Filippov の枠組みにおける On-Off 制御系の安定化

赤 阪 大 介*・劉 康 志*

Stabilization of a Class of On-Off Feedback Control Systems in Filippov Framework

Daisuke AKASAKA* and Kang-Zhi LIU*

This paper studies the feedback control of a class of second order linear systems which include the double integrator and are actuated by on-off input. This class of systems includes many important applications such as the orientation control of satellites which are actuated by thrusters. A class of feedback control laws are proposed which guarantee the global stability. The basic approach in stability analysis is to use continuous and piecewise smooth Lyapunov functions and Filippov theory.

Key Words: discontinuity, state-feedback, piecewise smooth Lyapunov function, Filippov solution

1. はじめに

On-Off 制御はアクチュエータの機構の簡素さやそのエネルギー効率の良さから現在広く利用されている。宇宙機の制御もその一つで、その重量や容積、コストの制約からガスジェットスラストによる On-Off 制御手法が用いられている。従来では On-Off 制御系に対して近似的な方法に基づく制御系の設計・解析がなされてきた。たとえば、リレーやヒステリシスのような非線形要素を含むシステムでは、記述関数法などを用いて、非線形要素の入出力関係を近似的に表わすことで解析・設計が行われてきた。また、パルス幅変調 (pulse-width-modulation; PWM) を用いた手法では、1 サンプル周期における平均値を制御入力を見なし、制御対象を連続値入力システムとして扱うことで、制御系設計が行われている。このような近似的な手法は、従来の連続制御理論の枠組みで対応することができるという利点はあるが、与えられる解析・設計の結果は厳密なものとはならない。また、近似することにより、システムから重要な動的情報が消えてしまうため、その性能を最大限に引き出すような手法とはいえない。

そこで本研究では、アクチュエータの特性を陽に考慮した厳密な On-Off 制御系の解析・設計法を目指す。初期段階として、2 重積分器を含む 2 次の線形系を制御対象として考え、アクチュエータは不感帯を含む静的な非線形要素として扱う。今回はシステムが不連続性を有することを考慮し、Filippov の方法を用いて微分包含の形式でその動特性を記述する。そして、あるクラスの状態フィードバックによってシステムの大域的安定性が保証できることを示す。また、非線形制御の

ほうが優れた応答を実現できることを例で示す。

本論文で用いる道具としては、Filippov の微分方程式論¹⁾と Shevitz・Paden による滑らかでないシステムに対する Lyapunov の安定論²⁾である。

本論文で扱う問題は、スイッチング制御^{6),7)}で考えられているものと比べて、とりうる入力値が 3 つのみであるという点で大きく異なっており、ある意味で、スイッチング制御におけるかなり限定された問題を考えている。また、On-Off 制御の中でよく知られているが Bang-Bang 制御である。Bang-Bang 制御も有限個の離散値入力のみを用いるが、それはあくまで入力制約が有界な連続集合として与えられるようなシステムに対し、有限時間最適化問題を解いて得られた結果であり、本論文で扱っているシステムとは異なる。実際、ポントリヤギンの最大原理は離散値入力をもつシステムには適用できない。さらに、Bang-Bang 制御則は一般に時間の関数であり、陽な状態フィードバックで与えられるものではない。すなわち、パラメータの不確かさに対しては非常に敏感となる。また、Bang-Bang 制御問題では、漸近安定性を論じられているわけではない。これに対して、本論文で提案する非線形な切り替え則は、制御対象のパラメータに対して独立であり、非常に高いロバスト性を有する。On-Off 制御系設計に対する別のアプローチとして PWM 型制御入力を用いた手法が挙げられる⁹⁾。PWM を用いると、1 サンプル周期間における On-Off 入力は、そのデューティ比によって決定される。一方、本論文においてその On-Off 入力は与えられた閾値と制御器の出力信号を比較することによって決定する。文献 9) では、PWM 型制御入力に基づくシステムに対して線形近似を行ない、その線形近似システムのもとで局所的な解析やデューティ比を定めるフィードバック則による安定化について議論している。本論文では、非線形なフィードバックまで考え、システムの不連続性に伴う解の存在性や一意性の問題を考慮に入れた上

* 千葉大学工学部 千葉市稲毛区弥生町 1-33

* Chiba University, Inage-ku, Chiba.

(Received May 2, 2006)

(Revised October 17, 2006)

で、微分包含をもとに解析・設計が行なわれており、より連続時間システムに近い立場で安定性が論じられている。また、本論文では制御対象が限定的ではあるが大域的な安定化に関する結果を与えている。

2. 問題設定

Fig. 1 に示すような線形部分 G と非線形部分 ϕ によって構成される状態フィードバック On-Off 制御系を考える。 G は制御対象、 ϕ は静的な On-Off アクチュエータを表わしており、両者が状態フィードバック $f(x)$ によって結合されている。

Fig. 1 On-Off control system

制御対象は 2 次の可制御正準系とし、その状態方程式は

$$G: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \gamma_1(-\mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 + u) \end{cases} \quad (1)$$

