スライディングモードを利用した離散入力システムの制御

神谷 慶*・内田 健康*

Control of Systems with Discrete Inputs Using Sliding Mode

Kei KAMIYA* and Kenko UCHIDA*

In this paper we focus on control of affine systems with discrete inputs, which is a class of hybrid systems. An example of those systems is a DC-DC converter controlled by transistor switches. We propose a design method of switching conditions, which transfers state of systems to a neighborhood of a specified state and keeps it there, using sliding mode with hysteresis layer. Finally effectiveness of this method is shown by simulation and experimental result.

Key Words: hybrid systems, discrete inputs, sliding mode, hysteresis, switching converter

1. はじめに

本稿では、ハイブリッドシステムの1つのクラスである「離散入力をもったアファインシステム」の制御問題に焦点を当てる。ここでいう離散入力とはソレノイドやトランジスタなどのON-OFFであり、システム的具体例としてはスイッチングコンバータが挙げられる。こういったシステムは、スイッチング条件を適切に決めることで任意の状態へとシステムを平衡させることを制御仕様としている。スイッチングコンバータをハイブリッドシステムのクラスとみなしてその制御を行なう研究として文献12)~14)などがあるが、これらの手法はスイッチングコンバータに限定された手法であり離散入力システム一般に対し適用することはできない。それに対し本研究では、すでに離散入力によって安定化可能だとわかっているシステムを対象とした制御法を提案する。

本稿の提案手法は、「システムの目標値近傍に平衡点をもつようにスライディングモードを引き起こし状態を目標値付近へと収束させる」というものである。こうすることでシステムの状態をスライディングモード超平面上へと拘束し、最終的に目標点へもっていくことが可能となる。

さらに本稿では実機への適用も考慮に入れ、スイッチングにヒステリシスを導入する。ヒステリシス特性をもったシステムの安定解析法として文献10)などがあるが、この手法はラグランジュ安定性に基づいているためレギュレータ問題などといった設計問題には適用が困難である。そのため、本稿ではリアプノフの安定定理に基づき、Xuping Xuらによって定義されている ϵ -practical 安定性⁹⁾を実現するための十分

条件を導出することを目標とする。本稿ではさらに、提案手法をスイッチングコンバータへと実装し、手法の有効性を検証する。

本研究での手法は、半正定値計画問題へと制御問題を帰着することで離散入力システム一般に対する制御を行なうというものである。そのため、現在主流となっているMLDシステム表記によるモデル予測制御¹¹⁾よりも実装時の計算量や手間などの点で優位性があるといえる。

以下、第2章で対象モデルについて説明し、第3章で安定性解析手法を述べる。第4章で数値計算法を紹介し、第5章で実際に実機へと適用する。そして第6章をまとめとする。

2. 離散入力アファインシステム

ここでは、対象とするシステムについて説明する。本稿では離散入力をもったアファインシステムをその制御対象とし、以下、離散入力アファインシステムと呼ぶことにする。ここでいう離散入力アファインシステムとは、スイッチングコンバータのようにスイッチングをすばやく繰り返すことで、状態を任意の位置に拘束するという制御仕様をもつシステムであるとする。個々のサブシステムの平衡点は共通である必要はなく、また、そもそも存在しなくてもかまわない。

以下、初めにモデル表記について述べて、つぎに安定化設計のための問題設定について説明する。

2.1 モデル表記

本稿では離散入力のクラスを、0と1の2値のみを取る入力が唯一つあるようなものに限定する。以下、このような離散入力を2値単入力と呼ぶ。

2値単入力系の状態方程式は以下のように記述される。

$$\dot{\bar{x}} = u\bar{A}_0\bar{x} + (1-u)\bar{A}_1\bar{x} \quad (1)$$

* 早稲田大学 東京都新宿区大久保 3-4-1

* Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo
(Received March 27, 2006)
(Revised January 5, 2007)

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで u は 0 か 1 の値をとる 2 値離散入力であり、スカラーである。 x は n 次元の状態ベクトルであり、 $n \geq 2$ とする。 $\bar{A}_i$ は入力が 0 と 1 のときそれぞれに対し定義されるシステムの状態方程式（以下モード）を表わす行列である。

このようなシステムに対し、以下のスイッチング条件を定義する。

$$\bar{H} = [H \ h]$$

$$u = 0 \quad \text{if } \bar{H}\bar{x} > 0 \quad (2)$$

$$u = 1 \quad \text{if } \bar{H}\bar{x} < 0$$

$\bar{H}$ はスイッチング条件を定義する $1 \times (n+1)$ の行列である。以下、アファイン拘束 $\bar{H}\bar{x} = 0$ をスイッチング超平面と呼ぶことにする。

(1) と (2) 式から、以下の状態方程式が導出される。

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_0 \bar{x} \quad \text{for } \bar{H}\bar{x} > 0$$

