受動性に基づいた3次元姿勢協調

五十嵐 裕 司*・畑 中 健 志*・藤 田 政 之*

Passivity-based 3D Attitude Coordination

Yuji IGARASHI*, Takeshi HATANAKA* and Masayuki FUJITA*

In this paper we consider attitude coordination on balanced graphs, where kinematics of each rigid-body is modeled in $SE(3)$. We show that the kinematics in $SE(3)$ satisfies a passivity property with a positive definite storage function and propose an angular velocity control law for each rigid-body that decreases the sum of the storage functions of the individual rigid-bodies. Attitude coordination results if all rigid-bodies' rotation matrices are positive definite and the communication graph is connected. We show that the speed of convergence in the attitude coordination problem is determined by the second smallest eigenvalue of graph Laplacian. Our results are also extended to the case when there are delays in communication among rigid-bodies and communication failures. Using the concept of brief instability we show that attitude coordination is still achieved even if the graph is changed. Finally, the results are demonstrated through numerical simulations.

Key Words: cooperative control, passivity-based control, flocking, attitude coordination, rigid-body motion in $SE(3)$

1. はじめに

近年、合意問題や群れ問題、被覆問題などの協調制御の研究が活発に行なわれている^{1),2)}。協調制御の目的は分散して存在するエージェントやセンサなどがネットワークによって結合されているシステムに対して、制御目的を達成する分散制御則を設計することである。協調制御の応用としてはモバイルセンサネットワーク、ロボットネットワーク、衛星や航空機のフォーメーション制御などがあげられる^{3)~8)}。

数多く行なわれている協調制御の研究の中に生物の群れに着目した研究がある^{9)~14)}。文献9)では整列、結合、引き離しの3つの行動のみで群れが達成されることが示されており、文献10)では単純なモデルに対し群れを達成する入力提案されている。文献11)では文献10)のモデルを用いて群れが達成されることを証明している。文献14)ではカメラから得られた画像を元に群れを達成する制御則を提案している。それ以外にも本論文に近い研究として受動性に着目した研究がある^{15),16)}。文献15),16)では受動性を有する非線形ダイナミクスをもつエージェントの出力同期が、通信遅れがある場合でも達成されることが示されている。これらをはじめとする従来の協調制御の研究では各エージェントは質点として扱わ

Fig. 1 Attitude coordination

れている。しかしながら、航空機やビジュアルフィードバックシステムなど多くのシステムは $SE(3) := \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ で記述されるのが自然である^{17)~19)}。にもかかわらず、エージェントを $SE(3)$ 空間で扱った協調制御の研究は存在しない。

本論文では $SE(3)$ 空間上での協調制御を考える。具体的には群れ問題を $SE(3)$ 上へ拡張した姿勢協調問題を定義し、これを達成する制御則を提案する。そして各剛体が受動性をもつことを利用し、個々の剛体のエネルギー関数の総和をポテンシャル関数として定義することにより、姿勢協調が達成されることを示す。また、文献13),14)ではグラフが無向グラフに限定されていたが、本論文ではより広いクラスである平衡グラフを扱う。さらに、通信遅れがある場合や、リーダーが存在する場合、グラフの構造と収束の速さの関係、グラフが途中で変化するスイッチングトポロジーについても考察し、シミュレーションにより本論文の有効性を確認する。最後にまとめを行なう。

* 東京工業大学大学院理工学研究科 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Department of Mechanical and Control Engineering Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo

(Received August 2, 2007)

(Revised November 7, 2007)

Fig. 2 Example of directed graph and neighborhood

2. 問題設定

本論文では (1) 式の運動学モデルで表わされる n 個の剛体を考える (Fig. 1).

$$\begin{cases} \dot{p}_i = e^{\hat{\zeta}_i} v_i \\ \dot{e}^{\hat{\zeta}_i} = e^{\hat{\zeta}_i} \hat{\omega}_i \quad \zeta_i = \theta_i \xi_i \end{cases} \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

ここで $p_i \in \mathcal{R}^3$, $e^{\hat{\zeta}_i} \in SO(3)$ は 3 次元空間上に固定された慣性系 Σ_w から見た剛体 i の位置と姿勢である。 $v_i \in \mathcal{R}^3$ は剛体 i のボディ速度, $\omega_i \in \mathcal{R}^3$ は剛体 i のボディ角速度である。また $\xi_i \in \mathcal{R}^3$ は回転軸, $\theta_i \in \mathcal{R}$ は回転軸回りの回転角度, ζ_i はこれらの積を表す。(1) 式の運動学モデルについては文献 17) (pp. 29, (27) 式) に従っている。また本論文では文献 18) (pp. 27, (2.9) 式) で示されている指数表記によって姿勢を表現する。 $\wedge$ (wedge) は $\mathcal{R}^3$ から 3×3 の歪対称行列 $so(3)$ への演算子であり、次式で定義される。

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}^\wedge := \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

また $\vee$ (vee) は $\wedge$ の逆演算を表すものとする。さらに、回転行列 $e^{\hat{\zeta}_i}$ の歪対称成分を

$$\text{sk}(e^{\hat{\zeta}_i}) := \frac{1}{2}(e^{\hat{\zeta}_i} - e^{-\hat{\zeta}_i}) \quad (3)$$

と定義する。

つぎに剛体間の情報交換をグラフによって表す。グラフ $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ は頂点の集合 $\mathcal{V}$ と辺の集合 $\mathcal{E}$ から構成される。本論文においてはグラフの頂点は剛体、辺は通信を表わしており、辺に向きが存在する有向グラフを考える。有向グラフを扱うことによって通信が双方向でない場合でも扱えるようになる。また、本論文では辺の矢印の先の剛体が矢印のないほうの剛体の情報を得ることができるとする。有向グラフにおいて各頂点に入る辺の数を入次数、各頂点から出る辺の数を出次数という。つぎに、各剛体 i に対する近傍 $\mathcal{N}_i$ を次式で定義する²⁾。

$$\mathcal{N}_i := \{j \in \mathcal{V} \mid (j, i) \in \mathcal{E}\} \quad (4)$$

近傍とは剛体間の情報のやり取りによって決まる。つまり各剛体は近傍の剛体のみと通信できる。有向グラフ、近傍の例を Fig. 2 に載せる。Fig. 2 の例では剛体 1 と剛体 5 から剛体 4 へ矢印が向かっているため剛体 4 の近傍は $\mathcal{N}_4 = \{v_1, v_5\}$