で与えられる。ただし、 $u \in \mathbb{R}^1$ であり、システム (1) は虚軸を含む複素左半面に極をもつと仮定する。すなわち、 $\mu_1, \mu_2 \geq 0, \gamma_1 > 0$ とする。これは開ループ系の初期値応答が少なくとも指数的に発散しないということを前提としている。開右半面上の極を含めて考えないのは、あくまで大域的な安定化を目指しているためである。力学系においては、 γ_1^{-1} は質量、 μ_1 はバネ、 μ_2 はダンパに相当している。以下では便宜のために $x = [x_1, x_2]^T$ とし、(1) 式を $\dot{x} = g(x, u)$ と表わすことにする。

一方、制御入力 u は、状態フィードバック信号 $f(x)$ が不連続な On-Off アクチュエータ $u = \phi(\xi)$ を介することにより次式で与えられる。

$$\phi(f(x)) = \begin{cases} \gamma_2, & f(x) > \epsilon \\ 0, & |f(x)| < \epsilon \\ -\gamma_2, & f(x) < -\epsilon \end{cases} \quad (2)$$

ただし、 $\gamma_2 > 0, \epsilon \geq 0$ とする。 γ_2 は On 入力の大きさを、 ϵ は不感帯の片幅を表わしている。この要素は理想的な不感帯付きの不連続要素であると考えることができ、 $f(x) = \pm\epsilon$ で不連続となっている。以上より、閉ループは

$$\dot{x} = g(x, \phi(f(x))) \quad (3)$$

となるが、不連続面 $f(x) = \pm\epsilon$ における動特性がまだ定義さ

れていない。そこで、不連続部分における状態の挙動をより厳密に記述するために、Filippov の方法¹⁾を用いる。Filippov の方法とは、右辺が不連続な微分方程式に解を与えるものであり、その Filippov 解軌道は、実際の不連続システムの解軌道にかなり近いという利点がある。Filippov 解 (付録参照) の定義より、閉ループはつぎのような微分包含で表わすことができる。

$$\dot{x} \in K[g](x) = \begin{cases} g(x, \gamma_2), & \text{if } f(x) > \epsilon \\ g(x, \theta_+ \gamma_2), & \text{if } f(x) = \epsilon \\ g(x, 0), & \text{if } |f(x)| < \epsilon \\ g(x, -\theta_- \gamma_2), & \text{if } f(x) = -\epsilon \\ g(x, -\gamma_2), & \text{if } f(x) < -\epsilon \end{cases} \quad (4)$$

ただし、 $\theta_+, \theta_- \in [0, 1]$ である。すなわち、不連続点上では入力の幅は 0 から γ_2 の間を取り得ると解釈することができる。一般に右辺が不連続な微分方程式に対しては、通常の古典的な枠組みではその解の存在性さえ示すのが困難となる。たとえば、(4) 式において、つぎのように不連続線上 $f(x) = \epsilon$ (または $-\epsilon$) を、それぞれ $f(x) \geq \epsilon$ (または $\leq -\epsilon$) に等号付の不等式として含めると、

$$\dot{x} = \begin{cases} g(x, \gamma_2) & \text{if } f(x) \geq \epsilon \\ g(x, 0) & \text{if } |f(x)| < \epsilon \\ g(x, -\gamma_2) & \text{if } f(x) \leq -\epsilon \end{cases} \quad (5)$$

のようになる。しかし、 $f(x) = \pm\epsilon$ ではリプシッツ条件を満たさないため、解の存在性や一意性を保証することはできない。一方、微分包含では、ダイナミクスが集合値として表わされているため、その中から適当なものを選ぶことによって、解の存在性を保証することが可能となる。つまり、滑り動作も解として含むことになる。このように、微分包含による記述は不連続な微分方程式に対して解の存在を保証するという点で非常に有効性がある。

以下ではこの Filippov システムの枠組みにおいて、どのような状態フィードバック則でシステムの大域的漸近安定性を保証できるのかについて考えてゆく。

以下、 $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$ とおく。

3. 安定性解析

本節では、あるクラスの静的連続状態フィードバック則を提案し、閉ループの安定性について解析する。

3.1 フィードバック則と平衡点

つぎの静的連続状態フィードバックを考える。

$$f(x) = -\alpha x_1 + \beta(x_2) \quad (6)$$

ここで、 $\alpha > 0, \beta(x_2)$ は $x_2 = 0$ で $\beta(0) = 0$ を満たし、かつ、少なくともリプシッツ連続であり、それ以外の点では滑らかな単調減少関数であるとする。 $f(x) = 0$ を位相平面上で表わすと Fig. 2 のように第 2 象限と第 4 象限に存在するような関数となる。(6) 式は、たとえば、 $f(x) = -x_1 - 4x_2$

のような線形なものから, $f(x) = -3x_1 - 9x_2^3$ のような非線形なものまでも含む. この制御則はプラントのパラメータにまったく依存せず, きわめてロバストである. 一般的なスイッチング制御の研究では, 線形システム間の切替えを研究するものが多いが, 本論文では非線形のフィードバックまで考えている. 非線形フィードバックを取り入れた利点について後に例で示す.

