非凸制約をもつロバスト可解問題に対するランダムイズドアルゴリズム

和田孝之*・藤崎泰正**

Randomized Algorithms for Robust Feasibility Problems with General Nonconvex Constraints

Takayuki WADA* and Yasumasa FUJISAKI**

A class of robust feasibility problems is considered, which is to find a design variable satisfying a parameter-dependent constraint for all parameter values. A randomized algorithm for solving the problem with a general nonconvex constraint is proposed, where random samples of design variables and uncertain parameters are used. The algorithm stops in a finite number of iterations. Then, it gives a design variable satisfying the constraint for almost all parameter values with a prescribed confidence or says that the problem is infeasible in a probabilistic sense.

Key Words: robust feasibility problem, randomized algorithm, probabilistic solution, probabilistic infeasibility

1. はじめに

ロバスト制御系の設計における計算の複雑さを軽減するため、確率的アプローチが注目を集めている¹⁾。特に、設計変数について凸なパラメータ依存制約をもつロバスト可解問題に帰着できる場合、確率的に厳密な解を事前に指定した信頼度で求めるか、問題がある確定的な意味で非可解であることを示す効率的なランダムイズドアルゴリズムが提案されている^{2)~4)}。しかし、設計変数について非凸な制約を扱うには、アルゴリズムに分枝操作を導入することになり⁵⁾、サンプル複雑さは問題サイズの指数関数となる⁶⁾。

そこで本論文では、問題の非可解性を確率的に近似した「確率的非可解性」を導入する。そして、凸とは必ずしも限らない一般的な制約条件をもつロバスト可解問題を対象に、設計変数と不確かさをともにランダムサンプルする新たなランダムイズドアルゴリズムを提案する。このアルゴリズムは、事前に指定した信頼度で、確率的に厳密な解か、問題が確率的に非可解であることを示して、有限ステップで停止する。また、サンプル複雑さは、問題のサイズの多項式である。

なお、設計変数もランダムサンプルして解を求める手法には、平均性能最適化⁷⁾やミニマックス最適化⁸⁾についての研究がある。それらに対して本論文では、確率的非可解性を定義してロバスト可解問題を直接考察している点に特徴がある。

2. 確率的解と確率的非可解性

本論文ではロバスト可解問題

$$\text{Find } z \in \mathcal{Z} \quad \text{s.t. } v(z, \theta) \leq 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad (1)$$

について考える。ここで、 $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^n$ と $\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$ はそれぞれ可

測集合であり、 $v: \mathcal{Z} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ は可測関数であるとする。この問題の解集合を $\mathcal{S} \doteq \{z \in \mathcal{Z} \mid v(z, \theta) \leq 0 \quad \forall \theta \in \Theta\}$ と表わし、その要素 $z \in \mathcal{S}$ を問題 (1) の**確定的解**とよぶ。

集合 $\mathcal{Z}$ 、 Θ 上にそれぞれ確率測度 $\mathcal{Q}$ と $\mathcal{P}$ を導入する。

【定義】 実数 $\varepsilon_a \in (0, 1)$ について、

$$\mathcal{P}\{\theta \in \Theta \mid v(z, \theta) \leq 0\} > 1 - \varepsilon_a \quad (2)$$

を満足する $z \in \mathcal{Z}$ を、精度 ε_a の**確率的解**という。

【定義】 実数 $\varepsilon_b \in (0, 1)$ について、

$$\mathcal{Q}\{z \in \mathcal{Z} \mid \exists \theta \in \Theta, v(z, \theta) > 0\} > 1 - \varepsilon_b \quad (3)$$

ならば、問題 (1) は精度 ε_b で**確率的非可解**であるという。

確率的解と確率的非可解性はそれぞれ、問題の解と問題の非可解性を確率的に緩和したものとなっている。実際、 $z \in \mathcal{S}$ は、任意の精度の確率的解であるし、確定的に非可解な問題は、任意の精度で確率的に非可解である。また、確率的解をもたないときは常に確率的非可解であるが、確率的解をもつからといって必ずしも確率的非可解でないとは限らない。

3. ランダムイズドアルゴリズム

本論文で提案するアルゴリズムは、有限回の繰り返し計算の後、ある解の候補を出力するか、問題が非可解であるとして停止する。出力された解の候補が精度 ε_a の確率的解であることは、信頼度 δ_a で保証される。また、解がないとして停止したときには、問題が精度 ε_b で確率的非可解であることが、信頼度 δ_b で保証される。ただし、 $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \delta_a, \delta_b \in (0, 1)$ である。これらパラメータを与えるとき、定数を、

$$\bar{\ell} \doteq \left\lceil \ln \frac{1}{\delta_b} / \ln \frac{1}{1 - \varepsilon_b} \right\rceil, \bar{\kappa} \doteq \left\lceil \ln \frac{\bar{\ell}}{\delta_a} / \ln \frac{1}{1 - \varepsilon_a} \right\rceil \quad (4)$$