Fig. 3 Example of attitude coordination in 2D

となる。

本論文では以下の仮定をおく。

(A1): 各剛体のボディ速度は等しく、1 で正規化されているとする。つまり、 $v_i = v_j \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ であり、かつ $\|v_i\| = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ である。ここで $\|v_i\|$ はベクトル v_i の 2- ノルムである。

(A2): グラフは固定、平衡、弱連結である。

本論文では (1) 式の運動学モデルを対象としており、仮定 (A1) の下でボディ角速度 ω_i が制御入力であると考ええる。仮定 (A1) は、すべての剛体が自分の座標系において同じ速度を持ち、速さは一定で 1 に正規化されているということを意味する。これは文献 13), 14) と同じ仮定である。仮定 (A2) においてグラフが固定とは、グラフが変化しないことである。ただし、本論文では 5 節においてグラフが変化する場合についても考える。また、グラフが平衡とは、すべての頂点において入次数と出次数が等しいことである。たとえば Fig. 2 のグラフは各頂点において入次数と出次数が 2 で等しいので平衡グラフである。平衡グラフは通信が双方向である無向グラフを完全に含んでおり、グラフに関する仮定として十分弱いものである。また、グラフが弱連結とは各頂点に対して辺で結ばれている頂点が存在することである。グラフが平衡かつ弱連結であれば強連結であることが知られている^{15), 16)}。

本論文における協調制御の目的はつぎに定義される姿勢協調を達成することである。

【定義】 姿勢協調

すべての剛体の姿勢が同じ値に収束する、つまり

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{\hat{\zeta}_i(t)} - e^{\hat{\zeta}_j(t)}) = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (5)$$

が成り立つとき、姿勢協調が達成されたという。すなわち、姿勢協調とはすべての剛体の回転行列が同じ値に収束することをいう。

仮定 (A1) より、すべての剛体の姿勢が等しくなれば、慣性系から見た速度も等しくなる (Fig. 1)。これを 2 次元平面の場合で考えると Fig. 3 のようにすべての剛体が常に同じ速さで $x_i(x_j)$ 軸方向へ進んでいるので、すべての剛体と同じ向きになれば、すべての剛体と同じ速度で進む群れ (Flocking)^{9)~14)} をなすことになる。姿勢協調とは 2 次元平面における向きに対し、3 次元空間における姿勢を対応させたものである。

本論文で扱う運動学モデル (1) において回転行列を z 軸回りに固定し、ボディ速度を x 軸方向に単位速度で動くとした場合、つまり

$$e^{\hat{\zeta}_i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

と置くと、文献 13) の 2 次元の運動学モデルと等価になり、回転行列として Z-Y-Z オイラー角を用いて、ボディ速度を z 軸方向に単位速度で動くとする文献 13) で考えられている 3 次元の運動学モデルと等価になる。以上のことから本論文の運動学モデル (1) は文献 13) の運動学モデルを含むより一般的なものであることがわかる。

3. 収束性の解析

本節では前節で定義した姿勢協調を達成するための角速度入力を提案し、その角速度入力によって姿勢協調が達成されることを示す。

3.1 角速度入力の提案

文献 13) では 2 次元の群れを達成する角速度入力として

$$\omega_i = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sin(\theta_i - \theta_j) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (7)$$

を提案している。また、角速度入力として (7) 式を用いた場合、その閉ループ系が Kuramoto 振動子のモデルに変換可能であることが知られている¹³⁾。

本論文では (7) 式を 3 次元へ拡張した、つぎの角速度入力を提案する。

$$\omega_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{sk}(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j})^\vee \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (8)$$

(8) 式では角速度入力として近傍の剛体との相対姿勢に関する誤差ベクトルの総和を用いている。ここで、(6) 式の回転行列を用いると、(8) 式の角速度入力は (7) 式と同じになる。(注意) 本論文では各剛体の角速度入力に対し、フィードバックゲインを付けていないが、ゲインがある場合についても本論文とは同様の結果が得られる。

つぎに (8) 式の角速度入力によって姿勢協調が達成されることを示す。このとき、各剛体の運動学モデル (1) がつぎの補題で示す性質をもつことを利用する¹⁹⁾(pp. 42, Lemma 1)。

[補題 3.1] 剛体の運動学モデル (1) は $\nu_i = [v_i^T \ \omega_i^T]^T$, $y_i = [(e^{-\hat{\zeta}_i} p_i)^T \ (\text{sk}(e^{\hat{\zeta}_i})^\vee)^T]^T$ とすると以下の不等式を満たす。

$$\int_0^T \nu_i^T y_i dt \geq -\beta \quad (9)$$

ここで β は正の定数である。

(証明) つぎのエネルギー関数を考える。

$$V_i = \frac{1}{2} \|p_i\|^2 + \phi(e^{\hat{\zeta}_i}) := \frac{1}{2} \|p_i\|^2 + \frac{1}{2} \text{tr}(I - e^{\hat{\zeta}_i}) \quad (10)$$

$\|p_i\|$ はベクトル p_i の 2 ノルムを表わしている。このエネルギー関数を微分すると

$$\dot{V}_i = \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e^{-\hat{\zeta}_i} p_i \\ \text{sk}(e^{\hat{\zeta}_i})^\vee \end{bmatrix} = \nu_i^T y_i \quad (11)$$

となる。ここで $\dot{\phi}(e^{\hat{\zeta}_i})$ の計算は文献 17)(pp. 32, Lemma 12) を用いている。(11) 式の両辺を積分すると

$$\int_0^T \nu_i^T y_i dt = V_i(T) - V_i(0) \geq -V_i(0) := -\beta \quad (12)$$

となり、題意が証明される。□

補題 3.1 は ν_i を運動学モデル (1) の入力、 y_i を出力とする剛体の運動学モデル (1) が入力 ν_i から出力 y_i まで受動性²⁰⁾をもっていることを示している。