Fig. 2 The curve of $f(x) = 0$

つぎに, (6) 式をフィードバック則として与えた場合のシステムの平衡点について考える. $\mu_1 = 0, \mu_2 \geq 0$ のとき, すなわち, 制御対象が質量系, あるいは, 質量・ダンパ系に相当するとき, 平衡点 $\mathcal{N}$ は集合

$$\mathcal{N} = \{ x \mid |x_1| \leq \frac{\epsilon}{\alpha}, x_2 = 0 \} \quad (7)$$

となる (Fig. 3.a 参照). これについて Filippov 解の定義を踏まえて確かめてゆく. まず, $|f(x)| < \epsilon$ では, つまり, 制御入力ゼロの領域では, $x_2 = 0$ が平衡点となる. このとき, $|f(x)| < \epsilon$ より, $|x_1| < \epsilon/\alpha$ である. 逆に, $|f(x)| > \epsilon$ においては, 平衡点は存在しない. 最後に平衡点となる可能性がある点は, 不連続線 $f(x) = \pm\epsilon$ 上の 2 点 $x_{b+} = [-\epsilon/\alpha, 0]^T, x_{b-} = [\epsilon/\alpha, 0]^T$ である. ここでポイントとなるのは, Filippov 解の絶対連続性である. そこで, x_{b+} が平衡点となるかについて調べるために, x_{b+} に到達した状態の振る舞いについて考えてみる. ある時刻 $t = T \geq 0$ で状態が x_{b+} に到達したとする. すなわち, $x(T) = x_{b+}$ となる. 微分包含 (4) 式より, x_{b+} における動特性は, $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = \gamma\theta_+$ となり一意ではない. このとき, x_{b+} 近傍の動特性を調べるにより, 時刻 $t = T + \Delta t$ ($|\Delta t| \ll 1$) において, 状態は x_{b+} から $|f(x)| \leq \epsilon$ に入るか, あるいは, x_{b+} 上にとどまるかの二つの選択肢があることがわかる. 前者の選択肢では, 状態が制御入力ゼロの領域に入ろうとすることになるが, これは Filippov 解の絶対連続性を考慮すれば起こりえない. すなわち, $x(t) = x_{b+}$ ($\forall t \geq T$) となる必要がある. よって, x_{b+} は Filippov の意味において平衡点とみなされる. x_{b-} についても同様に議論することができる.

一方, $\mu_1 \geq 0, \mu_2 = 0$ のとき, つまり, 制御対象が質量・バネ系, あるいは, 質量・バネ・ダンパ系に相当するとき, $\mathcal{N}$ は

$$\mathcal{N} = \{ x \mid x = 0 \} \quad (8)$$

となり, 原点のみとなる (Fig. 3.b 参照). これも解の絶対連続性と (4) 式より同様に導きだすことができる.

Fig. 3 Equilibrium points

3.2 安定定理

状態フィードバック則として (6) 式を用いたとき, システム全体に対してつぎの大域的安定性に関する結果が成り立つ. 《定理 1》 システム (3) において, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ と $\mu_1 = 0, \mu_2 > 0$ の場合を考える. このとき, 状態フィードバックが (6) 式で与えられたとき, システムの平衡点 $\mathcal{N}$ は大域的に漸近安定となる.

[注釈 1] $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$ の場合, つまり, 制御対象が漸近安定の場合, (6) 式で定義された状態フィードバックを用いたときも同様に平衡点は大域的漸近安定となる. ただし, 定理 1 の証明法を多少変更する必要がある⁸⁾. また, $\mu_1 > 0, \mu_2 = 0$ の場合, つまり質量・バネ系の場合にはこの定理は成立しない. これは, 不連続要素に不感帯が存在するため, システムの平衡点の近傍に必ず制御入力が全く入らない空間ができしまい, その領域でリミットサイクルを生じてしまうことから容易に想像することができる.

定理 1 の証明は, 次小節以降で Filippov システムに対するリアプノフの安定論²⁾を基礎に行なう. この理論は Filippov 解の存在性と一意性を要求するので, 別途にそれらについて調べる必要がある. まず, 存在性については, 閉ループ系 (3) 式が Condition B (付録参照) を満たせば成立する. 実際に $\dot{x} = g(x, \phi(f(x)))$ は, 任意の開部分集合 $Q \subset \mathbb{R}^2$ 上のほとんどすべての点 ($f(x) = \pm\epsilon$ 以外) において定義される. さらに, 不連続要素 ϕ は Condition B を満足しているため, 制御対象と状態フィードバック則のリプシッツ性を考慮すれば, 任意のコンパクト集合 $D \subset Q$ のほとんどすべての点に対して $\|g(x, \phi(f(x)))\| \leq A$ なる A が存在する. よって, 閉ループ系は Condition B を満たす. 一意性については, 一意性の十分条件¹⁾を調べるにより示すことができる. 不連続線以外 ($f(x) \neq \pm\epsilon$) では, 閉ループ系はリプシッツ性を有するため, Filippov 解の一意性は保証される. そこで, 不連続線 $f(x) = \epsilon$ における解の一意性について考えてみる. まず, $f(x) = \epsilon$ の $f(x) > \epsilon$ 側から $f(x) < \epsilon$ へ向かう法線ベクトルを $n(x)$ とおく. さらに, g_+, g_- をそれぞれ $g_+(x) = \lim_{f(x) \rightarrow \epsilon+} g(x, \gamma), g_-(x) = \lim_{f(x) \rightarrow \epsilon-} g(x, 0)$