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_1 \bar{x} \quad \text{for } \bar{H}\bar{x} < 0 \quad (3)$$

2.2 問題設定

つぎにシステムの安定化設計のための問題設定を行なう。

まず本稿で対象とする離散入力アファインシステムの制御仕様について考える。スイッチングコンバータに代表されるように、これらのシステムはシステム固有の平衡点への収束性を目標とするのではなく、それ以外の任意の状態（以下目標点）への収束性を制御仕様としてもっている。そのためには、スイッチングをすばやく繰り返すことによって状態を目標点に保持させるしかない。

そこで本稿では、目標点に平衡点をもつスライディングモードを生じさせることで、制御仕様を達成させるという手法を取ることにする。すなわち、最終的に制御仕様を達成するためには、スライディングモードを生じさせ、そのスライディングモードが目標点に平衡点をもつようにスイッチング条件を決めてやればよいということになる。

しかし上記スライディングモードは理想的なものであり、ほとんどの実際のシステムにおいては実現することができない。そこで、スイッチング条件にヒステリシス特性を付加することを考える。このようなスイッチング条件を用いる場合、(3) 式のような形式で記述することはできないので、Fig. 1 のようなハイブリッドオートマトンを用いて表現する。これは状態空間上においては Fig. 2 のように、ヒステリシス幅 d だけ離れた 2 つの超平面に挟まれた領域内に状態を拘束する、というスイッチング条件となる。これらの図から、領域 $\{x | \bar{H}\bar{x} > \frac{d}{2}\}$ においてはモード 0、領域 $\{x | \bar{H}\bar{x} < -\frac{d}{2}\}$ においてはモード 1 となるが、領域 $\{x | \bar{H}\bar{x} \geq -\frac{d}{2} \cap \bar{H}\bar{x} \leq \frac{d}{2}\}$ （以下、ヒステリシス領域）においては両方のモードを取りうる事がわかる。

このスイッチング条件を用いて上記の制御仕様を満たすた

Fig. 1 Hysteresis switching

Fig. 2 Hysteresis slidingmode

めには、状態がヒステリシス領域に拘束され、最終的に目標点付近に解が留まればよい、ということになる。

結局、以下の制御問題が与えられる。

制御問題 2.1

離散入力アファインシステムに対し、解をヒステリシス領域に拘束し、最終的に安定とするようなヒステリシス付スイッチング条件を求めよ。

この問題設定における“安定性”に関しては次節で説明する。

3. 安定性解析

ここでは、第 2 章で述べたスイッチング条件を用いた場合に、システムが安定になるかどうかを判定する安定性解析法を述べる。まず、安定性の定義について述べる。つぎにヒステリシス付スライディングモードによる安定条件を導出する。

3.1 安定性

ここでは本研究における安定性を定義する。

まず、原点に関して注意を述べる。本研究ではスイッチングコンバータの例のように、ある状態（電圧など）を目標値へと収束させることを目標としている。そのため、初めからシステムを変数変換して、その目標値と原点が一致するように平行移動させるものとする。

つぎに安定性について議論しよう。本稿で対象とするシステムの特徴から、システムの平衡点が原点（目標点）に存在しない限り解が目標点に留まり続けることはありえず、漸近安定性などは要求できない。そのため本稿では、文献 9) で提案されている ϵ -practical 安定性をシステムがもつための安定条件を導出する。 ϵ -practical 安定性の定義を以下に示す。なお、 $B[x, r]$ は中心 x 、半径 r の超球を表わす。

定義 3.1 ϵ -practical 安定性

ある正数 ϵ が与えられ、任意の t ($t \geq \tau$) において $\mathbf{x}(t) \in B[0, \epsilon]$, $\mathbf{x}(0) \in B[0, \delta]$ となるようなある δ ($\delta = \delta(\epsilon) > 0$), τ ($\tau \geq 0$) が存在するならば、システムは ϵ -practical 安定である。

すなわち、「あらかじめ与えられた」 ϵ によって定義されるボール（超楕円体）内に解が留まるような初期値が存在するとき安定と定義する。詳細は文献9)を参照されたい。

3.2 ヒステリシス付スライディングモード制御

ここではヒステリシス付スライディングモードを用いた場合の安定性解析手法を述べる。まず2次のシステムに対する安定条件を示した後、それを3次以上のシステムへと拡張する。

