有限周波數位相・ゲイン特性に着目した連続時間制御対象の 制御しやすさの特徴づけ

管 野 政 明*・大 西 政 彦**・原 辰 次**

Characterization of Easily Controllable Continuous-time Plants
Based on Finite Frequency Phase/Gain Property

Masaaki KANNO*, Masahiko ONISHI** and Shinji HARA**

This paper characterizes easily controllable single-input-single-output (marginally) stable continuous-time plants in a quantitative manner by way of best achievable performance in $\mathcal{H}_\infty$ loop shaping design. The characterization is based on a finite frequency phase/gain property, which we call Condition (π), and the achievable performance level for any 2nd order system satisfying this condition is proven to be bounded from above by the value $\gamma_{DI} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$. A simple procedure for the choice of a weighting function in $\mathcal{H}_\infty$ loop shaping design is proposed based on the obtained knowledge, and its effectiveness is confirmed by a numerical example.

Key Words: easily controllable plants, finite frequency phase/gain property, $\mathcal{H}_\infty$ loop shaping design

1. はじめに

フィードバック制御により達成可能な制御性能に関しては、Bode の積分定理やその拡張に関する研究^{1), 2)}に加え、 $\mathcal{H}_2$ 追従/レギュレーション性能限界をプラントゲイン・不安定極・非最小位相零点などに関する陽な(閉じた)形で表現しようとする研究³⁾などが近年行なわれている。性能を $\mathcal{H}_\infty$ ノルムで測るものも、感度関数や相補感度関数のピークや、本論文でも用いる $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法の達成性能と、不安定極・非最小位相零点との関係についての研究がある^{1), 2), 4), 5)}。これらの結果より、不安定極や非最小位相零点が、達成される閉ループ性能に何らかの意味での制限になり、制御のしにくさにつながるということは十分理解がされている。したがって、制御対象そのものの設計の際には極力安定になるように、また非最小位相零点をもたないように配慮される。

その一方で、制御対象が安定(かつ最小位相)であっても、それが制御しやすいということには直結していないということも指摘されている。特に、クロスオーバー周波数近傍での位

相特性が制御のしやすさ・しにくさに関連しているということとを数値例により例示した研究^{6), 7)}がある。しかしながら、これまで得られている知見は、制御のしやすさを定量的・理論的に評価するには到ってはいなかった。

そこで本論文では、一入力一出力連続時間(限界)安定な系に対し、プラントの位相・ゲインと制御しやすさの関連づけにおける定量的かつ理論的な解析を試みる。ここでは $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計⁸⁾における最適性能値(以下、 γ_{opt} と表わす)を用いて、安定系の制御のしやすさ・しにくさの理論的特徴づけを行なう。より具体的には、2.3 節にて新たに提案する位相・ゲイン条件、条件(π)、と $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \simeq 2.6131$ という最適性能の値との間に密接な関係があることを示す。本論文の目的は以下の二つである。

- 2 次の連続時間系において、条件(π)を満たす系に対する γ_{opt} は必ず $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ 以下となることを理論的に示す。
- 高次の(限界)安定な連続時間系に対し、条件(π)を考慮しながら整形重み関数を選択して帯域幅を決定し、安定化・ロバスト性の達成は $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法で実現する、簡単なロバスト設計手法を提案する。

本研究と直接的に関連のある先行研究としては、Christian らの研究^{4, Section 5)}があげられる。そこでは、 $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法での最適性能の下限をゲインクロスオーバー周波数でのロールオフ率を用いて表現している(ゲインクロスオーバー周波数近傍では、ロールオフ率はそこでの位相と密接に関係している)。しかしながら、そこで得られた下限はロールオフ率に関して陰な形となっていて、計算が容易でない。さらに、扱っている対象が広すぎるため、広範囲で粗い γ_{opt} の値に対

* CREST, 科学技術振興機構 川口市本町 4-1-8

** 東京大学大学院情報理工学系研究科システム情報学専攻
東京都文京区本郷 7-3-1

* CREST, Japan Science and Technology Agency, 4-1-8
Honcho, Kawaguchi-shi

** Graduate School of Information Science and Technology,
The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku,
Tokyo

(Received January 4, 2007)

(Revised July 5, 2007)

する結果しか得られておらず、現実的な最適性能値に関する有用な情報を得ることは難しい。本論文で扱う最適性能の値は、文献8)で妥当な設計であるとされた性能値、すなわち最適性能値 γ_{opt} が $2\sqrt{2} \approx 2.8284$ 以下の範囲である。よって、本研究の結果は、理論的結果であると同時に、現実的な制御問題に対する有用な結果を与えていると考えられる。

本論文は以下のように構成されている。第2章では、まず $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法の定式化とその最適性能値の計算方法について述べ、また最適性能値の制御しやすさの指標としての妥当性を議論し、つぎに条件 (π) とそれを満足する系のクラスを定義する。さらに、主要結果を導く前の準備として、多重積分器に対する最適性能値を与える。第3章にて、条件 (π) を満たす2次系に対して、 γ_{opt} が $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ 以下となるという主要結果を導く。その結果を用いて、第4章では、条件 (π) を考慮し、整形重み関数を用いて帯域幅を選択する、簡単なロバスト設計手法を提案する。第5章でまとめる。

2. 制御しやすいプラントの特徴づけ

2.1 $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法

本論文では制御しやすさの指標として、 $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法における達成可能性能を用いる。 $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法は以下のように定式化される。Fig. 1 のフィードバック制御系において、 P_0 は制御対象、 W は整形重みであり、また $P := P_0 W$ と定義する。このとき $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法は、 P を安定化する制御器のクラス $\mathcal{K}_s$ の中から

$$\left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + PK)^{-1} \begin{bmatrix} I & P \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (1)$$