補題 3.1 より本論文の主要結果である、つぎの定理が成立する。

《定理 3.1》運動学モデル (1) をもつ n 台の剛体が存在する状況において、各剛体に (8) 式の角速度入力を加える。このとき、仮定 (A1), (A2) が満たされ、かつすべての剛体の回転行列が正定であれば姿勢協調が達成される。

(証明) ポテンシャル関数を以下のように定義する。

$$V := \phi(e^{\hat{\zeta}_1}) + \dots + \phi(e^{\hat{\zeta}_n}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \text{tr}(I - e^{\hat{\zeta}_i}) \quad (13)$$

本論文では各剛体が補題 3.1 を満たすため、文献 15), 16) と同じ考え方にに基づき、各剛体の姿勢に関するエネルギー関数の和をポテンシャル関数として定義する。補題 3.1 においては位置に関するエネルギー関数も考えていたが、仮定 (A.1) より姿勢に関するエネルギー関数の和をポテンシャル関数として定義する。

補題 3.1 より (13) 式を微分すると

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^n \left(\text{sk}(e^{\hat{\zeta}_i})^\vee \right)^T \omega_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left(\text{sk}(e^{\hat{\zeta}_i})^\vee \right)^T \text{sk}(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j})^\vee \end{aligned} \quad (14)$$

となる。

まず、 $\left(\text{sk}(e^{\hat{\zeta}_i})^\vee \right)^T \text{sk}(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j})^\vee$ の項について考える。まず任意の 3 次元ベクトル $a \in \mathcal{R}^3, b \in \mathcal{R}^3$ に対して $a^T b = -\frac{1}{2} \text{tr}(\hat{a} \hat{b})$ が成り立つことから次式が成立する。

$$\begin{aligned} &\left(\text{sk}(e^{\hat{\zeta}_i})^\vee \right)^T \text{sk}(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j})^\vee \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left(\text{sk}(e^{\hat{\zeta}_i}) \text{sk}(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j}) \right) \\ &= -\frac{1}{8} \text{tr} \left(2e^{\hat{\zeta}_j} - 2e^{-2\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j} \right) \\ &= -\phi(e^{\hat{\zeta}_i}) + \phi(e^{\hat{\zeta}_j}) - \frac{1}{4} \text{tr} \left((e^{\hat{\zeta}_i} + e^{-\hat{\zeta}_i})(I - e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j}) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

任意の準正定対称行列 $A \in \mathcal{R}^{n \times n}, B \in \mathcal{R}^{n \times n}$ について $\lambda_{\min}(B) \text{tr}(A) \leq \text{tr}(AB)$ が成り立つ (文献 21), pp. 292, (10. 35) 式) ことから次式を得る。ここで、 $\lambda_{\min}(B)$ は行列 B の最小固有値を表わしている。

$$-\text{tr} \left((e^{\hat{\zeta}_i} + e^{-\hat{\zeta}_i})(I - e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j}) \right) \leq -\lambda_{\min}(e^{\hat{\zeta}_i} + e^{-\hat{\zeta}_i}) \text{tr}(I - e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j}) \quad (16)$$

一般に回転行列 $e^{\hat{\zeta}_i}$ は対称行列とは限らないが, $e^{\hat{\zeta}_i} + e^{-\hat{\zeta}_i}$ は必ず対称行列となることを使っている. (16) 式より, 以下の不等式が成り立つ.

$$\left(\text{sk}(e^{\hat{\zeta}_i})^\vee \right)^T \text{sk}(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j})^\vee \leq -\phi(e^{\hat{\zeta}_i}) + \phi(e^{\hat{\zeta}_j}) - \frac{1}{2} \lambda_{\min}(e^{\hat{\zeta}_i} + e^{-\hat{\zeta}_i}) \phi(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j}) \quad (17)$$

よってポテンシャル関数の微分 (14) は次式を満たす.

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left(-\phi(e^{\hat{\zeta}_i}) + \phi(e^{\hat{\zeta}_j}) - \frac{1}{2} \lambda_{\min}(e^{\hat{\zeta}_i} + e^{-\hat{\zeta}_i}) \phi(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j}) \right) \quad (18)$$

今, グラフが平衡であると仮定しているので

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \phi(e^{\hat{\zeta}_i}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \phi(e^{\hat{\zeta}_j}) \quad (19)$$

が成り立つ. これを用いるとポテンシャル関数の微分は

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{\min}(e^{\hat{\zeta}_i} + e^{-\hat{\zeta}_i}) \phi(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j}) \leq 0 \quad (20)$$

となり, 準負定であることがわかる.

つぎにラ・サールの不変原理を用いて収束を証明する. まず, つぎの集合 E を定義する.

$$E := \{e^{\hat{\zeta}_i} \in SO(3), \forall i \in \{1, \dots, n\} \mid e^{\hat{\zeta}_i} > 0, \dot{V} \equiv 0\} \quad (21)$$

すべての剛体の回転行列が正定であるという仮定を用いると, (20) 式より,

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow \phi(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j}) = 0 \quad (j, i) \in \mathcal{E} \quad (22)$$

となる. 今, グラフが強連結であるので, 集合 E は

$$E = \{e^{\hat{\zeta}_i} \in SO(3), \forall i \in \{1, \dots, n\} \mid e^{\hat{\zeta}_i} > 0, e^{\hat{\zeta}_i} = e^{\hat{\zeta}_j} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}\} \quad (23)$$

と書き換えることができる. また, $e^{\hat{\zeta}_i} = e^{\hat{\zeta}_j} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ の場合, 角速度入力 (8) はすべての剛体で 0 となる. よって集合 E は不変集合となる. 以上のことより, (5) 式が成り立ち, 制御目標である姿勢協調が達成されることが示される. $\square$

一般的に協調制御に関する研究ではポテンシャル関数を近傍との誤差に関するエネルギー関数の和として定義し, これを用いて定理を証明することが多い²⁾. しかし, このようなポテンシャル関数を用いて収束性の解析を行なった場合, グラフ構造が木構造であるという非常に強い仮定が必要になる²²⁾. 本論文では各剛体が補題 3.1 の性質を満たすことより, エネルギー関数の和をポテンシャル関数として定義し, 平衡グラフにおいても姿勢協調が達成されることを証明している.