と定義すると, Filippov 解の一意的十分条件は,

$$\langle n(x), g_+(x) \rangle - \langle n(x), g_-(x) \rangle > 0 \quad (9)$$

で与えられる. これは不連続線を初期値とする解が枝分かれしないことを意味している. 実際に (9) 式の左辺を計算すると $n(x) = [\alpha, -d\beta/dx_2]^T$, $g_+ = [x_2, -\gamma_1\mu_1x_1 - \gamma_1\mu_2x_2 + \gamma_1\gamma_2]^T$, $g_- = [x_2, -\gamma_1\mu_1x_1 - \gamma_1\mu_2x_2]^T$ より, $-\gamma_1\gamma_2d\beta/dx_2$ が得られる. $x_2 \neq 0$ においては $d\beta/dx_2 < 0$ より, $-\gamma_1\gamma_2d\beta/dx_2 > 0$ となり, 十分条件を満たす. $x_2 = 0$ に関しては先に述べたように平衡点であるためその解の一意性は保証されている. $f(x) = -\epsilon$ についても同様にその一意性を示すことができる.

3.3 定理 1 の証明

質量系 ($\mu_1 = \mu_2 = 0$) の場合

ここでは, 区分的に滑らかなリアプノフ関数候補を考え, ラサールの不変性原理を用いることにより状態の $\mathcal{N}$ への収束性を示してゆく. まずはじめに $\mathbb{R}^2$ 空間をつぎのように分割する.

$$\mathcal{P}_1 = \{x \mid |f(x)| > \epsilon\} \quad (10)$$

$$\mathcal{P}_2 = \{x \mid |f(x)| < \epsilon\} \quad (11)$$

$$\mathcal{S} = \{x \mid f(x) = \pm\epsilon, x_2 \neq 0\} \quad (12)$$

(10)~(12) 式と $\mathcal{N}$ において $\mathbb{R}^2 = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{N}$ なる関係が成立する. そして, つぎの滑らかではないが連続のリアプノフ関数候補 $V(x)$ を考える.

$$V(x) = \begin{cases} |f(x)| - \epsilon + \frac{\alpha}{2\gamma}x_2^2, & \text{if } x \in \mathcal{P}_1 \\ \frac{\alpha}{2\gamma}x_2^2, & \text{if } x \in \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{S} \end{cases} \quad (13)$$

この $V(x)$ は, $V(x) \geq 0$ で, 半径方向に非有界であり, $V(x) = 0$ を満たす x は $\mathcal{N}$ と一致している. また, $V(x)$ は正則関数⁵⁾であり, $f(x) = \pm\epsilon$ でリプシッツ連続となっている. 特徴としては, リアプノフ関数自身にフィードバック則が組み込まれており, $|f(x)| - \epsilon$ の項で状態の切り替え面への到達性を, x_2^2 の項で x_2 が減少してゆくことを保証することになる.

システム (3) 式の右辺は不連続であり, リアプノフ関数候補 $V(x)$ が区分的にだけ滑らかであることから, この枠組みの中でリアプノフの安定論²⁾を考えなければならない. そこで, 以下ではおのおのの領域 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{S}$ に対して一般化時間微分 $\dot{V}$ (付録参照) を計算してゆく.

i) $x \in \mathcal{S}$ の場合

$\mathcal{S}$ はシステムの不連続部分, あるいは, システムの切り替え線に相当する. この部分において $V(x)$ は滑らかではない. まず, θ を

$$\theta = \begin{cases} \theta_+, & f(x) = \epsilon \\ \theta_-, & f(x) = -\epsilon \end{cases} \quad (14)$$

とおく. ただし, $\theta_+, \theta_- \in [0, 1]$ である. このとき $\dot{V}(x)$ は

Fig. 4 Space decomposition (Mass system)

$$\dot{V}(x) = \bigcap_{\xi \in \partial V(x)} \xi^T \begin{bmatrix} x_2 \\ \gamma \cdot \text{sgn}(f(x))\theta \end{bmatrix}. \quad (15)$$

ただし

$$\partial V(x) = \text{co}\left\{[-\alpha, \frac{d\beta}{dx_2} + \frac{\alpha}{\gamma}x_2]^T, [0, \frac{\alpha}{\gamma}x_2]^T\right\} \quad (16)$$

となる. $\xi \in \partial V(x)$ は, δ を $\delta \in [0, 1]$ とすると

$$\xi = \delta \begin{bmatrix} -\alpha \cdot \text{sgn}(f(x)) \\ \frac{d\beta}{dx_2} \text{sgn}(f(x)) + \frac{\alpha}{\gamma}x_2 \end{bmatrix} + (1-\delta) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{\gamma}x_2 \end{bmatrix}$$

と凸結合の形で表現できるので, 簡単な計算によって

$$\begin{aligned} \xi^T \begin{bmatrix} x_2 \\ \gamma \text{sgn}(f(x))\theta \end{bmatrix} &= \alpha x_2 \text{sgn}(f(x))\theta \\ &\quad + (-\alpha x_2 + \frac{d\beta}{dx_2} \gamma \text{sgn}(f(x))\theta) \cdot \text{sgn}(f(x))\delta \end{aligned}$$