と設定する。

[アルゴリズム 1]

1. $\ell := 0$ とする。
2. もし $\ell = \bar{\ell}$ ならば解なしと出力して停止する。
3. 集合 $\mathcal{Z}$ から確率測度 $\mathcal{Q}$ に従い $z^{(\ell)}$ を生成する。

* 神戸大学大学院自然科学研究科 神戸市灘区六甲台町 1-1

** 神戸大学大学院工学研究科 神戸市灘区六甲台町 1-1

* Graduate School of Science and Technology, Kobe University, 1-1 Rokkodai-cho, Nada-ku, Kobe

** Graduate School of Engineering, Kobe University, 1-1 Rokkodai-cho, Nada-ku, Kobe

(Received August 10, 2007)

(Revised October 15, 2007)

4. $\kappa := 0$ とする.
5. もし, $\kappa = \bar{\kappa}$ ならば, $z^{(\ell)}$ を出力して停止する.
6. 集合 Θ から確率測度 $\mathcal{P}$ に従い $\theta_\kappa^{(\ell)}$ を生成する.
7. もし $v(z^{(\ell)}, \theta_\kappa^{(\ell)}) \leq 0$ ならば,
 $\kappa := \kappa + 1$ とし, ステップ 5 へ戻る.
8. $\ell := \ell + 1$ とし, ステップ 2 へ戻る.

《定理 1》 アルゴリズムの性質は以下のとおりである.

- (1) 集合 Θ からのサンプル数は最大 $\bar{\kappa}\bar{\ell}$ である.
- (2) 集合 $\mathcal{Z}$ からのサンプル数は最大 $\bar{\ell}$ である.
- (3) ステップ 5 で出力された $z^{(\ell)}$ が

$$\mathcal{P}\{\theta \in \Theta \mid v(z^{(\ell)}, \theta) \leq 0\} \leq 1 - \varepsilon_a$$

を満たす確率は δ_a 以下である.

- (4) ステップ 2 で解なしと出力された場合, 問題 (1) が

$$\mathcal{Q}\{z \in \mathcal{Z} \mid \exists \theta \in \Theta, v(z, \theta) > 0\} \leq 1 - \varepsilon_b$$

を満たす確率は δ_b 以下である.

(証明) 反復回数を数えれば (1), (2) は確認できる. 以下, 文献 3) の考えを援用し, z がランダムサンプルされることに注意しつつ, (3), (4) を証明する. つぎの 2 つの事象を考える.

F_ℓ : アルゴリズムが $z^{(\ell)}$ を出力して停止する事象.

B_ℓ : 解の候補 $z^{(\ell)}$ が $\mathcal{P}\{\theta \in \Theta \mid v(z^{(\ell)}, \theta) \leq 0\} \leq 1 - \varepsilon_a$ を満足する, つまり $z^{(\ell)}$ が確率的解でない事象.

定数 $\bar{\ell}$, $\bar{\kappa}$ の定義より, $\bar{\ell}(1 - \varepsilon_a)^{\bar{\kappa}} \leq \delta_a$ であるので,

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}\mathcal{P}^{\bar{\kappa}})^{\bar{\ell}} \left\{ \bigcup_{\ell=1}^{\bar{\ell}} (F_\ell \cap B_\ell) \right\} &\leq (\mathcal{Q}\mathcal{P}^{\bar{\kappa}})^{\bar{\ell}} \left\{ \bigcup_{\ell=1}^{\bar{\ell}} (F_\ell | B_\ell) \right\} \\ &\leq \bar{\ell}(1 - \varepsilon_a)^{\bar{\kappa}} \leq \delta_a \end{aligned}$$

となり, (3) を示せる. さらに, 以下の 3 つの事象を考える.

I : 各 $z^{(\ell)}$, $\ell \in \{0, 1, \dots, \bar{\ell} - 1\}$ が, ある $\theta \in \Theta$ について $v(z^{(\ell)}, \theta) > 0$ を満足する, つまり $z \notin \mathcal{S}$ を $\bar{\ell}$ 回続けてランダムサンプルする事象.