定理 3.1 では, 回転行列 $e^{\hat{\zeta}_i}$ は正定であるという仮定をお

くが, これは, 回転軸まわりの回転角度 θ_i が $|\theta_i| < \frac{\pi}{2}$ を満たすことと等価である. この仮定は一般的に $SO(3)$ 全体を考えると特異点が存在するので, それを回避するための仮定である.

3.2 通信遅れがある場合の考察

つぎに剛体間で通信遅れがある場合について考察する. この場合, 文献 15), 16) と同様に姿勢協調の定義を以下のように変更する.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{\hat{\zeta}_i(t-T_{ij})} - e^{\hat{\zeta}_j(t)}) = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (24)$$

ここで $T_{ij} \geq 0$ は i 番目の剛体から j 番目の剛体への通信遅れの総和であり, 有界で時不変であると仮定する.

各剛体の角速度入力を

$$\omega_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{sk}(e^{-\hat{\zeta}_i(t)} e^{\hat{\zeta}_j(t-T_{ji})})^\vee \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (25)$$

とすることで, つぎの系を得る.

[系 3.1] 運動学モデル (1) をもつ n 台の剛体が存在する状況において, 各剛体に (25) 式の角速度入力を加える. このとき, 仮定 (A1), (A2) が満たされ, かつすべての剛体の回転行列が正定であれば (24) 式の意味で姿勢協調が達成される. (証明) この証明はポテンシャル関数を以下のようにすることによって定理 3.1 と同様に証明できる.

$$V_{\text{delay}} := \sum_{i=1}^n \phi(e^{\hat{\zeta}_i(t)}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{t-T_{ji}}^t \phi(e^{\hat{\zeta}_i(\tau)}) d\tau \quad (26)$$

$\square$

系 3.1 の証明におけるポテンシャル関数 (26) は文献 15), 16) を参考にしている.

3.3 リーダが存在する場合

本項では文献 11), 13), 14) と同様にリーダーが存在する場合について考察を行なう²³⁾. ただし, 通信遅れはないものとする.

リーダーが存在する場合の姿勢協調とはすべての剛体の回転行列がリーダーの回転行列に収束することを意味する. つまり, リーダを 0 番目の剛体と考え, リーダは常に一定の方向に仮定 (A1) と同じ速さで動くとなると姿勢協調は次式で定義される.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{\hat{\zeta}_i(t)} - e^{\hat{\zeta}_0(t)}) = 0 \quad \forall i = \{1, \dots, n\} \quad (27)$$

この目的のために, (8) 式の角速度入力を以下のように変更する.

$$\omega_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left(\text{sk}(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j})^\vee \right) + c_i \text{sk}(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_0})^\vee \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (28)$$

ここで c_i は剛体 i がリーダーとの相対姿勢がわかる場合は 1, わからない場合は 0 となる変数である. この角速度入力は (8) 式にリーダーとの相対姿勢に関する角速度入力を加えたものになっている.

[系 3.2] 運動学モデル (1) をもつ n 台の剛体と常に一定の

方向に仮定 (A1) と同じ速さで移動する 1 台のリーダーが存在する状況において、各剛体に (28) 式の角速度入力を加える。また少なくとも 1 つの剛体はリーダーとの相対姿勢がわかるとする。このとき、仮定 (A1), (A2) が満たされ、かつすべての剛体とリーダーとの相対姿勢 $e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_0}$, $i = \{1, \dots, n\}$ が正定であれば (27) 式の意味で姿勢協調が達成される。

(証明) この証明はポテンシャル関数を (29) 式とすることで定理 3.1 と同様に証明できる。

$$V_{\text{leader}} := \sum_{i=1}^n \phi(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_0}) \quad (29)$$

□

系 3.2 のポテンシャル関数 (29) は各剛体とリーダーとの相対姿勢に関するエネルギー関数の和を意味している。

4. 指数収束性と収束の速さ

前節では姿勢協調において漸近的な収束性を示したが、本節では指数収束性とグラフ構造と収束の速さについて述べる。

指数収束性を議論するために、つぎの記号を定義する。

$L_{\text{sym}} := \frac{1}{2}(L + L^T)$, $\mathbf{1} := [1, \dots, 1]^T$. L_{sym} はグラフラプラジアン L の対称成分を表わしている。また、グラフが平衡ならばグラフラプラジアン L と完全グラフのグラフラプラジアン $M = nI - \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ との間に $MLM = n^2L$ の関係がある。ここで完全グラフとは異なる任意の 2 頂点に対しそれらの頂点を結ぶ辺が存在するグラフのことである。また完全グラフのグラフラプラジアンに関する二次形式はすべての剛体間の誤差の総和を表わす。

収束の速さを議論するために

$$V_{\text{exp}}(t) := \text{tr} \left((e^{\hat{\zeta}(t)})^T (M \otimes I_3) e^{\hat{\zeta}(t)} \right) \geq 0 \quad (30)$$

を定義する。ここで $e^{\hat{\zeta}(t)} := [e^{-\hat{\zeta}_1(t)}, \dots, e^{-\hat{\zeta}_n(t)}]^T$ である。(30) 式で定義された $V_{\text{exp}}(t)$ は以下の性質をもつ。

(1) 姿勢協調の達成と $V_{\text{exp}}(t)$ が 0 に収束することは等価であり、 $V_{\text{exp}}(t)$ が小さいほど各剛体間の姿勢誤差は小さい。

(2) $V_{\text{exp}}(0)$ は各剛体の初期状態のみに依存し、グラフには依存しない。

以上の 2 つの性質より $V_{\text{exp}}(t)$ は収束の速さを調べる指標として妥当であると考えられる。

以上のことを用いることによって、つぎの定理が成り立つ。

《定理 4.1》運動学モデル (1) をもつ n 台の剛体が存在する状況において、角速度入力として各剛体に (8) 式の角速度入力を加えることを考える。このとき、仮定 (A1), (A2) が満たされ、かつすべての剛体間の相対姿勢が正定であるならば、以下の不等式が成り立つ。

$$V_{\text{exp}}(t) \leq V_{\text{exp}}(0) e^{-\epsilon \lambda_{\min 2}(L_{\text{sym}}) t} \quad (31)$$

