフ関数を用いると step 1 において $s_0, \dots, s_{1+2m}, t_1, \dots, t_{2m}$ が得られることを数値例などで確認している。各ステップで多項式計画問題を扱うが、先に述べたように、これはその二乗和制約に二乗和分解^{13), 14)}を適用することで半正定値計画問題に帰着される。

なお、文献¹⁷⁾ではより一般的なハイブリッド系の安定性を二乗和分解を用いて解析しているが、大域的安定性を判別するための十分条件を与えているにすぎず、飽和系の漸近安定領域を求めることには役立たない。本論文では、飽和系の特徴を十分に捉えて、局所安定条件の保守性改善を可能にする手法を与えるものであり立場が異なる。

5. 区分的 2 次 Lyapunov 関数

本節では上記の結果を区分的 2 次 Lyapunov 関数^{8),9)}の場合に拡張する. 簡単のため, Fig.1 の G が単入力単出力システムの場合に話を限る. 区分的 2 次 Lyapunov 関数とは負飽和, 線形制御, 正飽和の各領域

$$X_N := \{x \in \mathbf{R}^n \mid Cx \leq -1\}$$

$$X_L := \{x \in \mathbf{R}^n \mid -1 \leq Cx \leq 1\}$$

$$X_P := \{x \in \mathbf{R}^n \mid Cx \geq 1\}$$

で定義が異なる Lyapunov 関数である. これらを V_N, V_L, V_P とし, それぞれ領域 X_N, X_L, X_P において正定であるとする. これらは各領域の境界上で連続であるから, $V_N - V_L$ と $V_P - V_L$ は $Cx + 1, Cx - 1$ を因数に含む. したがってある V_L に対して次式を得る.

$$V = \frac{1}{4}\{(\alpha - 1)(\beta - 1)V_N - (\alpha - 1)(\beta + 1)V_L + (\alpha + 1)(\beta + 1)V_P\} \quad (12)$$

$$V_N = V_L + (Cx + 1)v_{NL}(x), \quad v_{NL}(x) \in \mathbf{R}[x] \quad (13)$$

$$V_P = V_L + (Cx - 1)v_{PL}(x), \quad v_{PL}(x) \in \mathbf{R}[x] \quad (14)$$

また, ここでは 2 次 Lyapunov 関数を用いるため, $\deg(v_{NL}) = \deg(v_{PL}) = 1$ の範囲で探すものとする.

5.1 局所安定条件

各定義域 X_N, X_L, X_P において対応する Lyapunov 関数 V_N, V_L, V_P が正定となるほかに 4.2 節と同様に考えれば良い. なお, 以下では求める漸近安定領域がある $\gamma > 0$ と (12) 式で定義した正定な V から定まるレベルセット $\Xi(V, \gamma)$ とする.

〈定理 3〉 つぎの 7 式を満足する $V_L(x) = x^T P_L x$, $v_{NL}, v_{PL} \in \mathbf{R}[x]$, $s_{N0}, s_{N1}, s_{L0}, s_{L1}, s_{P0}, s_{P1}, s_{CN1}, s_{CN2}, s_{CL1}, s_{CL2}, s_{CP1}, s_{CP2} \in \Sigma[x]$, $s_0, \dots, s_3 \in \Sigma[[x^T, \alpha, \beta]^T]$, $t_1, t_2 \in \mathbf{R}[[x^T, \alpha, \beta]^T]$ が存在するとき, $x(0) \in \Xi(V, 1)$ ならば $x(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で原点に収束する.

$$s_{L0}V_L + s_{L1}(Cx + 1)(Cx - 1) - l_1^2 \in \Sigma[x] \quad (15)$$

$$s_{N0}V_N + s_{N1}(Cx + 1) \in \Sigma[x] \quad (16)$$

$$s_{P0}V_P - s_{P1}(Cx - 1) \in \Sigma[x] \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & -s_0 \frac{\partial V}{\partial x}(Ax + Bu) - s_1(\gamma - V) \\ & -\alpha(Cx - 1)s_2 - \beta(Cx + 1)s_3 \\ & -(\alpha^2 - 1)t_1 - (\beta^2 - 1)t_2 - l_2^2 \in \Sigma[[x^T, \alpha, \beta]^T] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & (\gamma - V_L) - (\gamma - V_0)s_{CL1} + (Cx + 1)(Cx - 1)s_{CL2} \\ & \in \Sigma[x] \end{aligned} \quad (19)$$

$$(\gamma - V_N) - (\gamma - V_0)s_{CN1} + (Cx + 1)s_{CN2} \in \Sigma[x] \quad (20)$$

$$(\gamma - V_P) - (\gamma - V_0)s_{CP1} - (Cx - 1)s_{CP2} \in \Sigma[x] \quad (21)$$

ただし $u = u_1$ は (7) 式に, V は (12) 式に, V_N は (13) 式に, V_P は (14) 式にそれぞれ従っているとする. □

上記において, (15) ~ (18) 式が局所安定条件であり, (20) ~ (21) 式が求める漸近安定領域が V_0 によるものより広いことを規定した条件である.