を最小化する制御器 K を見つけるものである。上式のノルム記号の内側は、 $(d_1 \ d_2)^T$ から $(y_1 \ y_2)^T$ までの伝達関数行列となっている。その伝達関数行列は感度関数 S 、相補感度関数 T を含んでおり、 $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法がそれらをバランス良く整形しようとする設計法であることが理解できる。また、 d_1 から y_2 までの伝達関数 KS なども含み、大きな制御入力を用いる制御器は設計されない。結果として、この設計法によって得られる制御器は、 P のクロスオーバー周波数を維持したまま、ロバストな閉ループ系が構成されるようにクロスオーバー周波数帯での開ループ特性を古典制御の意味でも望ましいものにしていくということが知られている^{5), 8)}。

(1)式を最小化する問題は $\mathcal{H}_\infty$ 最適制御問題として定式化できるが、その最適性能値

$$\gamma_{\text{opt}} := \inf_{K \in \mathcal{K}_s} \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + PK)^{-1} \begin{bmatrix} I & P \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (2)$$

は、リカッチ方程式・リアプノフ方程式の解を用いて陽に記述でき、一般の $\mathcal{H}_\infty$ 最適制御問題の解法に必要な繰り返し計算が必要ない⁸⁾。具体的には、厳密にプロバノミナルプラント P の最小実現状態空間表現が

Fig. 1 $\mathcal{H}_\infty$ loop shaping design formulation

$$P(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられているとき、

$$\gamma_{\text{opt}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_{\max}(YQ)}}$$

と記述することができる。ここで、 Y はリカッチ方程式

$$AY + YA^* - YC^*CY + BB^* = 0 \quad (3)$$

の(唯一の)安定化解であり、 Q はリアプノフ方程式

$$Q(A - YC^*C) + (A - YC^*C)^*Q + C^*C = 0 \quad (4)$$

の解である。このように γ_{opt} が YQ の最大固有値により、代数的に閉じた形で表現が得られるため、 P が低次の場合には、 γ_{opt} を P の係数に関して閉じた形で陽に表現することが可能である。本論文の結果はこの利点を利用して得られている。

2.2 性能指標としての γ_{opt}

本節では、 γ_{opt} を性能指標として用いることの妥当性を議論する。 $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法は基本的には $\mathcal{H}_\infty$ 最適制御であるが、前節で述べたとおり古典制御の考えも踏襲するものである。そして、 $\gamma_{\text{opt}} \lesssim 2\sqrt{2} (\approx 2.8284)$ であれば、 $\|S\|_\infty$, $\|T\|_\infty$ とも2で押さえられるなど、良い閉ループ性能が達成されることが理論的に示されている。また、 $\gamma_{\text{opt}} \lesssim 4$ であればある程度実用に耐える閉ループが得られるということが経験的に知られている⁸⁾。さらに、一入力出力系の場合、ゲイン余裕・位相余裕の下限が γ_{opt} によって以下のように記述できることが理論的に示されている⁵⁾。

[補題1] Fig. 1 の閉ループ系において(2)式を達成する制御器が用いられたとき、その系のゲイン余裕 (GM[dB]) と位相余裕 (PM) は以下の関係式を満たす。

$$\text{GM} \geq 20 \log_{10} \left(\frac{\gamma_{\text{opt}} + 1}{\gamma_{\text{opt}} - 1} \right), \text{PM} \geq 2 \arcsin \frac{1}{\gamma_{\text{opt}}}$$

以上のように、 γ_{opt} は感度関数・相補感度関数のピークの上限も与え、またゲイン余裕・位相余裕の下限を与えるものであり、現実的な閉ループの性能指標として用いることは正当化されと考えられる。

2.3 有限周波数正実性と条件 (π)

機構設計の分野では、『振動モードの同相性』(その振動モードの運動方向が剛体モードの運動方向と一致していること)という概念が、制御しやすさに結びついているということが知られている⁹⁾。しかしながら、モード分解に基づくこの特

微づけは制御の分野での枠組みには馴染まないものである。同相という概念を制御の分野に適用するための手段として、『有限周波数正実性』という性質が導入され、

$$\mathcal{P} := \{P(s) \mid \text{厳密にプロパな有理関数で, 全ての極は複素閉左半面}\}$$

に属する振動的な制御対象に対して、以下の仮説がいくつかの例に対する観察に基づいて主張されている¹⁰⁾。

〔仮説〕 制御対象の伝達関数を $P(s) \in \mathcal{P}$ とするとき、動的なフィードバック制御器で達成できる最大制御帯域 ω_{b*} は、

$$G(j\omega) + G^*(j\omega) \geq 0 \quad (\forall |\omega| \leq \omega)$$

を満たす最大周波数 ω と概略一致する。ただし、 $G(s) := sP(s)$ である。

この性質は制御帯域における位相を規定する条件であり、位相が 180 [degree] 遅れる周波数が制御のしやすさと大きく関連していることを示唆している。しかしながら、それは観察に基づくものであり、理論的・定量的に評価できる新たな条件が望まれている。

そこで本論文では、上の仮説をベースに、ゲインも考慮した新しい条件（条件 (π) ）を制御しやすさを特徴づけるものとして提案する。そしてその有限周波数での位相・ゲイン特性条件と達成可能性能 γ_{opt} の間に深い関係があることを理論的に示す。まず、提案する位相・ゲイン特性条件を以下のように定義する。この定義では、低周波数帯域での正実性に加え、高周波数帯域での小ゲイン特性が要求されている。

条件 (π) : 以下のいずれかが成立する。

- (i) $\forall \omega \in \mathbb{R}, \angle P(j\omega) > -\pi$.
- (ii) $\exists \omega_\pi > 0$ such that

$$0 \leq \omega < \omega_\pi : \angle P(j\omega) \geq -\pi,$$

$$\omega = \omega_\pi : \angle P(j\omega) = -\pi, \quad |P(j\omega)| \leq 1,$$

$$\omega > \omega_\pi : |P(j\omega)| < 1.$$

すなわち、 ω_π は制御対象の位相遅れが 180 [degree] となる周波数を表わしており、それ以上の周波数ではゲインは 0 [dB] 未満であることが要求されている。また、これを満足する系のクラスを定義しておく。

$$\mathcal{P}^g := \{P(s) \in \mathcal{P} \mid \text{条件}(\pi) \text{ を満たす}\}$$

本論文の目的は、 $\mathcal{P}^g$ に属する任意の 2 次系に対し、 γ_{opt} の値がある一定値以下となることを導き、条件 (π) が制御のしやすさを特徴づけていることを示すことである。