ここで $\epsilon := \min_{i,j,t} \lambda_{\min}(e^{-\hat{\zeta}_i(t)} e^{\hat{\zeta}_j(t)} + e^{-\hat{\zeta}_j(t)} e^{\hat{\zeta}_i(t)})$, $\lambda_{\min 2}(L_{\text{sym}})$ はグラフラプラジアン L_{sym} の 2 番

Fig. 4 $\lambda_{\min 2}(L_{\text{sym}}) = 2.5$

Fig. 5 $\lambda_{\min 2}(L_{\text{sym}}) = 2$

Fig. 6 $\lambda_{\min 2}(L_{\text{sym}}) = 1$

Fig. 7 $\lambda_{\min 2}(L_{\text{sym}}) = 1$

目に小さい固有値である。 ϵ は相対姿勢に関する最小固有値の最小値を表わしており、後の相対姿勢は正定であるという仮定より $\epsilon > 0$ となる。

(証明) 付録を参照。

(31) 式の右辺の指数関数を見ると、 $\lambda_{\min 2}(L_{\text{sym}})$ の値が大きいほど減少が速く、 $V_{\text{exp}}(0)$ はグラフに依存しない値なので、(31) 式の右辺全体は $\lambda_{\min 2}(L_{\text{sym}})$ の値が大きいグラフ構造ほど減少が速い。よって、定理 4.1 より $\lambda_{\min 2}(L_{\text{sym}})$ の値が大きいグラフ構造ほど $V_{\text{exp}}(t)$ は 0 に速く収束することがわかる。以上よりグラフラプラジアン L の対称成分の 2 番目に小さい固有値が大きいグラフ構造ほど収束が速いことがわかる。

一般に、辺の数が多く、分散しているグラフ構造のグラフラプラジアン L の対称成分の 2 番目に小さい固有値が大きい。たとえば Fig. 4~7 を考えてみると、Fig. 4 が一番グラフラプラジアン L の 2 番目に小さい固有値が大きい。この例からも、辺の数が多く、いろいろな剛体と通信するグラフ構造のほうがグラフラプラジアン L の 2 番目に小さい固有値が大きいことがわかる。

本節ではグラフ構造と収束の速さの関係について述べたが、合意問題におけるこれらの関係については文献 2) で述べられている。本節の結果は合意問題における結果を 3 次元空間へ拡張したものになっている。文献 2) では収束値を用いてグラフラプラジアン L の 2 番目に小さい固有値と収束の速さについて解析を行なっているのに対して、本論文では、文献 2) とは別のポテンシャル関数を用いて解析を行なった。

漸近的な収束性が成り立つためには各剛体の回転行列が正定であればよいことを 3 節で示したが、指数収束が成り立つためには、すべての剛体間の相対姿勢に関する回転行列が正定であればよいことを定理 4.1 は示している。一般的には相対姿勢に関する回転行列が正定である仮定のほうが厳しい仮定である。

5. スイッチングトポロジーにおける収束性解析

前節まではグラフが固定の場合を扱った。本節では文献 11), 14), 16) と同様にグラフが変化するスイッチングトポロジーの場合を考える。グラフが途中で変化する状況としては、通信が途切れる場合や通信相手が変わる場合が考えられる。本論文では前章の指数収束性と一時不安定性 (brief instabil-

Fig. 8 Concept of brief instability

ity) と呼ばれる概念を用いて解析を行なう²⁴⁾。一時不安定性とはスイッチングシステムに対する考え方であり、不安定なシステムに切り替わっても短い間ならばシステム全体の安定性は失われないという考え方である。

まず、 $g(t)$ を時刻 t のにおけるグラフの形状とする。また、 $t_i (i = 0, \dots, m)$ をグラフが変化した時刻、 $t_0 = 0$ とし、 $t_{i+1} - t_i \geq \tau_D, \tau_D > 0$ なる条件が満たされるとする。ここで τ_D は停留時間 (dwell time) と呼ばれる。これは無限回のグラフの切り換えを防ぐための条件である。本節では、以下のような二種類のグラフの集合を定義する。

- (1) G_c : 平衡で強連結であるグラフの集合
- (2) G_{dc} : 平衡であるが強連結でないグラフの集合

本論文ではこれらの集合のどちらかに属するようなグラフにしか変化しないものと仮定する。

つぎに、以下の関数を定義する。

$$\mathcal{X}(g(t)) := \begin{cases} 0 & \text{if } g(t) \in G_c \\ 1 & \text{if } g(t) \in G_{dc} \end{cases} \quad (32)$$

つまり、 $\mathcal{X}(g(t))$ はグラフが強連結ならば 0、強連結でないならば 1 となる関数である (Fig. 8)。また、この関数を用いて強連結ではない時間を以下のように定義する。

$$T(\tau, t) := \int_{\tau}^t \mathcal{X}(g(s)) ds \quad (33)$$

定義より $T(\tau, t_1) + T(t_1, t_2) = T(\tau, t_2)$ が成り立つ。

以上の定義を用いると以下の定理が成り立つ。

【定理 5.1】 運動学モデル (1) をもつ n 台の剛体が存在する状況において、各剛体に (8) 式の角速度入力を加える。また、仮定 (A1) が満たされ、すべての剛体間の相対姿勢が正定であるとする。このとき、グラフが G_c, G_{dc} のどちらかに属するようなグラフにしか変化せず、かつ $\lim_{t \rightarrow \infty} (t - T(0, t)) = \infty$ ならば姿勢協調が達成される。

(証明) グラフが強連結でないならばグラフラプラジアン L の階数が $n-2$ 以下になり、2 番目に小さい固有値が必ず 0 になる²⁾ことを用いると、前節の定理 4.1 より、時刻 $t \in [t_i, t_{i+1})$ において次式が成立する。

$$V_{\exp}(t) \leq \begin{cases} V_{\exp}(t_i) e^{-\lambda^*(t-t_i)} & \text{if } g(t) \in G_c \\ V_{\exp}(t_i) & \text{if } g(t) \in G_{dc} \end{cases} \quad (34)$$

ここで $\lambda^* := \min_{G_c} \epsilon \lambda_{\min 2}(L_{\text{sym}})$ である。(34) 式は、(32) 式で定義した関数 $\mathcal{X}(g(t))$ を用いると以下のように書きかえ