が得られる. $-\alpha x_2 + \frac{d\beta}{dx_2} \gamma \text{sgn}(f(x))\theta = 0$ のとき, すなわち, x がシステムの不連続部分 $\mathcal{S}$ に拘束されるとき, $\dot{V}(x) = \alpha x_2 \text{sgn}(f(x))\theta$ となる. このとき, $-\alpha x_2 + \frac{d\beta}{dx_2} \gamma \text{sgn}(f(x))\theta = 0$ の両辺に x_2 を掛け, 変形すると

$$x_2^2 = \frac{\gamma}{\alpha^2} \frac{d\beta}{dx_2} \cdot \alpha x_2 \text{sgn}(f(x))\theta = \frac{\gamma}{\alpha^2} \frac{d\beta}{dx_2} \cdot \dot{V} \geq 0$$

を得ることができる. 上式において, $d\beta/dx_2 < 0$ を考慮すれば, $\dot{V} \leq 0$ が常に成り立つことがわかる. 一方, $-\alpha x_2 + \frac{d\beta}{dx_2} \gamma \text{sgn}(f(x))\theta \neq 0$ のとき, $\dot{V}(x) = 0$ となる. これは, 安定性になんら影響しない. なぜなら, この場合は, 絶対連続な状態がルベーグ測度ゼロの不連続点を通過するだけであり, 通過する前後で少なくとも $\dot{V} \leq 0$ であればよいからである.

ii) $x \in \mathcal{P}_1$ の場合

このとき, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = \gamma \text{sgn}(f(x))$ となるので, $\dot{V}(x)$ を計算すると, $x_2 \neq 0$ では

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (-\alpha x_2 + \frac{d\beta(x_2)}{dx_2} \dot{x}_2) \text{sgn}(f(x)) + \frac{\alpha}{\gamma} x_2 \dot{x}_2 \\ &= -\alpha x_2 \text{sgn}(f(x)) - \frac{d\beta(x_2)}{dx_2} \gamma + \alpha x_2 \text{sgn}(f(x)) \\ &= -\frac{d\beta(x_2)}{dx_2} \gamma \end{aligned} \quad (17)$$

である. $d\beta(x_2)/dx_2 < 0$ より, $\dot{V}(x) < 0$ となる. 一方, $x_2 = 0$ のとき

$$\beta(0+) := \lim_{x_2 \rightarrow 0+} \frac{d\beta}{dx_2}(x_2) \leq 0 \quad (18)$$

$$\beta(0-) := \lim_{x_2 \rightarrow 0-} \frac{d\beta}{dx_2}(x_2) \leq 0 \quad (19)$$

と定義すると, $\dot{V}(x)$ は以下ようになる.

$$\dot{V}(x) = \bigcap_{\xi \in \partial V(x)} \xi^T \begin{bmatrix} x_2 \\ \gamma \operatorname{sgn}(f(x)) \end{bmatrix} \quad (20)$$

ただし

$$\partial V(x) = \begin{bmatrix} -\alpha \cdot \operatorname{sgn}(f(x)) \\ \operatorname{co}\{\beta(0+), \beta(0-)\} \operatorname{sgn}(f(x)) + \frac{\alpha}{\gamma} x_2 \end{bmatrix}$$

である. このとき, i) の場合と同様の計算により, $\dot{V}(x) \leq 0$ が得られる. $\mathcal{P}_1$ では, つねに x_2 が駆動されるため $\dot{V}(x) \equiv 0$ とはならない. 以上より, $V(x)$ は常に減少し, 解軌道 x は必ず有限時間内で $f(x) = \epsilon$, あるいは, $f(x) = -\epsilon$ に到達することがわかる.

iii) $x \in \mathcal{P}_2$ の場合

$\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = 0$ より, $\dot{V}(x) = \frac{\alpha}{\gamma} x_2 \dot{x}_2 = 0$ を得る. $x \in \mathcal{N}$ のとき $\dot{V}(x) \equiv 0$. $x \notin \mathcal{N}$ では, $x_2 = \text{const}$ より, $\dot{f}(x) = \text{const}$ となり有限時間内で必ず $f(x) = \epsilon$, あるいは, $f(x) = -\epsilon$ に到達することがわかる.

以上より, すべての x に対して $\dot{V}(x) \leq 0$ が成立するので, ラサールの不変性原理 (付録参照) より, 状態は任意の初期値に対して最大の不変集合である $\mathcal{N}$ へ漸近的に収束する.

質量・ダンパ系 ($\mu_1 = 0, \mu_2 > 0$) の場合

つぎに制御対象が質量・ダンパ系の場合について証明する. この場合, 質量系の場合と同じようなりアプノフ関数候補では, $\mathbb{R}^2/\mathcal{N}$ 全体においてその一般化時間微分が負とならない. リアプノフ関数候補を選び直すことも考えられるが, しかしそれは与えられた $f(x)$ に対して容易な作業ではない. そこで, Fig. 5 に示すように集合間における状態遷移の性質に着目し証明を行なう.