(証明) Lyapunov 関数候補の構造とその定義域における正定性は次式で表現される.

$$V_L(x) > 0, \quad \forall x \in X_L \setminus \{0\}, V_L(0) = 0 \quad (22)$$

$$V_N(x) > 0, \quad \forall x \in X_N \quad (23)$$

$$V_P(x) > 0, \quad \forall x \in X_P \quad (24)$$

(22) 式を (3) 式の形で, (23) 式と (24) 式を (6) 式の形でそれぞれ表わすとつぎのようになる.

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbf{R}^n \mid -(Cx + 1)(Cx - 1) \geq 0\} \setminus \{0\} \\ & \subseteq \{x \in \mathbf{R}^n \mid V_L(x) > 0\} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid -(Cx + 1) \geq 0\} \subseteq \{x \in \mathbf{R}^n \mid V_N(x) \geq 0\} \quad (26)$$

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid Cx - 1 \geq 0\} \subseteq \{x \in \mathbf{R}^n \mid V_P(x) \geq 0\} \quad (27)$$

(25) 式において $f_0 := V_L$, $f_1 := -(Cx + 1)(Cx - 1)$, $g_0 := l_1 = \epsilon_1 x^T x$, $\epsilon_1 > 0$ と考えて (2) 式の構造に変換すると, 定理 1 より (15) 式がこれが成立するための十分条件であるとわかる. (26) 式においては $f_0 := V_N$, $f_1 := -(Cx + 1)$ として (5) 式の構造に変換して両辺から二乗和多項式を掛けると, 系 1 より, その十分条件として (16) 式を得る. (27) 式に対しても同様に (17) 式が十分条件となる.

つぎに正定な $V(x)$ が Lyapunov 関数となるには, $\dot{V} < 0$, $\forall x \in \Xi(V, 1) \setminus \{0\}$ が成り立てばよいが, これは次式で表現される.

$$\begin{aligned} & \Xi(V, \gamma) \setminus \{0\} \cap \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \begin{array}{l} \alpha(Cx - 1) \geq 0 \\ \alpha^2 - 1 = 0 \\ \beta(Cx + 1) \geq 0 \\ \beta^2 - 1 = 0 \end{array} \right\} \\ & \subseteq \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x}(Ax + Bu) < 0, \text{ (7) 式,} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

定理 2 と同様に考えると (18) 式を得る.

既知の Lyapunov 関数 V_0 と未知の Lyapunov 関数 V のレベルセットの包含関係は次式の様に書ける.

$$\Xi(V_0, \gamma) \subseteq \Xi(V_L, \gamma), \quad \forall x \in X_L$$

$$\Xi(V_0, \gamma) \subseteq \Xi(V_N, \gamma), \quad \forall x \in X_N$$

$$\Xi(V_0, \gamma) \subseteq \Xi(V_P, \gamma), \quad \forall x \in X_P$$

たとえば $\Xi(V_0, \gamma) \subseteq \Xi(V_L, \gamma)$ を満たすためには

$$(\gamma - V_L) - (\gamma - V_0)s_{CL1} \geq 0$$

がある $s_{CL1} \in \Sigma[x]$ に対して成り立てば十分である. 上式が領域 X_L において成り立つことは

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid -(Cx + 1)(Cx - 1) \geq 0\}$$

$$\subseteq \{x \in \mathbf{R}^n | (\gamma - V_L) - (\gamma - V_0)s_{CL1} \geq 0\} \quad (29)$$

と表現できる。系 1 より, (19) 式が成り立てば上の関係が成立する。(20), (21) 式も同様である。よって定理が証明された。□

この結果は, 二乗緩和を用いているものの, Lyapunov 関数のクラスが (2 次に限定した場合であっても) 参考文献^{8), 9)}より一般的であるので, 保守性の改善が期待される。ただし, 凸最適化問題とはならないので, 最適解を一意に求めることが一般にはできず, 従来法より常に改善されるという理論的保証はない。この点は今後の課題として残されている。以下では, 著者らの数値計算経験からよい結果が得られることが多いアルゴリズムを与えておく。

5.2 アルゴリズム

曲線 $\{x | V_N(x) = 1\}$ および $\{x | V_P(x) = 1\}$ は楕円のほかに放物線を描く場合がある。この場合, 目的関数に V_N, V_P の $x_i^2 (i = 1, \dots, n)$ の係数の和を加えて解いても, 放物線の開きが大きくなるだけで飽和領域における漸近安定領域が小さくなることもある。そこで $V_L = x^T P_L x$ とおいた場合, まず $\gamma = 1$ として $\text{trace} P_L$ を最小化することで $\Xi(V, 1)$ を最大化する問題を解き, つぎに得られた区分的 2 次 Lyapunov 関数 V を用いて, 領域 $\Xi(V, \gamma)$ の γ を最大化することを考える。