られる。

$$V_{\exp}(t) \leq V_{\exp}(t_i) e^{-\lambda^*(1-\mathcal{X}(g(t)))(t-t_i)} \quad (35)$$

また (35) 式は (33) 式より

$$V_{\exp}(t) \leq V_{\exp}(t_i) e^{-\lambda^*(t-t_i-T(t_i, t))} \quad (36)$$

となる。ここで $T(t_i, t) = \int_{t_i}^t \mathcal{X}(g(s)) ds = \mathcal{X}(g(t))(t-t_i)$ を用いている。これは、区間 $t \in [t_i, t_{i+1})$ ではグラフは変化しないので $\mathcal{X}(g(t))$ はある一定の値となるからである。

同様のことを区間 $[t_{i-1}, t_i)$ で考えると以下の式が成立する。

$$V_{\exp}(t_i) \leq V_{\exp}(t_{i-1}) e^{-\lambda^*(t_i-t_{i-1}-T(t_{i-1}, t_i))} \quad (37)$$

これを (36) 式に代入すると

$$V_{\exp}(t) \leq V_{\exp}(t_{i-1}) e^{-\lambda^*(t-t_{i-1}-T(t_{i-1}, t))} \quad (38)$$

が成り立つ。この操作を次々と続けていくと

$$V_{\exp}(t) \leq V_{\exp}(0) e^{-\lambda^*(t-T(0, t))} \quad (39)$$

を得る。 $\lim_{t \rightarrow \infty} (t - T(0, t)) = \infty$ ならば

$$V_{\exp}(t) = 0 \quad t \rightarrow \infty \quad (40)$$

となり、姿勢協調が達成される。□

この定理は前節までであったグラフは固定であるという仮定を弱めたものとなっている。ただし、グラフが常に平衡であることと $\lim_{t \rightarrow \infty} (t - T(0, t)) = \infty$ という仮定がある。ここで $\lim_{t \rightarrow \infty} (t - T(0, t)) = \infty$ の意味は強連結でないグラフである時間が短いことを意味している。

本節の結果は文献 11), 14) の結果を 3 次元空間へ一般化したものとなっている。文献 11), 14) では結合連結性 (jointly connected) を用いて解析を行なっている。しかし、結合連結性はエネルギー関数を用いた解析が困難なため、本論文ではエネルギー関数の収束、発散によって解析が行なえる一時不安定性を用いて解析を行なった。

6. シミュレーション

この節では、グラフが固定の場合と変化する場合の両方についてシミュレーションを行ない、本論文の有効性を検証する。まずはグラフが固定の場合について説明する。剛体の台数を 5 台とし、各剛体の初期値を (41) 式のように設定する。

$$\begin{aligned} p_1(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T & \zeta_1(0) &= \begin{bmatrix} -0.21 & -0.50 & 0.77 \end{bmatrix}^T \\ p_2(0) &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T & \zeta_2(0) &= \begin{bmatrix} 0.52 & -0.76 & 0.52 \end{bmatrix}^T \\ p_3(0) &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T & \zeta_3(0) &= \begin{bmatrix} -0.21 & 0.77 & -0.50 \end{bmatrix}^T \\ p_4(0) &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T & \zeta_4(0) &= \begin{bmatrix} -0.14 & 0.51 & -0.51 \end{bmatrix}^T \\ p_5(0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T & \zeta_5(0) &= \begin{bmatrix} 0 & 1.05 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (41)$$

さらに、各剛体のボディ速度を以下のようにする。

Fig. 9 Graph topology in fixed graph case

Fig. 10 Simulation result in fixed graph case

Fig. 11 Rotation vector ζ in fixed graph case

$$v_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \forall i \in \{1, \dots, 5\} \quad (42)$$

今回は Fig. 9 のグラフで固定の場合についてシミュレーションを行なう。このグラフは各頂点の入次数と出次数が共に 1 であるので平衡グラフである。

Fig. 10 に各剛体の軌道と姿勢を示す。このグラフにおいて横、縦、高さはそれぞれ x 座標、 y 座標、 z 座標を表わしている。図の中にある数字は剛体の番号であり、Fig. 9 のグ

Fig. 12 Graph topology in switching graph case

Fig. 13 Simulation result in switching graph case

ラフ中の番号と対応している。また剛体の番号があるところが初期状態である。この図よりすべての剛体と同じ姿勢に収束しており、かつ同じ方向へ移動していることがわかる。また、回転ベクトル ζ_i の値を Fig. 11 に示す。この図において横軸は時刻 t を表わしており、縦軸は回転ベクトル ζ_i の各要素を表わしている。この図よりすべての剛体の回転ベクトル ζ_i が同じ値に収束していることがわかる。以上より実際に姿勢協調が達成されていることがわかる。

つぎにグラフが途中で変化する場合のシミュレーションを行なう。この場合は相対姿勢における回転行列が正定である必要があるので、剛体の初期値を (43) 式のように変更する。

$$\begin{aligned} p_1(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T & \zeta_1(0) &= \begin{bmatrix} -0.07 & -0.24 & 0.52 \end{bmatrix}^T \\ p_2(0) &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T & \zeta_2(0) &= \begin{bmatrix} 0.44 & -0.38 & 0.44 \end{bmatrix}^T \\ p_3(0) &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T & \zeta_3(0) &= \begin{bmatrix} -0.13 & 0.51 & -0.51 \end{bmatrix}^T \\ p_4(0) &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T & \zeta_4(0) &= \begin{bmatrix} -0.14 & 0.51 & -0.51 \end{bmatrix}^T \\ p_5(0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T & \zeta_5(0) &= \begin{bmatrix} 0 & 1.05 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (43)$$

ボディ速度に関しては固定グラフの場合と同じ値にする。今回は Fig. 12 に示す 2 種類のグラフを周期 2 秒で繰り返す。これらのグラフにおいては片方は平衡、強連結グラフであり、もう片方は平衡であるが強連結でないグラフである。