Fig. 5 は, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ が不変集合であり, かつ, $\mathcal{V}$ の補集合である $\bar{\mathcal{V}}$ に存在する状態は, 必ず有限時間内で $\mathcal{V}$ に到達するということを表わしている. 実際に $\mathcal{V}$ は

$$\mathcal{V} = \{x \mid |x_2| < \frac{\gamma_2}{\mu_2}\} \quad (21)$$

となり, $\mathcal{N}$ を含む集合となる (Fig. 6 参照). 証明の概要としては, まず $\mathcal{V}$ が以上の性質を満たすことをリアプノフ関数 $W(x)$ を用いて証明し, その後で $\mathcal{V}$ において質量系の場合と同様のリアプノフ関数 $V(x)$ を用いることで平衡点の大域的漸近安定性を示す. そこでまず, 前者の証明を行なうためにつぎのリアプノフ関数候補を考える.

$$W(x) = \frac{1}{2} x_2^2 \quad (22)$$

Fig. 5 State transition (Mass-damper system)

Fig. 6 Space decomposition (Mass-damper system)

$W(x)$ は, x_2 に対して正定で, かつ, 半径方向に非有界である. そして, $W(x)$ の一般化時間微分

$$\dot{W}(x) = \frac{\partial W}{\partial x}(x) \cdot K[g](x) \quad (23)$$

を $\mathcal{V}$ において以下で計算してゆく.

i) $x_2 \geq \frac{\gamma_2}{\mu_2}$ の場合

$f(x) < -\epsilon$ のとき, $x_2 \geq \frac{\gamma_2}{\mu_2}$ より, $\dot{W} = \gamma_1 x_2 (-\mu_2 x_2 - \gamma_2) < 0$ が成立する. また, $f(x) = -\epsilon$, $|f(x)| < \epsilon$ ではそれぞれ $\dot{W} = \gamma_1 x_2 (-\mu_2 x_2 - \theta - \gamma_2) \leq -\gamma_1 \mu_2 x_2^2 < 0$, $\dot{W} = -\gamma_1 \mu_2 x_2^2 < 0$ となる. 一方, $f(x) = \epsilon$, $f(x) > \epsilon$ では, それぞれ $\dot{W} = \gamma_1 x_2 (-\mu_2 x_2 + \theta + \gamma_2) \leq \gamma_1 x_2 (-\mu_2 x_2 + \gamma_2) \leq 0$, $\dot{W} = \gamma_1 x_2 (-\mu_2 x_2 + \gamma_2) \leq 0$ が得られ, 両者ともに $x_2 = \gamma_2/\mu_2$ で唯一 $\dot{W} = 0$ となる. 以上より, $\{x \mid f(x) \geq \epsilon\} \cap \{x \mid x_2 = \gamma_2/\mu_2\}$ に状態が収束しないこと, および, $\dot{W} \equiv 0$ とならないことをさらに示せばよいことになる. これは, $f(x) > \epsilon$ に存在する任意の x を初期値とする解 $x(t)$ が有限時間で $f(x) = \epsilon$ に到達することを示すことと同じである. そこで, 区間 $t = [0, \hat{t}]$ において, $f(x(\hat{t})) = \epsilon$ を満たす有限な $\hat{t}$ が存在するかについて考える. $f(x) > \epsilon$ における解を計算すると

$$x_1(t) = -\frac{1}{\gamma_1 \mu_2} (1 - e^{-\gamma_1 \mu_2 t}) (x_2 - \frac{\gamma_2}{\mu_2}) + \frac{\gamma_2}{\mu_2} t + x_1$$

$$x_2(t) = e^{-\gamma_1 \mu_2 t} (x_2 - \frac{\gamma_2}{\mu_2}) + \frac{\gamma_2}{\mu_2}$$

を得る. ここで, $\hat{t}$ を無限と仮定する. このとき, $x_1(\infty) = +\infty$, $x_2(\infty) = \gamma_2/\mu_2$ より, $f(x(\infty)) = -\infty$ となり, 仮定と矛盾する. すなわち, $\hat{t}$ は有限となる. これより, $f(x) > \epsilon$ に存在する状態は有限時間で確実に $f(x) = \epsilon$ に到達する. また, 状態が $f(x) = \epsilon$ 上の $x_2 = \gamma_2/\mu_2$ へとどまり続ける可能性がないのは, この点がシステム全体の平衡点でないこ

とより明らかである。以上より、状態は $\dot{W} < 0$ の領域へ必ず入るので、有限時間で $\mathcal{V}$ へ到達する。

ii) $x_2 \leq -\frac{\gamma_2}{\mu_2}$ の場合

i) の場合と同様に議論することができるため省略する。

i), ii) より、状態の $\bar{\mathcal{V}}$ から $\mathcal{V}$ への有限時間内での到達性、および、 $\mathcal{V}$ の不変性が証明された。