2.4 多重積分器の γ_{opt}

次章にて本論文の主結果を述べるが、その前に本節では、位相が特徴的である系に対する結果を述べる。より具体的には、位相が一定である多重積分器系に対して解析を行なう。

$$P_n(s) = \left(\frac{k}{s}\right)^n \quad (k > 0) \quad (5)$$

これらの系では、位相遅れは全周波数帯で常に 90n [degree]

Table 1 Achievable control performance levels and optimal controllers for multiple integrators ($\xi := \sqrt{2} + 1$)

$P_n(s)$	γ_{opt}	Optimal Controller
$\frac{k}{s}$	$\sqrt{2} = \sqrt{1+\xi^0} \simeq 1.4142$	1
$\left(\frac{k}{s}\right)^2$	$\sqrt{4+2\sqrt{2}} = \sqrt{1+\xi^2} \simeq 2.6131$	$\frac{\xi s/k+1}{s/k+\xi}$
$\left(\frac{k}{s}\right)^3$	$2\sqrt{3}+\sqrt{6} = \sqrt{1+\xi^4} \simeq 5.9136$	$\frac{\xi^2(s/k)^2+\sqrt{2}\xi s/k+1}{(s/k)^2+\sqrt{2}\xi s/k+\xi^2}$

であることに留意する。これらの系に対する達成可能な性能の限界 γ_{opt} とそれを達成する制御器を **Table 1** に示す。なお、 γ_{opt} の値はシステムゲイン k には依存しない。

$n = 1$ の場合、 P_1 は正実であるので、 $\gamma_{\text{opt}} \leq \sqrt{2}$ となることがわかり⁸⁾、またこの場合は実際には等号が成立している。つぎに $n = 2$ の場合であるが、この系は 2 重積分器となっていて、位相は常に -180 [degree] であり、条件 (π) をかろうじて満たしている（2 番目の条件で $\omega_\pi = k$ とした場合に当たる）。 P_2 に対する最適制御器は位相進み補償器であり、 P_2 のゲインクロスオーバー周波数のところで、45 [degree] の最大位相進みを行なっている。すなわち、 $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法は、古典制御の観点から見ても妥当な制御器を設計していることがわかる。このことから、 γ_{opt} を制御のしやすさの指標として用いることが妥当であると考えられる。 $n = 2$ の場合に達成可能な性能は以下のようになる¹¹⁾。

$$\gamma_{\text{DI}} := \sqrt{4+2\sqrt{2}} \simeq 2.6131 \quad (6)$$

この値は、 $2\sqrt{2} \simeq 2.8284$ よりも小さいので、 P_2 は制御しやすい系であると判断できる。さらに、

$$2 \arcsin \frac{1}{\gamma_{\text{DI}}} = 45 [\text{degree}]$$

であるので、補題 1 より位相余裕は少なくとも 45 [degree] であることがわかる（実際、位相余裕は厳密に 45 [degree] である）。なお、この 2 重積分器の例ではゲイン余裕は ∞ となっているが、 $\gamma_{\text{opt}} \leq \gamma_{\text{DI}}$ が成り立つ場合、補題 1 はゲイン余裕が 7.00 [dB] 以上となることを保証する。

$n = 3$ の 3 重積分器の場合は、位相は常に 270 [degree] 遅れているが、この場合も位相進み補償器を用いて安定化していることがわかる。最適制御器は、 P_2 の場合と同様、 P_3 のゲインクロスオーバー周波数にて最大位相進みを達成し、位相余裕として $90 - 2 \arcsin((1+\sqrt{2})/\sqrt{6}) \simeq 19.47 [\text{degree}]$ を実現している。この系に対しては、 γ_{opt} の値は (6) 式の γ_{DI} よりもはるかに大きいことが Table 1 よりわかり、この系が制御しづらいものであると判断できる。

Table 1 中の γ_{opt} の値と文献 8) で述べられている望ましい γ_{opt} の値を比較すると、制御対象が（何らかの意味で） P_3 よりも P_2 に似た特性をもっていることが望ましいといえる。本論文では、条件 (π) と $\gamma_{\text{opt}} \leq \gamma_{\text{DI}}$ との関係を明らかにする。

3. 2 次系の達成可能な γ_{opt}

本章では、一般の（限界）安定な 2 次系に対し、達成可能性能 γ_{opt} と位相・ゲイン特性の関係を明確にし、制御しやす

い系の特徴づけを行なう。\$\mathcal{P}\$ に属する 2 次系は一般に

$$P(s) = k \frac{\beta s + 1}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, k \neq 0)$$

と表わせるが、\$k < 0\$ の場合は、\$-P\$ を考え、得られた制御器にマイナスの符号をつければ良い、すなわち一般性を失うことなく、\$k > 0\$ の場合に帰着することができる。よって、以下のクラスの系に関して解析を行なっていく。

$$\mathcal{P}_2 := \left\{ P(s) = k \frac{\beta s + 1}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} \mid \alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, k > 0 \right\} \subset \mathcal{P}$$

\$\beta\$ の符号によって \$P \in \mathcal{P}_2\$ は異なる位相特性をもつ。以降の解析のため、\$\mathcal{P}_2\$ をこの基準で 2 つのクラスに分類する。

$$\text{最小位相: } \mathcal{P}_{2+} := \{ P(s) \in \mathcal{P}_2 \mid \beta \geq 0 \}$$

$$\text{非最小位相: } \mathcal{P}_{2-} := \{ P(s) \in \mathcal{P}_2 \mid \beta < 0 \}$$