3.2.1 2次系の ϵ -practical 安定条件

ここでは $n = 2$ の場合に限定した2値単入力アファインシステムのヒステリシス付スライディングモードによる ϵ -practical 安定条件を導出する。

まず初めに、Fig. 3 に制御法の直感的なイメージを示す。この図から、システムがヒステリシス付スライディングモー

Fig. 3 Control image

ドによって ϵ -practical 安定となるためには、

1. すべての解軌道がヒステリシス領域に拘束される
2. ヒステリシス領域内において、解軌道が目標点（すなわち原点）に向かっていく

という2つの条件が満たされる必要があることがわかる。

まず1.に関しては、いわゆるスライディングモード到達条件⁵⁾と同様に考えればよいので、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}^T (\bar{\mathbf{A}}_0^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{A}}_0) \bar{\mathbf{x}} &< 0 \quad \text{for } \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} | \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{x}} \geq -\frac{d}{2}\} \\ \bar{\mathbf{x}}^T (\bar{\mathbf{A}}_1^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{A}}_1) \bar{\mathbf{x}} &< 0 \quad \text{for } \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} | \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{x}} \leq \frac{d}{2}\} \end{aligned} \quad (4)$$

となる。(4)式は文献5)とほぼ同じものであるが、ヒステリシスがある分やや厳しい条件となっている。

つぎに2.について考える。Fig. 3においてヒステリシス領域内の解挙動に注目すると、片方のモードにおいて目標点

から遠ざかるような挙動を取っていたとしても、もう片方のモードでそれ以上に近づけば、最終的に目標点へと近づいていくことがわかる。すなわち、ヒステリシス特性を1サイクルした結果、元の状態よりも目標点へと近づいている（＝リアプノフ関数が減少）、という条件式を立てればよいことがわかる。

ここで、以下の状態方程式（以下、正規化状態方程式と呼ぶことにする）を導入する。

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \frac{1}{\alpha_0(\mathbf{x})} \bar{\mathbf{A}}_0 \bar{\mathbf{x}} \quad \text{for } \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{x}} \geq -\frac{d}{2} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \frac{1}{\alpha_1(\mathbf{x})} \bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{x}} \quad \text{for } \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{x}} \leq \frac{d}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 $\alpha_0(\mathbf{x}) = -\bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{A}}_0\bar{\mathbf{x}}$, $\alpha_1(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{A}}_1\bar{\mathbf{x}}$ とする。

これは、 $\bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{A}}_i\bar{\mathbf{x}}$ が超平面から離れるベクトル成分の大きさを示していることから、両モードがヒステリシス領域を端から端までいく時間を等しくするように正規化したものと考えることができる。また、以下の状態方程式（以下、均一化状態方程式と呼ぶこととする）も考え方としては同じであり、数値計算を行なう上ではこちらのほうが有用である。

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \alpha_1(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{A}}_0 \bar{\mathbf{x}} \quad \text{for } \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{x}} \geq -\frac{d}{2} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \alpha_0(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{x}} \quad \text{for } \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{x}} \leq \frac{d}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

さらに、 ϵ -practical 安定性におけるボールを示すため、領域 B_r を定義する。これはボールの内側でなく、外側を表わす。ただし、ボールの短径は $d/2$ 以上とする。また、本稿では全状態空間内における制御は考えず、ある領域 X_c （以下制御範囲）の内部における安定性のみを議論することにする。

これらを用いて以下のヒステリシス付スライディングモードによる ϵ -practical 安定条件を得る。

定理 3.1 ϵ -practical 安定条件 ($n = 2$)

以下の不等式を満たす行列 $\mathbf{P}$ が存在すれば、システム(2)は与えられた $\bar{\mathbf{H}}$ で定義される超平面分割によって ϵ -practical 安定となる。

$$\cdot \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} > 0 \quad \text{for } \mathbf{x} \in \Omega \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \cdot \bar{\mathbf{x}}^T (\bar{\mathbf{A}}_0^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{A}}_0) \bar{\mathbf{x}} &< 0 \\ \text{for } \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} | \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{x}} \geq -\frac{d}{2} \cap X_c\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \cdot \bar{\mathbf{x}}^T (\bar{\mathbf{A}}_1^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{A}}_1) \bar{\mathbf{x}} &< 0 \\ \text{for } \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} | \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{x}} \leq \frac{d}{2} \cap X_c\} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \cdot \bar{\mathbf{x}}^T (\bar{\mathbf{P}}(\alpha_1(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{A}}_0 + \alpha_0(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{A}}_1) \\ + (\alpha_1(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{A}}_0^T + \alpha_0(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{A}}_1^T) \bar{\mathbf{P}}) \bar{\mathbf{x}} &< 0 \quad (10) \\ \text{for } \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} | \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{x}} \geq -\frac{d}{2} \cap \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{x}} \leq \frac{d}{2} \cap X_c \cap B_r\} \end{aligned}$$

ただし、 $\bar{\mathbf{P}} = [\mathbf{I} \ 0]^T \mathbf{P} [\mathbf{I} \ 0]$ である。

(証明)