I_p : 各 $z^{(\ell)}$, $\ell \in \{0, 1, \dots, \bar{\ell} - 1\}$ が, ある $\theta_\kappa^{(\ell)}$, $\kappa \in \{0, 1, \dots, \bar{\kappa} - 1\}$ について $v(z^{(\ell)}, \theta_\kappa^{(\ell)}) > 0$ を満足する, つまりアルゴリズムが解なしと出力する事象.

G : 問題 (1) が $\mathcal{Q}\{z \in \mathcal{Z} \mid \exists \theta \in \Theta, v(z, \theta) > 0\} \leq 1 - \varepsilon_b$ を満足する, つまり問題 (1) が精度 ε_b の確率的非可解ではないという事象.

定数 $\bar{\ell}$ の定義より $(1 - \varepsilon_b)^{\bar{\ell}} \leq \delta_b$ であり, $I_p \subseteq I$ だから,

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}\mathcal{P}^{\bar{\kappa}})^{\bar{\ell}} \{I_p \cap G\} &\leq (\mathcal{Q}\mathcal{P}^{\bar{\kappa}})^{\bar{\ell}} \{I \cap G\} \leq (\mathcal{Q}\mathcal{P}^{\bar{\kappa}})^{\bar{\ell}} \{I | G\} \\ &\leq (1 - \varepsilon_b)^{\bar{\ell}} \leq \delta_b \end{aligned}$$

となり, (4) が確認できる. $\square$

この定理は, z と θ のランダムサンプル数が, それらのサイズ n , m とは独立であることを示している. つまり, アル

ゴリズムのサンプル複雑さは, 問題サイズの多項式となる. さらに, 出力した解, または解なしという結果は, 信頼度 δ_a , δ_b で確率的解, または確率的非可解であることを保証する.

4. 数 値 例

静的出力フィードバックによるロバスト安定化¹⁾

Find $z \in \mathcal{Z}$

$$\text{s.t. } \max_i \text{Re} \lambda_i(A(\theta) + B(\theta)K(z)C) \leq -\alpha \quad \forall \theta \in \Theta$$

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.01 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.3681 + \theta_1 & -0.707 & 1.42 + \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} 0.4422 & 3.5446 + \theta_3 & -5.52 & 0 \\ 0.1761 & -7.5922 & 4.49 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K(z) = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix}^T$$

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^3 \mid |\theta_1| \leq 0.05, |\theta_2| \leq 0.01, |\theta_3| \leq 0.04\}$$

$$\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z_i| \leq 100 \quad i = 1, 2\}$$

を考える. ただし, 各集合 Θ , $\mathcal{Z}$ 上には一様分布を設定し, 信頼度 δ_a , δ_b と精度 ε_a , ε_b はすべて 0.01 と選んだ.

まず, $\alpha = 0.1$ としアルゴリズムを実行すると, θ を 1,059 個, z を 13 個サンプルし, $z_1 = -4.2816$, $z_2 = 94.4148$ が得られた. つぎに, $\alpha = 0.3$ としアルゴリズムを実行すると, θ を 459 個, z を 459 個サンプルし, 解なしと得られた. そこで, 精度, 信頼度を 0.001 と設定しなおして事後解析すると, 得られたコントローラは $\alpha = 0.1$ における確率的解であり, $\alpha = 0.3$ においてノミナルプラントを安定化する問題は確率的非可解であった. 以上より, 定理 1 の成立が確認できる.

参 考 文 献

- 1) R. Tempo, G. Calafiore and F. Dabbene: *Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems*, Springer-Verlag (2004)
- 2) Y. Fujisaki and Y. Oishi: Guaranteed cost regulator design: A probabilistic solution and a randomized algorithm, *Automatica*, **43**-2, 317/324 (2007)
- 3) Y. Oishi: Polynomial-time algorithms for probabilistic solutions of parameter-dependent linear matrix inequalities, *Automatica*, **43**-3, 538/545 (2007)
- 4) G. Calafiore and F. Dabbene: A probabilistic analytic center cutting plane method for feasibility of uncertain LMIs, *Automatica* (2007), to appear
- 5) H. Ishii, T. Başar and R. Tempo: Randomized algorithms for synthesis of switching rules for multimodal systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **50**-6, 754/767 (2005)
- 6) 和田, 藤崎: 切換制御系の確率的設計, 計測自動制御学会論文集, **43**-6, 465/471 (2007)
- 7) M. Vidyasagar: Randomized algorithms for robust controller synthesis using statistical learning theory, *Automatica*, **37**-10, 1515/1528 (2001)
- 8) Y. Fujisaki and Y. Kozawa: Probabilistic robust controller design: Probable near minimax value and randomized algorithms, *Proceedings of the IEEE CDC*, 1938/1943 (2003)