Fig. 13 に各剛体の軌道と姿勢を示す。固定グラフの場合と同様に横、縦、高さはそれぞれ x 座標、 y 座標、 z 座標を表わし、図の中にある数字は剛体の番号であり、Fig. 12 のグラフ中の番号と対応している。また剛体の番号があるところが初期状態である。図よりグラフが途中で変化してもすべての剛体と同じ姿勢に収束しており、かつ同じ方向へ移動して

いることがわかる。以上により本論文の有効性が示された。

また、リーダーが存在する場合のシミュレーションや実験は文献 23) を参照されたい。

7. おわりに

本論文では協調制御の一つとして姿勢協調を取り上げ、運動学モデルの剛体に対して姿勢協調を達成する角速度入力を提案した。このとき、受動性を利用して各剛体自身のエネルギー関数の総和をポテンシャル関数として定義することによって、平衡グラフまで収束を証明できることを示した。また、本論文の結果は従来の結果に対して 3 次元空間への一般化となっていることを示した。さらにポテンシャル関数を変更することによって、通信遅れがある場合、リーダーが存在する場合の収束について、グラフラプラジアン対称成分の 2 番目に小さい固有値により収束の速さが異なること、スイッチングトポロジーの場合の収束についても述べた。最後にシミュレーションを行ない本論文の有効性を確認した。

本研究の一部は、日本学術振興会科学研究費補助金課題番号 19560437 の助成を受けました。

参 考 文 献

- 1) V. Kumar, N. Leonard and A. S. Morse, eds.: *Cooperative Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, **309**, Springer (2004)
- 2) R.O. Saber, J.A. Fax and R.M. Murray: Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems, *Proc. of the IEEE*, **95**-1, 215/233 (2007)
- 3) 桜間, 中野: 衝突回避を考慮した複数ロボットのリーダー追従型隊列誘導, 第 7 回 SICE 制御部門大会予稿集, 71-1-2 (2007)
- 4) T.H. Kim, T. Sugie and T. Korogi: Distributed Coordination Strategy for Target-enclosing Operations by Particle Swarms, 第 7 回 SICE 制御部門大会予稿集, 71-1-4 (2007)
- 5) 根, 福島, 松野: 衝突回避問題に適合した分枝限定法に基づく複数移動体の編隊制御, 第 7 回 SICE 制御部門大会予稿集, 71-1-3 (2007)
- 6) 吉岡, 滑川: 仮想構造を用いたマルチビークルシステムのフォーメーション制御, 第 7 回 SICE 制御部門大会予稿集, 71-1-1 (2007)
- 7) G. Mohanarajah and T. Hayakawa: Influence of Stochastic Communication Channel Collapse in the Stability of a Formation of Multiple Agents, 第 35 回 SICE 制御理論シンポジウム予稿集, 193/196 (2006)
- 8) 倉林, 下根, 船戸: 周期的計測信号を利用した移動ロボット群の狭領域通過行動, 第 35 回 SICE 制御理論シンポジウム予稿集, 201/204 (2006)
- 9) C.W. Reynolds: Flocks, Herds and Schools: A Distributed Behavioral Model, *Computer Graphics*, **21**-4, 25/34 (1987)
- 10) T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen and O. Shochet: Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles, *Physical Review Letters*, **75**-6, 1226/1229 (1995)
- 11) A. Jadbabaie, J. Lin and A.S. Morse: Coordination of Groups of Mobile Autonomous Agents using Nearest Neighbor Rules, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **48**-6, 988/1001 (2003)
- 12) R.O. Saber: Flocking for Multi-Agent Dynamic Systems: Algorithms and Theory, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **51**-3, 401/420 (2006)
- 13) N. Moshtagh and A. Jadbabaie: Distributed Geodesic Control Laws for Flocking of Nonholonomic Agents, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **52**-4, 681/686 (2007)
- 14) N. Moshtagh, A. Jadbabaie and K. Daniilidis: Vision-based Distributed Coordination and Flocking of Multi-agent Systems, *Robotics: Science and Systems II*, 41/48, MIT Press (2005)
- 15) N. Chopra and M.W. Spong: Output Synchronization of Nonlinear Systems with Time Delay in Communication, *Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 4986/4992 (2006)
- 16) N. Chopra and M.W. Spong: Passivity-Based Control of Multi-Agent Systems, in *Advances in Robot Control: From Everyday Physics to Human-Like Movements*, S. Kawamura and M. Svinin, eds., 107/134, Springer (2006)
- 17) F. Bullo and R.M. Murray: Tracking for Fully Actuated Mechanical Systems: A Geometric Framework, *Automatica*, **35**-1, 17/34 (1999)
- 18) R. Murray, Z. Li and S.S. Sastry: *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press (1994)
- 19) M. Fujita, H. Kawai and M.W. Spong: Passivity-based Dynamic Visual Feedback Control for Three Dimensional Target Tracking: Stability and L_2 -gain Performance Analysis, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, **15**-1, 40/52 (2007)
- 20) H.K. Khalil: *Nonlinear Systems, Third Edition*, Prentice Hall (2002)
- 21) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, コロナ社 (1978)
- 22) 五十嵐, 藤田: 群れ行動の協調制御に関する一考察 —受動性アプローチ, 第 35 回 SICE 制御理論シンポジウム予稿集, 197/200 (2006)
- 23) 藤田, 五十嵐, 小林: 受動性に基づいた 3 次元姿勢協調におけるリーダー追従問題 (収束性の解析と実験的考察), 第 10 回「運動と振動の制御」シンポジウム予稿集, 216/219 (2007)
- 24) J. Hespanha, O. Yakimenko, I. Kaminer and A. Pascoal: Linear Parametrically Varying Systems with Brief Instabilities: An Application to Vision/Inertial Navigation, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronics Systems*, **40**-3, 889/900 (2004)
- 25) 太田快人: システム制御のための数学 (1)-線形代数編-, コロナ社 (2000)

《付 録》

A. 定理 4.1 の証明

(証明) ポテンシャル関数として新たに

$$\begin{aligned} V_{\text{exp}} &:= \text{tr} \left((e^{\hat{\zeta}(t)})^T (M \otimes I_3) e^{\hat{\zeta}(t)} \right) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \phi(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_k}) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