以上を踏まえて区分的 2 次 Lyapunov 関数を用いる場合のアルゴリズムの一例を示す。

【アルゴリズム 2】

初期化: 初期 Lyapunov 関数 $V_0 \in \mathbf{R}[x]$ を選択する。

step 1: $V = V_0, \gamma = 1$ に対して (15) ~ (18) 式を満足する $s_{N0}, s_{N1}, s_{L0}, s_{L1}, s_{P0}, s_{P1}, s_0, \dots, s_3, t_1, t_2$ を解く。解けなければ初期化に戻り V_0 を選択し直す。

step 2: $V = V_0, \gamma = 1$ と **step 1** で解いた $s_{N0}, s_{L0}, s_{P0}, s_0, s_1$ に対して (15) ~ (21) 式を満足し, 目的関数 $\text{trace} P_L$ を最小化する $V_L, v_{NL}, v_{PL}, s_{N1}, s_{L1}, s_{P1}, s_2, s_3, s_{CN1}, s_{CN2}, s_{CL1}, s_{CL2}, s_{CP1}, s_{CP2}, t_1, t_2$ を解く。ここで V_N, V_P には (13), (14) 式を用い, (12) 式より, 新たな V を得る。

step 3: $\gamma = 1$ と **step 2** で得られた V から (18) 式を満足する $s_0, \dots, s_3$ を解く。

step 4: V と **step 3** で解いた s_1 に対して (18) 式を満足し, 目的関数 γ を最大化する s_0, s_2, s_3, t_1, t_2 を解く。得られた γ を γ_n とする。

step 5: **step 4** で解いた γ_n を用いて $\gamma = \gamma_n$ とし, **step 3, 4** を繰り返して行ない, いずれかの手順で解けなかったときに計算を終了する。□

6. 数 値 例

閉ループ系の漸近安定領域を提案法に基づいて求め, 先行研究の結果と比較する。

Fig. 1 の G の状態空間行列を以下で与える⁸⁾。

Fig. 2 Domain of attraction

$$A = \begin{bmatrix} -0.333 & -0.86 \\ 1.42 & 0.53 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.41 \\ -2.27 \end{bmatrix}, \\ C = [0.3564, 0.284]$$

これに対して閉ループ系の漸近安定領域を求め, その結果を Fig. 2 に示す。シミュレーションによって得られた実際の漸近安定領域は最も外側の点線で示してある。 $Hx = \pm 1$ は⁵⁾の手法で得られた直線であり, 2 直線に挟まれる部分では $|Hx| \leq 1$ である。(a) は定理 3 を, (b) は定理 2 を用いて得た漸近安定領域である。(c) は区分的 2 次 Lyapunov 関数を用いる文献⁸⁾の手法, (d) は 2 次形式 Lyapunov 関数を用いる文献⁵⁾の手法, (e) はラインサーチと LMI で求めた円板条件による領域¹⁰⁾である。文献⁵⁾の手法では, 参照集合として領域 (e) を用いたが, 参照集合として多面体 $\text{co}\{x_1, -x_1\}, x_1 = [-1 \ 1]^T$ を用いた場合もほぼ同じ結果であった。文献⁵⁾による領域が小さいのは, 最大化するものが参照集合であり領域そのものではないことなどがその原因と考えられる。図示していないが文献¹¹⁾による手法で区分的 2 次リアプノフ関数, 2 次形式 Lyapunov 関数を用いた結果はそれぞれ (c), (d) に近いものとなった。なお計算時間は 700MHz の CPU で⁵⁾の手法に基づく計算が 10s, ⁸⁾では 20s であったのに対し, 定理 2 による方法で 30s, 定理 3 では 180s であった。計算負荷を小さくするようなアルゴリズムの開発が今後の一つの課題である。

7. 結 言

本論文では, 多項式計画を用いて飽和入力をもつシステムの局所安定領域を求める手法について考察した。まず, 飽和入力を論理整数を用いた多項式として記述し, より自由度の高い S-Procedure を用いた多項式計画問題として局所安定条件を導出した。つぎに, この多項式計画問題に二乗和分解を適用することにより Lyapunov 関数を求め, 漸近安定領域を求める手法を提案した。さらに, この手法は区分的 Lyapunov 関数を用いた場合にも適用可能であることを示し, 一つの具体的な計算アルゴリズムを提示した。最後に, 数値例により