クラス \$\mathcal{P}_{2+}\$ に属する系は、その位相遅れは最大で 180 [degree] であり、\$\omega = +\infty\$ でのゲインは 0 であるので、すべて \$\mathcal{P}^s\$ に含まれる。一方、クラス \$\mathcal{P}_{2-}\$ に属する系 \$P\$ では、位相遅れは必ず 180 [degree] を超え、\$\omega = +\infty\$ で 270 [degree] に達する。そのような系において、位相遅れがちょうど 180 [degree] に到達するのは、\$\omega = \omega_\pi := \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1/(-\beta)}\$ のときであり、そこでのゲインは \$|P(j\omega_\pi)| = k \cdot (-\beta)/(\alpha_1)\$ となる。ここで、位相クロスオーバー周波数 \$\omega_\pi\$ は \$\alpha_0, \alpha_1, \beta\$ すべてに依存しているが、そこでのゲインは \$\alpha_0\$ には依存していないことに留意する。よって、\$P \in \mathcal{P}_{2-}\$ が \$\mathcal{P}^s\$ に属するための必要十分条件は、\$k \leq \alpha_1/(-\beta)\$ であることがわかる。すなわち、\$\mathcal{P}_{2-}\$ と \$\mathcal{P}^s\$ の両方に属する系のクラスは

$$\mathcal{P}_{2-}^s := \mathcal{P}_{2-} \cap \mathcal{P}^s = \left\{ P(s) \in \mathcal{P}_{2-} \mid 0 < k \leq \frac{\alpha_1}{-\beta} \right\}$$

と書ける。これら \$\mathcal{P}^s\$ に属する系に対し、以下の定理を得る。
《定理 1》

$$\mathcal{P}_2^s := \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}^s = \mathcal{P}_{2+} \cup \mathcal{P}_{2-}^s$$

に属する任意の系に対し、\$\gamma_{\text{opt}} \leq \gamma_{\text{DI}}\$ が成り立つ。また、等号が成立するのは、以下の条件が満たされたときである。

- \$\alpha_0 = \alpha_1 = \beta = 0\$ (for \$P(s) \in \mathcal{P}_{2+}\$)
- \$\alpha_0 = 0, k = \alpha_1/(-\beta)\$ (for \$P(s) \in \mathcal{P}_{2-}^s\$)

(証明) 付録 A を参照。 ■

この定理は、\$P \in \mathcal{P}_2\$ が条件 \$(\pi)\$ を満たしているならば、\$\gamma_{\text{opt}}\$ が \$\gamma_{\text{DI}}\$ により上から押さえられることを述べている。これはあくまで十分条件ではあるが、等号が成立する場合があり、条件 \$(\pi)\$ による系の特徴づけのもとではベストであるという意味でこの上界はタイトである。なお、\$\mathcal{P}_{2-}\$ に属する系では、\$k\$ が増加するにつれてゲインクロスオーバー周波数は大きくなっていくが、そこでの位相遅れは 180 [degree] を超えていく。このような場合、達成可能性能 \$\gamma_{\text{opt}}\$ は上限なく悪化していく。例として、以下の系を考える。

$$P(s) = \frac{k(-s+1)}{s(s+1)} \in \mathcal{P}_{2-}$$

この系に対し、\$\gamma_{\text{opt}}\$ は以下のように計算される。

$$\gamma_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + \left(k + 1 + \sqrt{k^2 + 6k + 1} \right)^2}$$

\$\gamma_{\text{opt}}\$ は \$k\$ に関して単調増加することはすぐにわかる。また、\$k = 1\$ のとき \$\gamma_{\text{opt}} = \gamma_{\text{DI}}\$ となる。\$0 < k \leq 1\$ の範囲では、\$P\$ は条件 \$(\pi)\$ を満足するので、これは定理 1 の結果と一致する(さらに、条件 \$(\pi)\$ がタイトであることも示している)。最後に、\$k \rightarrow +\infty\$ としたとき、\$\gamma_{\text{opt}}\$ は \$+\infty\$ に発散する。

定理 1 と上記の例は、位相が 180 [degree] 以上遅れる系は現実的に達成可能な制御帯域幅には何らかの限界があるということを示唆する。その意味で定理 1 の結果は有限周波数正実性に対して述べられた仮説とも符合するが、ここではゲイン条件を付加することで制御しやすさが定量的・理論的に示されている。すなわち、位相・ゲイン条件、条件 \$(\pi)\$、が \$\gamma \leq \gamma_{\text{DI}}\$ を保証することが厳密に示されている。

4. 条件 \$(\pi)\$ に基づくロバスト設計手法

前章で示した結果は 2 次系に対するものであったが、そこで示した条件 \$(\pi)\$ と \$\gamma_{\text{opt}}\$ の値の関係は高次の系に対しても近似的に成立することが期待できる。その理由は、クロスオーバー周波数帯での位相特性が近い系は、\$\nu\$ ギャップの意味で近い系であり、さらには \$\nu\$ ギャップの意味で近い系は、(1) 式のノルムの意味での性能が近いものとなるからである⁵⁾。本章では、高次の系に対しても条件 \$(\pi)\$ が制御のしやすさを特徴づけるというこの知見に基づき重み関数を調節するロバスト設計手法を提案する。

古典的なループ整形手法では、設計者が開ループ伝達関数を整形しながら、閉ループの安定性とロバスト性を達成しつつ、設計要求を満足させようと試行錯誤を行なう。ロバスト性を達成するために、開ループ伝達関数のナイキストプロットが \$-1 + j0\$ の点から離れるように制御器が設計される。一方、\$\mathcal{H}_\infty\$ ループ整形法を用いた場合は、整形重み関数を用いて開ループ整形を行ない、安定性とロバスト性を達成することは、\$\mathcal{H}_\infty\$ ループ整形設計法に任せることができる。安定性とロバスト性が首尾よく達成されたかどうかは \$\gamma_{\text{opt}}\$ の値を見ることにより判断することが可能となっていて、設計者は \$\gamma_{\text{opt}}\$ が適切な値となるように重み関数の調整を繰り返し行なう。