を定義する。この関数の微分は

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\text{exp}} &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\text{sk}(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_k})^\vee \right)^T (-\omega_i + \omega_k) \\ &= -4 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\text{sk}(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_k})^\vee \right)^T \omega_i \\ &= -4 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left(\text{sk}(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_k})^\vee \right)^T \text{sk}(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j})^\vee \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{tr} \left(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_k} e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j} - e^{-\hat{\zeta}_k} e^{\hat{\zeta}_j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{tr} \left(e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_k} (e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j} - I) \right) \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

となる。ここで最後の等式はグラフが平衡であることより

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} e^{-\hat{\zeta}_k} e^{\hat{\zeta}_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} e^{-\hat{\zeta}_k} e^{\hat{\zeta}_i} \quad (\text{A.3})$$

が成り立つことを用いている。

(A.3) 式より

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{tr} \left(e^{-\hat{\zeta}_k} e^{\hat{\zeta}_i} (e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j} - I) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{tr} \left(e^{-\hat{\zeta}_k} e^{\hat{\zeta}_j} - e^{-\hat{\zeta}_k} e^{\hat{\zeta}_i} \right) = 0 \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

が成立するので、

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{\text{exp}} &= \\
&= - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{tr} \left((e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_k} + e^{-\hat{\zeta}_k} e^{\hat{\zeta}_i}) (I - e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j}) \right) \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

が成り立つ。

すべての剛体間の相対姿勢が正定であることから次式が成立する²¹⁾。

$$\begin{aligned}
&= - \text{tr} \left((e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_k} + e^{-\hat{\zeta}_k} e^{\hat{\zeta}_i}) (I - e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j}) \right) \\
&\leq - \lambda_{\min} (e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_k} + e^{-\hat{\zeta}_k} e^{\hat{\zeta}_i}) \text{tr} (I - e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j}) \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

これを (A.5) 式に用いると

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{\text{exp}} &\leq - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{\min} (e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_k} + e^{-\hat{\zeta}_k} e^{\hat{\zeta}_i}) \\
&\quad \text{tr} (I - e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j}) \\
&\leq - \epsilon n \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{tr} (I - e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j}) \\
&= - \epsilon n \text{tr} \left((e^{\hat{\zeta}})^T (L \otimes I_3) e^{\hat{\zeta}} \right) \\
&= - \frac{\epsilon}{n} \text{tr} \left((e^{\hat{\zeta}})^T (M L_{\text{sym}} M \otimes I_3) e^{\hat{\zeta}} \right) \quad (\text{A.7})
\end{aligned}$$

が得られる。ここで $\otimes$ はクロネッカー積を表す。また、(A.7) 式において、グラフラプラジアン²²⁾の定義より $\sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{tr} (I - e^{-\hat{\zeta}_i} e^{\hat{\zeta}_j}) = \text{tr} \left((e^{\hat{\zeta}})^T (L \otimes I_3) e^{\hat{\zeta}} \right)$ が成り立つことを用いている。

行列 $(e^{\hat{\zeta}})^T (M L_{\text{sym}} M \otimes I_3) e^{\hat{\zeta}}$ に対して、クロネッカー積の性質と任意の x に対して $\mathbf{1}^T (M \otimes I_3) e^{\hat{\zeta}} x = 0$ が成り立ち、 $\mathbf{1}$ がグラフラプラジアン²²⁾の最小固有値に対する固有ベクトルであることから、クーラン・フィッシャーのミニマックス定理²³⁾ (文献 25), pp. 124, 定理 8.8) を用いると

$$\begin{aligned}
&\lambda_{\min 2} (L_{\text{sym}}) x^T (e^{\hat{\zeta}})^T (M \otimes I_3) (M \otimes I_3) e^{\hat{\zeta}} x \\
&\leq x^T (e^{\hat{\zeta}})^T (M \otimes I_3) (L_{\text{sym}} \otimes I_3) (M \otimes I_3) e^{\hat{\zeta}} x \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

を得る。これより、 $(e^{\hat{\zeta}})^T (M \otimes I_3) ((L_{\text{sym}} - \lambda_{\min 2} (L_{\text{sym}}) I) \otimes I_3) (M \otimes I_3) e^{\hat{\zeta}}$ は準正定行列である。

したがって次式が成立する。

$$\begin{aligned}
&= - \text{tr} \left((e^{\hat{\zeta}})^T (M \otimes I_3) (L_{\text{sym}} \otimes I_3) (M \otimes I_3) e^{\hat{\zeta}} \right) \\
&\leq - \lambda_{\min 2} (L_{\text{sym}}) \text{tr} \left((e^{\hat{\zeta}})^T (M \otimes I_3) (M \otimes I_3) e^{\hat{\zeta}} \right) \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

(A.9) 式および (A.7) 式より

$$\dot{V}_{\text{exp}} \leq - \epsilon \lambda_{\min 2} (L_{\text{sym}}) V_{\text{exp}} \quad (\text{A.10})$$

を得る。(A.10) 式に対し比較定理²⁰⁾を用いると

$$V_{\text{exp}}(t) \leq V_{\text{exp}}(0) e^{-\epsilon \lambda_{\min 2} (L_{\text{sym}}) t} \quad (\text{A.11})$$

が成り立ち、題意が証明される。□

[著者紹介]

五十嵐 裕 司 (学生会員)

2006 年東京工業大学工学部制御システム工学科卒業。同年同大学大学院理工学研究科機械制御システム専攻修士課程入学、現在に至る。

畑 中 健 志 (正会員)

2002 年京都大学工学部情報学科卒業。2004 年同大学大学院情報科学研究科数理工学専攻修士課程修了。2006 年日本学術振興会特別研究員 DC。2007 年京都大学情報科学研究科数理工学専攻博士後期課程修了。同年東京工業大学大学院助教、現在に至る。拘束システムの研究に従事。博士 (情報学)。

藤 田 政 之 (正会員)

1985 年早稲田大学大学院理工学研究科電気工学専攻博士後期課程中退。同年金沢大学工学部助手。同講師、助教授を経て、92 年北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科助教授。99 年金沢大学工学部教授。2005 年東京工業大学大学院理工学研究科教授。ロバスト制御、予測制御、協調制御、ビジュアルフィードバックに関する研究に従事。工学博士。計測自動制御学会、システム制御情報学会、IEEE CSS などの会員。