既存の手法と比較して提案法の有効性を検証した。

一方、提案アルゴリズムでは、円板条件などで初期 Lyapunov 関数を求めておくことが必要であり、かつ、従来法に比べ計算負荷が大きい。さらに、既存手法との理論的な観点からの比較も今後の重要な課題として残されている。しかしながら、二乗和分解アプローチを飽和系の解析に適用する具体的な方法を明示し、保守性を改善する可能性のあることを示せた点において意味のあるものと考えている。

参 考 文 献

- 1) 和田, 佐伯: 入力飽和システムの Anti-windup 制御; システム/制御/情報, **46-2**, 84/90 (2002)
- 2) H. Hindi and S. Boyd: Analysis of Linear Systems with Saturation using Convex Optimization; *IEEE Conf. on Decision and Control*, 903/908 (1998)
- 3) 木山 健: セクター条件に基づく飽和を有する解析と設計; システム/制御/情報, **47-11**, 532/539 (2003)
- 4) T. Kiyama and T. Iwasaki: On the use of multi-loop circle criterion for saturating control synthesis; *Systems & Control Letters*, **41**, 105/114 (2000)
- 5) T. Hu and Z. Lin: An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance; *Automatica*, **38-2**, 351/359 (2002)
- 6) T. Hu and Z. Lin: Exact Characterization of Invariant Ellipsoids for Single Input Linear Systems subject to Actuator Saturation; *IEEE Trans. on Automatic Control*, **47-1**, 164/169 (2002)
- 7) T. Hu and Z. Lin: The Equivalence of Several Set Invariance Conditions under Saturation; *IEEE Conference on Decision and Control*, 4146/4147 (2002)
- 8) M. Johansson: Piecewise Quadratic Estimates of Domains of Attraction for Linear Systems with Saturation; *Proc. of 15th IFAC World Congress* (2002)
- 9) M. Johansson: *Piecewise Linear Control Systems*; Springer-Verlag (2003)
- 10) K. Takaba: Local Stability Analysis of Saturating Feedback System Based on LPV Descriptor Representation; *Int. Journal of Control*, **76-5**, 478/487 (2003)
- 11) 杉江, 福井: 冗長な LPV ディスクリプタ表現を用いた飽和系の局所安定解析; システム制御情報学会論文誌, **16-10**, 531/538 (2003)
- 12) S. Prajna, A. Papachristodoulou and P. A. Parrilo: SOSTOOLS Sum of Squares optimization toolbox for MATLAB (2002) <http://www.cds.caltech.edu/sostools>, <http://control.ee.ethz.ch/~parrilo/sostools>
- 13) P. A. Parrilo: Exploiting structure in sum of square programs; *Proc. of IEEE Conf. on Decision and Control*, 4664/4669 (2003)
- 14) P. A. Parrilo: Structured semidefinite programs and semi-algebraic geometry methods in robustness and optimization. PhD thesis; California Institute of Technology (May 2000)
- 15) Z. Jarvis-Wloszek, R. Feeley, W. Tan, K. Sun and A. Packard: Some Controls Applications of Sum of Squares Programming; *Proc. of IEEE Conf. on Decision and Control*, 4676/4681 (2003)
- 16) A. Papachristodoulou and S. Prajna: On the Construction of Lyapunov Function using the Sum of Squares Decomposition; *Proc. of IEEE Conf. on Decision and Control*, 3482/3487 (2002)
- 17) S. Prajna and A. Papachristodoulou: Analysis of Switched and Hybrid Systems - Beyond Piecewise Quadratic Methods; *Proc. of American Control Conf.*, 2779/2784 (2003)
- 18) 藤田, 大嶋: モデル予測制御-VI-ハイブリッドモデル予測制御; システム/制御/情報, **47-3**, 146/152 (2003)
- 19) J. Sturm: Using SeDuMi 1.02,a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones; *Optimization Methods and Software*, **11-12**, 625/653 (1999) <http://fewcal.kub.nl/sturm/software/sedumi.html>

[著 者 紹 介]

杉 江 俊 治 (正会員)

1978 年京都大学大学院修士課程精密工学専攻修了。84 年同博士後期課程研究指導認定退学。78 年～80 年日本電信電話公社勤務。84 年大阪府立大学工学部助手。88 年京都大学工学部助教授を経て、現在情報学研究科教授。ロバスト制御、システム同定、非線形制御等の研究に従事。工学博士。91 年システム制御情報学会榎木記念論文賞。98 年同論文賞。94 年および 2000 年計測自動制御学会論文賞武田賞を受賞。システム制御情報学会、ロボット学会、IEEE の会員。

植 田 克 樹 (正会員)

1978 年 12 月 12 日生。2002 年京都大学工学部工業化学科卒業。2005 年京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻修士課程修了。在学中は最適化を用いたロバスト制御系の解析に関する研究に従事。現在、(株)東芝デジタルメディアネットワーク社に勤務。磁気ディスクの制御系開発に従事。