本論文では、整形重み関数 \$W\$ の調整の際に、定理 1 で得られた条件 \$(\pi)\$ と達成可能性能 \$\gamma_{\text{opt}} \leq \gamma_{\text{DI}}\$ との関係が一般の系に対しても近似的に成立するという知見を用いるアプローチを提案する。定理 1 の知見により、整形重み関数の選び方、すなわち、開ループ整形をどのように行なうことにより、ロバスト性を失わない範囲でどの位広い帯域幅を実現できるかの簡単な指標が与えられる。そこで鍵となるのが、位相遅れが 180 [degree] に到達する周波数を特定し、そこでのゲインが 1 (近く) になるように定数ゲインを調整して条件 \$(\pi)\$ が満たさ

れるようにすることである。すなわち、まずノッチフィルタにより振動モードを抑えろといった、古典的なアプローチに基づく性能要求に従って動的な整形重み関数 F を定め、つぎに条件 (π) に基づき、整形されたプラントにおいて位相遅れが 180 [degree] に到達する周波数でのゲインが 1 になるように定数ゲイン k を調整する。最後に、定数ゲインも含んだ整形重み $W := kF$ で整形されたプラントに対し、 $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法を用いて制御系の設計を行なう。条件 (π) をちょうど満たすように定数ゲイン k を選択することで $\gamma_{\text{opt}} \lesssim \gamma_{\text{DI}}$ が成立することがわかっているの、性能とロバスト性を満たしながら制御帯域がどこまで広げられるかが P_0F よりすぐにわかり、整形重み関数 $W = kF$ の調整の繰り返しが簡略化される。

以上のアプローチは、以下の3つのステップからなる設計法の手形で書くことができる。

Step 1: 整形重み F を、制御目的に応じて決定する。

Step 2: 重み付きプラント $P := P_0W$ (ただし $W := kF$) が条件 (π) を満たすように定数ゲイン k を調整する。

Step 3: $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法を用いて、 P に対する(準)最適制御器 K_w を得る。実際に実装する制御器を $K = WK_w$ とする。

ここで重要なのは、設計者は最初の2つのステップで条件 (π) が満足されるようにすればよいということである。そこを正しく行なえば、 $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法により残りの安定性、良好なロバスト性などの閉ループ特性は自動的に保証される。

例として、上で提案された設計法をねじれ振動系に対して適用する。ここで取り上げるねじれ振動系は、以下のような伝達関数で表現される。

$$P_0(s) = \frac{6.25 \times 10^5 s^2 + 6.36 \times 10^5 s + 9.22 \times 10^8}{s^6 + 5.27 s^5 + 5780 s^4 + 2.21 \times 10^4 s^3 + 5.84 \times 10^6 s^2 + 1.15 \times 10^7 s}$$

この系のボード線図を **Fig. 2** に示す。この系は積分器＋一次遅れ系に逆相の振動モード (36.1 [rad/sec]), 同相振動モード (66.8 [rad/sec]) が加わったものである。一つの振動モードが逆相であるため、一般的には制御しにくい系と考えられる。ここでは、ノッチフィルタを用いて同相振動モードを抑え、ロバスト性をもちつつ帯域幅の広い制御器を設計することを考える。具体的には、以下のように制御対象を整形する。

● 同相振動モードを抑えるためにノッチフィルタ F を用いる。ただし、

$$F(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_N s + \omega_N^2}{s^2 + 2\eta\omega_N s + \omega_N^2} \quad (\zeta > 0, \eta > 0, \omega_N = 67.0)$$

● $P := P_0kF$ のゲインクロスオーバー周波数における位相が -180 [degree] になるように、すなわち条件 (π) をちょうど満たすように定数ゲイン k を調整する。

よって、ループ整形時に設定するパラメータは k, η, ζ の3つである。

[設計例 1]

まず、ノッチフィルタのパラメータとして以下の値を用いる。

Fig. 2 Bode diagram of the torsion disk

● $\zeta = 0.01, \eta = 0.3$

このノッチフィルタは同相振動モードをほぼ打ち消すものである。このとき、 $\omega_\pi = 13.8$ [rad/sec] で位相遅れが 180 [degree] に到達し (Fig. 2),

● $k = 1.146$

とすると、その周波数でのゲインが 1 となり、 $P := P_0kF$ が条件 (π) を満たす。この P に対して最適制御器 K_{opt} を設計した。 $P, K_{\text{opt}}, PK_{\text{opt}}$ のボード線図を **Fig. 3** に示す。達成された性能は $\gamma_{\text{opt}} = 2.6627$ とほぼ想定されたとおりである。ゲイン余裕・位相余裕はそれぞれ $\text{GM} = 7.81$ [dB], $\text{PM} = 45$ [degree] となっていて、十分なロバスト性が確保されていることが確認できる。また、 PK_{opt} のゲインクロスオーバー周波数は $\omega_c = 12.4$ [rad/sec] となった。

望ましい γ_{opt} の値が得られるまで、繰り返し k を調整して制御器を設計しなおすのではなく、条件 (π) より適切な k を選ぶことにより望ましい γ_{opt} の値が得られ、所望のノッチフィルタを含んだ、妥当な制御器が得られていることに留意する。

[設計例 2]

ノッチフィルタを用いると、ノッチがかけられる周波数以下の帯域の位相を遅らせ、制御帯域が狭くなってしまうことは一般的に知られている。上の設計例では、同相振動モードは十分抑えられてはいるものの、達成された閉ループの制御帯域はやや狭くなっていた。ここでは、ノッチは用いるが、 ω_π より上の周波数でのゲインが 1 未満となって、条件 (π) がちょうど満足されるようにノッチの程度を調整し、制御帯域を広げる設計を試みる。そして、その場合でも十分なロバスト性をもった設計ができることを見る。ここで以下のノッチフィルタのパラメータ値を用いる。