つぎに $\mathcal{V}$ 内において状態の $\mathcal{N}$ への漸近収束性をするために、 $\mathcal{R}^2$ 空間をつぎのように分割する (Fig. 6 参照)。

$$\mathcal{P}_1 = \{x \mid |f(x)| > \epsilon\} \quad (24)$$

$$\mathcal{P}_2 = \{x \mid |f(x)| < \epsilon\} \quad (25)$$

$$\mathcal{S} = \{x \mid f(x) = \pm \epsilon, x_2 \neq 0\} \quad (26)$$

そして、 $\mathcal{V}$ で定義されるつぎのリアプノフ関数候補 $V(x)$ を考える。

$$V(x) = \begin{cases} |f(x)| - \epsilon + \frac{\alpha}{2\gamma} x_2^2, & \text{if } x \in \mathcal{V} \cap \mathcal{P}_1 \\ \frac{\alpha}{2\gamma} x_2^2, & \text{if } x \in \mathcal{V} \cap (\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{S}) \end{cases}$$

質量系の場合と同様に $V(x)$ の一般化時間微分 $\dot{V}$ を計算すると $\dot{V} \leq 0$ となり、ラサールの不変性原理によって $\mathcal{N}$ の大域的漸近安定性を証明することができる。計算の詳細については質量系の場合とほぼ同様のため省略する。

3.4 事例

ここでは、制御対象が質量系の場合において具体的なフィードバック則を与えてその状態の収束性について検証する。

例 1

はじめに線形な状態フィードバック $f(x) = f_1 x_1 + f_2 x_2$ を考える。ただし、 $f_1, f_2 < 0$ である。この場合、閉ループ系においてつぎの二つのスライディングモードが存在する。

$$\mathcal{S}_+ = \{x \mid f(x) = \epsilon, -\gamma f_2/f_1 \leq x_2 \leq 0\} \quad (27)$$

$$\mathcal{S}_- = \{x \mid f(x) = -\epsilon, 0 \leq x_2 \leq \gamma f_2/f_1\} \quad (28)$$

状態は Fig. 7.a に示すような解軌道に沿って移動し、任意の $x(0) \in \mathcal{R}^2/\mathcal{N}$ に対して、確実にどちらかのスライディングモードに到達する。スライディングモードにおける動特性は、微分包含 (4) 式より $\dot{x}_2 = -\frac{f_1}{f_2} x_2$ と計算できる。結果とし

Fig. 7 Phase plane: Example

て、状態は x_{b+}, x_{b-} のどちらか一方に漸近的に収束することになる。

例 2

二つめの例として非線形な状態フィードバック

$$f(x) = -x_1 - \frac{|x_2|x_2}{2\gamma} \quad (29)$$

を考える。ただし、 $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$ である。このときの入力切り替え線は、制御対象に入力 $\pm \gamma_2$ を加えたときの解軌道と一致する (Fig. 7.b 参照)。状態が切り替え線に到達すると、切り替え線に沿って x_{b+} , あるいは、 x_{b-} に向かう。そして、有限時間内で x_{b+}, x_{b-} に到達し、到達した瞬間に停止する。注目すべき点は、非線形な状態フィードバック (29) 式が状態の $\mathcal{N}$ への最短時間到達、あるいは、入力の切り替え数最小化 (2 回以下) などの最適性を有するということが位相平面上から判断できる点である。しかし今のところ、これは入力、状態拘束付きの最適化問題であるため、通常の Pontryagin の最大原理では証明することができない。

時間応答

ここでは異なる制御則に対して状態と入力の時間応答を比較する。用意した制御則は例 1 で述べた $f(x) = -x_1 - x_2$ と例 2 の $f(x) = -x_1 - |x_2|x_2/2$ である。平衡点を一致させるために互いに $\alpha = 1$ とした。初期値を $x(0) = [1, 1]^T$, 各パラメータを $\mu_1 = \mu_2 = 0, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, \epsilon = 0.1$ としたときの $f(x) = -x_1 - x_2$ の状態と入力の時間応答を Fig. 8, $f(x) = -x_1 - |x_2|x_2/2$ の結果を 9 に示す。明らかに非線形制御のほうが収束性の速さ、および、入力切替数の少なさで優れていることがわかる。特に入力の切替え回数が少ないことと切替間隔が長いことは振動を励起させない意味で非常に重要である。

4. 結論と課題

本論文では、虚軸を含む複素左半面に極をもつ 2 次の可制御正準系に対する On-Off 制御を考え、あるクラスの状態フィードバックにより、平衡点の大域的安定化が可能であることを示した。安定性の証明手法としては、閉ループを Filippov の方法を用いて記述し基本的には区分的に滑らかなリアプノフ関数を用いるものであった。しかしながら、提案された手法は位相平面に依存したものであり、また、制御対象に対して場合分けをし、異なる手法で証明を行なっている。今後、制御対象の次元が増した場合、あるいは、実際に設計に結びつけるためには、より統一的な解法が望ましいと考えられる。この本質を見極め、その方向性を探っていく必要がある。

参考文献

- 1) A.F. Filippov: Differential Equations With Discontinuous Righthand Sides, Kluwer Academic Publishers (1988)
- 2) Daniel Shevitz and Brad Paden: Lyapunov stability theory of nonsmooth systems, IEEE Transactions on Automatic Control, **39**-9, 1910/1914 (1994)
- 3) Brad E. Paden and Shanlar S. Sastry: A Calculus for Computing Filippov's Differential Inclusion with Application