● $\zeta = 0.1, \eta = 0.3$

このとき、 P_0F の位相遅れが 180 [degree] に到達する周波数は $\omega_\pi = 16.0$ [rad/sec] と、期待どおり先の例よりも大きくなっている (Fig. 2)。そして、その周波数でのゲインを 1 と

Fig. 3 Bode diagram of the torsion disk + controller (Design 1)

Fig. 4 Bode diagram of the torsion disk + controller (Design 2)

し, $P := P_0 k F$ が条件 (π) をちょうど満たすように

$$\bullet k = 1.509$$

とする。このように整形されたプラントに対し $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法を適用した。 P , K_{opt} , PK_{opt} のボード線図を Fig. 4 に示す。このとき, $\gamma_{\text{opt}} = 2.7010$ が達成され, k を変化させ繰り返し設計することなくおよそ狙った γ_{opt} の値が得られていることがわかる。また, PK_{opt} のゲインクロスオーバー周波数は $\omega_c = 14.4$ [rad/sec] となり, 狙いどおり設計例 1 よりも大きくなっている。さらに, ゲイン余裕・位相余裕はそれぞれ $\text{GM} = 6.71$ [dB], $\text{PM} = 44.3$ [degree] が達成され, 設計例 1 より若干劣化しているが, 期待通りの良い設計が行なわれたことが確認できる。

以上 2 つの設計例より, 条件 (π) に基づき k を選択することにより $\gamma_{\text{opt}} \simeq \gamma_{\text{DI}}$ が達成され, ロバスト性をもった設計ができたことが確認された。ここでは k の調整に焦点を当てたが, 逆に位相遅れが 180 [degree] に到達する周波数近傍で閉ループ帯域幅が実現されるという事実より, 達成したい帯域

幅を考えながら F を設計するアプローチも有効であると考えられる。

5. おわりに

本論文では, $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形設計法における達成可能性能を用いて, 有限周波数領域での位相・ゲイン特性をもとに制御しやすさの特徴づけを行なった。特に, 制御しやすさの特徴づける条件として条件 (π) を提案し, それを満足する 2 次系に対しては, 達成される性能が $\gamma_{\text{DI}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ 以下となることを示した。また得られた知見に基づいて整形重み関数を選ぶ, 簡単なロバスト設計手法も提案し, 数値例題によってその有効性を確認した。

本論文では触れなかったが, あるクラスの 3 次系に対して, 条件 (π) と γ_{DI} が関係している¹²⁾。今後の課題の一つとしては, 3 次以上の高次の系などに対するものなど, より一般的な結果を得ることがあげられる。

参考文献

- 1) M. M. Seron, J. H. Braslavsky and G. C. Goodwin: *Fundamental Limitations in Filtering and Control, Communications and Control Engineering Series*, Springer (1997)
- 2) S. Skogestad and I. Postlethwaite: *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, Wiley (1996)
- 3) J. Chen, S. Hara and G. Chen: Best tracking and regulation performance under control energy constraint, *IEEE Trans. on Autom. Control*, **48**-8, 1320/1336 (2003)
- 4) L. Christian and J. Freudenberg: Limits on achievable robustness against coprime factor uncertainty, *Automatica*, **30**-11, 1693/1702 (1994)
- 5) G. Vinnicombe: *Uncertainty and Feedback — $\mathcal{H}_\infty$ Loop-shaping and the ν -gap Metric*, Imperial College Press (2001)
- 6) S. Hara and N. Naito: Control performance limitation for electro-magnetically levitated mechanical systems, In *Proceedings of the 3rd MOVIC*, 147/150, Zurich, Switzerland (1998)
- 7) T. Iwasaki: Integrated system design by separation, In *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications*, 97/102, Hawai'i (1999)
- 8) D. C. McFarlane and K. Glover: *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions*, volume 138 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag (1990)
- 9) 小野京右: 振動自由度をもつ機構の位置決め制御に関する基礎的研究 (第 1 報, ネガティブフィードバックによる系の不安定性), 日本機械学会論文集, (C)**53**-496, 2568/2576 (1987)
- 10) T. Iwasaki, S. Hara and K. Yamauchi: Dynamical system design from a control perspective: Finite frequency positive-realness approach, *IEEE Trans. on Autom. Control*, **48**-8, 1337/1354 (2003)
- 11) T. T. Georgiou and M. C. Smith: Optimal robustness in the gap metric, *IEEE Trans. on Autom. Control*, **35**-6, 673/686 (1990)
- 12) S. Hara, M. Kanno and M. Onishi: Finite frequency phase property versus achievable control performance in $\mathcal{H}_\infty$ loop shaping design, In *Proceedings of SICE-ICASE International Joint Conference 2006*, 3196/3199, Busan, Korea (2006)

《付 録》

A. 定理1の証明

定理1の結果は、数値計算により得られたものではなく、理論的で厳密なものである。それを証明するためには複雑な代数的計算を正確に行なう必要があるが、そのような計算は数式処理システム Maple の助けを借りて行なった。

証明は、 $\beta = 0$, $\beta > 0$, $\beta < 0$ の場合に分けて行なう。どの場合も、系の状態空間表現を求めリカッチ方程式(3)とリアプノフ方程式(4)を解くことにより、以下が導ける。

$$\gamma_{\text{opt}} = \sqrt{1 + (A + \sqrt{A^2 + B})^2} \quad (\text{A.1})$$

ただし、それぞれの場合で A, B は異なる。ここで、 $\gamma_{\text{opt}} \leq \gamma_{\text{DI}}$ は $A + \sqrt{A^2 + B} \leq 1 + \sqrt{2}$ と等価である。後者を証明するために、それぞれの場合において、

$$0 < A \leq 1, \quad (\text{A.2})$$

$$B \leq 1 \quad (\text{A.3})$$

を証明する。等号は $A = B = 1$ のとき成立する。(なお、 γ_{opt} は実数となるため、 $A^2 + B \geq 0$ は自動的に満たされる。)

● $\beta = 0$ の場合：この場合は、

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{\alpha_1^2 - 2\alpha_0 + 2\sqrt{k^2 + \alpha_0^2}}, \\ A &= \frac{Z(Z - \alpha_1)}{2k}, \\ B &= \frac{k^2 + \alpha_0\alpha_1^2 + \alpha_1^2\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - Z(\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\sqrt{k^2 + \alpha_0^2})}{k^2} \end{aligned}$$

である。まず、 $\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} > \alpha_0$ より、

$$Z > \alpha_1 (\geq 0) \quad (\text{A.4})$$

であることは容易にわかり、その結果 $A > 0$ が導ける。つぎに、 A を

$$A = \underbrace{\frac{\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - \alpha_0}{k}}_{=: A_1} + \underbrace{\frac{\alpha_1(\alpha_1 - Z)}{2k(\alpha_0 + \alpha_1 + 1)}}_{=: A_2}$$

と書く。 $A_1 \leq 1$ (等号成立条件は $\alpha_0 = 0$) であることはすぐにわかる。また、(A.4)式より、 $A_2 \leq 0$ (等号成立は $\alpha_1 = 0$ のとき) であることも導ける。その結果、(A.2)式が成り立つことが示せた (等号は $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ のときに成立)。一方、

$$1 - B = \frac{\alpha_1(\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} + \alpha_0)(Z - \alpha_1)}{k^2} \geq 0$$

が成立するので、(A.3)式が成り立つ。また、等号成立は $\alpha_1 = 0$ の場合である。以上で、 $\beta = 0$ の場合が示せた。

● $\beta > 0$ の場合：まず最初に、周波数変換およびゲインの調整 ($s \rightarrow \tilde{s}/\beta$, $k \rightarrow \tilde{k}/\beta^2$) を行なうことにより、一般性を失うことなく β を 1 とすることができることに留意する。よって、 $\beta = 1$ と仮定して証明を進める。

このとき、伝達関数の分母・分子が共通因子 ($s + 1$) をもつ可能性がある。これは $\alpha_0 - \alpha_1 + 1 = 0$ のときに起こるが、安定領域での極・零相殺であるので、共通因子を取り除いて

$$P(s) = \frac{k}{s + \alpha_0}$$

と書くことができる。これは正実な系であり、 $\gamma_{\text{opt}} \leq \sqrt{2} < \gamma_{\text{DI}}$ となることが示されている⁸⁾。すなわち定理が成り立つ。よって以下では、 $\alpha_0 - \alpha_1 + 1 \neq 0$ の場合を証明していく。この場合、

$$\begin{aligned} A &= \frac{Z(Z - \alpha_1 + \alpha_0 - \sqrt{k^2 + \alpha_0^2})}{2k(\alpha_0 - \alpha_1 + 1)}, \\ B &= \frac{k^2(\alpha_1 + 1) + \alpha_0\alpha_1^2 + (k^2 + \alpha_1^2)\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - Z(k^2 + \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\sqrt{k^2 + \alpha_0^2})}{k^2(\alpha_0 - \alpha_1 + 1)}, \end{aligned}$$

ただし、

$$Z = \sqrt{k^2 + \alpha_1^2 - 2\alpha_0 + 2\sqrt{k^2 + \alpha_0^2}}$$

となる。 $\beta = 0$ の場合と同様、 $Z > \alpha_1 (\geq 0)$ であり、また $\alpha_1 - \alpha_0 + \sqrt{k^2 + \alpha_0^2} > 0$ である。さらに、

$$\begin{aligned} Z^2 - (\alpha_1 + \sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - \alpha_0)^2 \\ = 2(\alpha_0 - \alpha_1 + 1)(\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - \alpha_0) \end{aligned}$$

となるので、 A の分子の符号は分母のそれと同じとなるのがわかる。これは $A > 0$ を意味している。また、 A を、

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{\frac{\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - \alpha_0}{k}}_{=: A_1} \\ &+ \underbrace{\frac{-(\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - \alpha_0 + \alpha_1)(Z - \alpha_1 + \alpha_0 - \sqrt{k^2 + \alpha_0^2})}{2k(\alpha_0 - \alpha_1 + 1)}}_{=: A_2} \end{aligned}$$

と書く。この A_1 は $\beta = 0$ の場合と同一であるので、 $A_1 \leq 1$ である。また、 $A_2 < 0$ であることは、 $A > 0$ を示した方法より示せる。($\beta > 0$ の場合は、等号が成立しないことに留意する。) よって、 $A < 1$ であり、結局、(A.2)式が成り立つことが示せた。

つぎに(A.3)式を示すために、

$$1 - B = \frac{B_n}{k^2(\alpha_0 - \alpha_1 + 1)} > 0 \quad (\text{A.5})$$

の関係が成り立つことを証明する。ここで、

$$\begin{aligned} B_n &= \underbrace{Z(\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} + k^2)}_{=: B_{n1}} \\ &+ \underbrace{\left(-2k^2\alpha_1 - k^2(\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - \alpha_0) - \alpha_1^2(\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} + \alpha_0)\right)}_{=: B_{n2}} \end{aligned}$$

である。明らかに、 $B_{n1} > 0$, $B_{n2} < 0$ である。さらに、

$$B_{n1}^2 - B_{n2}^2 = 2k^2(\alpha_0 - \alpha_1 + 1)$$

$$\times \left(2k^2\alpha_1 + \alpha_1^2(\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} + \alpha_0) + k^2(\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - \alpha_0) \right)$$

という関係があることより, $B_{n1}^2 - B_{n2}^2$ の符号が $\alpha_0 - \alpha_1 + 1$ のそれと同一となることがわかる. これは, B_n と $\alpha_0 - \alpha_1 + 1$ の符号が同一となり, (A.5)式が成り立つことを意味している. すなわち, (A.3)式が示された. 以上で, $\beta > 0$ の場合も示せた. $\beta > 0$ の場合は, 等号は成立しないことに留意する.