Fig. 8 $f(x) = -x_1 - x_2$ Fig. 9 $f(x) = -x_1 - x_2|x_2|/2$

to the Variable Structure Control of Robot Manipulators, IEEE Transactions on Circuits and Systems, **34**-1, 73/82 (1987)

- 4) 中荻, 申, 田村: Nonsmooth システムに対する適応制御系の設計, 電気学会産業計測制御研究会資料, **IIC-04-79**, 13/18 (2004)
- 5) F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, R.J. Stern and P.R. Wolenski: Nonsmooth Analysis and Control Theory, Graduate Texts in Mathematics, **178**, Springer-Verlag, New York (1998)
- 6) Daniel Liverzon: Switching in Systems and Control, Birkhauser (2003)
- 7) Zhendong Sun and Shuzhi S. Ge: Switched Linear Systems, Control and Design, Springer (2005)
- 8) Daisuke Akasaka and Kang-Zhi Liu: Stability Analysis of A Class of On-Off Feedback Systems in Filippov Framework, Proc. of the 45nd IEEE Conference on Decision and Control (2006)
- 9) 富田, 浅井: PWM 型制御入力に基づく安定化制御, 計測自動制御学会論文集, **42**-2, 129/138 (2006)

《付 録》

A. 数学的準備

本節では, 本論文に必要な数学的な定義, および, 定理を示す.

Filippov 解¹⁾: つぎの微分方程式を考える.

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (\text{A.1})$$

ただし, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ は, 可測であり局所的に有界とす

る.

Condition B³⁾: f は開部分集合 $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ のほとんどすべてにおいて定義され, 可測とする. さらに, 任意のコンパクト集合 $D \subset Q$ のほとんどすべてにおいて, $\|f(x, t)\| \leq A(t)$ を満たすあるルベグ可積分関数 $A(t)$ が存在する.

【定義】 ベクトル関数 $x(\cdot)$ が, 区間 $[t_0, t_1]$ 上において絶対連続であり, かつ, ほとんどすべての $t \in [t_0, t_1]$ において

$$\dot{x} \in K[f](x, t) \quad (\text{A.2})$$

ただし

$$K[f](x, t) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \overline{\text{co}} f(B(x, \delta) - N, t) \quad (\text{A.3})$$

を満たすとき, $x(\cdot)$ は, 区間 $[t_0, t_1]$ 上における (A.1) 式の Filippov 解と呼ばれる. $\bigcap_{\mu N = 0}$ はルベグ測度ゼロとなるすべての集合 N の共通部分を, $\overline{\text{co}}$ は凸包を, $B(x, \delta)$ は, x を中心とする半径 δ の開球, $B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \delta\}$ を表す.

Clarke の一般化勾配⁵⁾: 局所リプシッツ関数 $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, (x, t) における V の一般化勾配は, 次式で定義される.

$$\partial V(x) := \text{co}\{\lim \nabla V(x_i) \mid x_i \rightarrow x, x_i \notin \Omega_v\} \quad (\text{A.4})$$

ここで, Ω_v は ∇V が存在しないルベグ測度がゼロの集合である.

Chain Rule²⁾: $x(\cdot)$ を $\dot{x} = f(x, t)$ の t を含む区間における Filippov 解とする. そして, $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は, リプシッツかつ正則関数である. このとき, $V(x(t), t)$ は絶対連続であり, $(d/dt)V(x(t), t)$ はほとんどすべてにおいて存在し,

$$\frac{d}{dt} V(x(t), t) \in \text{a.e. } \dot{V}(x, t) \quad (\text{A.5})$$

を満たす. ただし

$$\dot{V}(x, t) := \bigcap_{\xi \in \partial V(x(t), t)} \xi^T \begin{pmatrix} K[f](x(t), t) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

LaSalle の定理²⁾: コンパクト集合 Ω から始まる自律システム $\dot{x} = f(x)$, $x(t_0) = x_0$ のすべての Filippov 解は, すべての $t \geq t_0$ に対して一意で, かつ, Ω 内に留まるとする. $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ をすべての $v \in \dot{V}$ に対して $v \leq 0$ (注1) となるような時間を陽に含まない正則関数とする. このとき, $S = \{x \in \Omega \mid 0 \in \dot{V}\}$ と定義すれば, Ω 内のすべての解軌道は最大不変集合 $M \subseteq \bar{S}$ に収束する. ただし, $\bar{S}$ は S の閉包である.

(注1) ただし, $\dot{V}$ が空集合であってもよい.

[著 者 紹 介]

赤 阪 大 介 (学生会員)

2006 年千葉大学自然科学研究科博士前期課程修了, 現在同大学同研究科人工システム科学専攻博士後期課程に所属.

劉 康 志 (正会員)

1984 年中国西北工業大学卒業, 91 年千葉大学大学院学術博士, 96 年より千葉大学工学部助教授, ロバスト制御, 適応制御, 非線形制御の研究に従事, 著書「線形ロバスト制御」(コロナ社), 共著「現代制御理論通論」(培風館), 共訳, 「ロバスト最適制御」(コロナ社).