● $\beta < 0$ の場合: この場合も, $\beta = 0$, $\beta > 0$ の場合とほぼ同様にこなえるが, ここでは, $k \leq \alpha_1/(-\beta)$ であることに留意する. まず, $\beta > 0$ の場合同様の周波数変換およびゲインの調整を行なうことにより, 一般性を失うことなく $\beta = -1$ と仮定できる. このとき,

$$A = \frac{Z(Z + \sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - \alpha_0 - \alpha_1)}{2k(\alpha_0 + \alpha_1 + 1)},$$

$$B = \frac{k^2(1 - \alpha_1) + \alpha_0\alpha_1^2 + (k^2 + \alpha_1^2)\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - Z(\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - k^2)}{k^2(\alpha_0 + \alpha_1 + 1)},$$

ただし,

$$Z = \sqrt{k^2 - 2\alpha_0 + \alpha_1^2 + 2\sqrt{k^2 + \alpha_0^2}}$$

となる. まず,

$$Z \geq \max(k, \alpha_1) \geq \alpha_1 (> 0)$$

であることは容易にわかり, その結果, $A > 0$ が導ける. また, A を,

$$A = \underbrace{\frac{\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - \alpha_0}{k}}_{=: A_1} + \underbrace{\frac{(\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - \alpha_0 - \alpha_1)(Z + \sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - \alpha_0 - \alpha_1)}{2k(\alpha_0 + \alpha_1 + 1)}}_{=: A_2}$$

と書く. ここでも A_1 は $\beta = 0$ のときのそれと同じであることより, $A_1 \leq 1$ (等号成立条件は $\alpha_0 = 0$) が成り立つ. また, $\alpha_0 + \alpha_1 \geq \sqrt{k^2 + \alpha_0^2}$ であるので, $A_2 \leq 0$ (等号成立は $\alpha_0 = 0$, $k = \alpha_1$ とき) であることも導ける. その結果, (A.2)式が成り立つことが示せた (等号は $\alpha_0 = 0$, $k = \alpha_1$ のときに成立).

つぎに (A.3)式を示すために,

$$1 - B = \frac{B_n}{k^2(\alpha_0 + \alpha_1 + 1)} \geq 0$$

を証明する. ここで,

$$B_n = \underbrace{Z(\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - k^2)}_{=: B_{n1}} + \underbrace{2k^2\alpha_1 - (k^2 + \alpha_1^2)(\sqrt{k^2 + \alpha_0^2} - \alpha_0)}_{=: B_{n2}}$$

である. $k^2(\alpha_0 + \alpha_1 + 1) > 0$ であるので, $B_n \geq 0$ を証明す

ればよいことがわかる. $k \leq \alpha_1$ のとき, $B_{n1} \geq 0$ が成り立つ. よって, $B_{n1}^2 - B_{n2}^2 \geq 0$ であれば $B_n \geq 0$ となる. 計算すると,

$$B_{n1}^2 - B_{n2}^2 = 2k^2(\alpha_0 + \alpha_1 + 1) \times \left(\underbrace{(k^2 + \alpha_1^2)\sqrt{k^2 + \alpha_0^2}}_{=: B_{n3}} - \underbrace{(k^2(\alpha_0 + 2\alpha_1) - \alpha_0\alpha_1^2)}_{=: B_{n4}} \right)$$

という関係があることがわかる. $B_{n3} > 0$ となり, また,

$$B_{n3}^2 - B_{n4}^2 = k^2(k^2 - 2\alpha_0\alpha_1 - \alpha_1^2)^2$$

であることも示せる. その結果, $B_{n3} \geq B_{n4}$ であることがわかる. これにより, $B_{n1}^2 - B_{n2}^2 > 0$, さらに, $B_n \geq 0$ が導ける. これらより (A.3)式が示された. また, $\alpha_0 = 0$, $k = \alpha_1$ のときに $B = 1$ となる.

最後に, もとの周波数での等号成立条件は以下ようになる.

$$\alpha_0 = 0, \quad k = \frac{\alpha_1}{-\beta}$$

よって, $\beta < 0$ の場合も示された.

以上で, 定理 1 が示された. □

著者紹介

管野政明 (正会員)

1993 年東京大学大学院工学系研究科情報工学専攻修士課程修了. 同年, いすゞ自動車 (株) 入社. 2003 年英国ケンブリッジ大学工学博士課程修了. 同年ケンブリッジ大学工学部研究助手. 2005 年, 科学技術振興機構, CREST 研究員となり現在に至る. ロバスト制御理論, 計算機代数システムの制御系解析・設計への応用, 精度保証付き計算に関する研究に従事. PhD. 日本機械学会, 日本数式処理学会などの会員.

大西政彦

2006 年東京大学大学院情報理工学研究科修士課程修了. 現在, 住友電気工業 (株) に勤務. 在学生中は制御しやすいシステムの特徴づけとその応用に関する研究に従事.

原辰次 (正会員)

1976 年東京工業大学大学院理工学研究科修士課程制御工学専攻修了. 日本電信電話公社. 長岡技術科学大学を経て, 84 年東京工業大学工学部助教授. 92 年同大学総合理工学研究科教授. 2000 年同大学情報理工学研究科教授. 2002 年東京大学情報理工学研究科教授となり, 現在に至る. 2006 年 George S. Axelby Outstanding Paper Award 受賞. ロバスト制御理論, サンプル値制御理論, 量子制御, 計算機援用制御系設計などの研究に従事, 工学博士. SICE フェロー, IEEE Fellow.