2 値離散入力アファインシステムが ϵ -practical 安定となるためには、上記の 2 条件 1.2. を満たせば十分である。

上記 1. に対しては、(8), (9) 式より満たされる。

つぎに上記 2. について考えよう。これを満たすためには [モード 0 → スイッチ → モード 1 → スイッチ → モード 0] という 1 サイクル経過後、リアプノフ関数 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ が必ず減少すればよい。この条件に対し、つぎの条件は十分条件となる。

(A) スイッチの前後でリアプノフ関数は必ず減少し、かつ

(B) 線 $\bar{H}\bar{\mathbf{x}} = a$ ($-\frac{d}{2} \leq a \leq \frac{d}{2}$) を通るモード 0 の点 $\mathbf{x}_{0a}$ 、モード 1 の点 $\mathbf{x}_{1a}$ に対し、リアプノフ関数 V が常に $V(\mathbf{x}_{0a}) > V(\mathbf{x}_{1a})$ となる。

よって条件 (A) と (B) を満たすことを示せばよい。

まず (A) に関して考える。時間 $t_{d/2}$ にモード 0 の軌跡が $\bar{H}\bar{\mathbf{x}} = \frac{d}{2}$ 上の点 $\mathbf{x}_{d/2}$ に到達し、モード 1 へとスイッチしたとする。このとき、リアプノフ関数 V は (7), (10) 式より、

$$V(\mathbf{x}_{d/2}) > 0 \quad (11)$$

$$\dot{V}_0(\mathbf{x}_{d/2}) + \dot{V}_1(\mathbf{x}_{d/2}) < 0 \quad (12)$$

となる。なお $\dot{V}_0, \dot{V}_1$ はそれぞれモード 0, 1 の解軌道に沿ったリアプノフ関数の時間微分である。記述を簡単にするために、以下の議論では、 $V(\mathbf{x}(t)) = V(t), \dot{V}_0(\mathbf{x}(t)) = \dot{V}_0(t), \dot{V}_1(\mathbf{x}(t)) = \dot{V}_1(t)$ と略記する。ここで微小な時間 τ に対し、平均値の定理を用いると

$$V(t_{d/2} + \tau) = V(t_{d/2}) + \dot{V}_1(t_{d/2} + s\tau)\tau \quad 0 \leq s \leq 1$$

$$V(t_{d/2}) = V(t_{d/2} - \tau) + \dot{V}_0(t_{d/2} + (s' - 1)\tau)\tau \quad 0 \leq s' \leq 1$$

となることから、

$$V(t_{d/2} + \tau) = V(t_{d/2} - \tau) + (\dot{V}_1(t_{d/2} + s\tau) + \dot{V}_0(t_{d/2} + (s' - 1)\tau))\tau$$

となるが、ここで s と $(s' - 1)$ の差は τ を小さくすることによりどこまでも小さくできる。よって (12) 式より

$$V(t_{d/2} + \tau) < V(t_{d/2} - \tau) \quad (13)$$

が成り立つ。

ここで均一化状態方程式の特性から、モード 0 とモード 1 で時間 τ で変化する $\bar{H}\bar{\mathbf{x}}$ の絶対値は等しい。よって (13) 式はスイッチの前後でリアプノフ関数が必ず減少することを示すことができる。よって (A) は満たされる。

つぎに (B) に関して考える。[モード 0 → スイッチ → モード 1 → スイッチ → モード 0] という 1 サイクルにおいて、モード 0 が時間 t_{0a} に $\bar{H}\bar{\mathbf{x}} = a$ 上の点 $\mathbf{x}_{0a}$ を通過し、モード 1 が時間 t_{1a} に $\bar{H}\bar{\mathbf{x}} = a$ 上の点 $\mathbf{x}_{1a}$ を通過したとする。こ

で (10) 式から

$$\dot{V}_0(\mathbf{x}_{0a}) + \dot{V}_1(\mathbf{x}_{0a}) < 0 \quad (14)$$

が成り立つ。

(i) $\dot{V}_0(\mathbf{x}_{0a}) + \dot{V}_1(\mathbf{x}_{1a}) < 0$ の場合

微小時間 τ の前後において平均値の定理を用いると、

$$\begin{aligned} |V(t_{0a}) - V(t_{1a})| &= |V(t_{0a} - \tau) + \dot{V}_0(t_{0a} + (s - 1)\tau)\tau \\ &\quad - (V(t_{1a} + \tau) - \dot{V}_1(t_{1a} + s'\tau)\tau)| \\ &= |V(t_{0a} - \tau) - V(t_{1a} + \tau) \\ &\quad + (\dot{V}_0(t_{0a} + (s - 1)\tau) + \dot{V}_1(t_{1a} + s'\tau))\tau| \end{aligned}$$

となり、先ほどの議論と同様に、

$$|V(t_{0a}) - V(t_{1a})| < |V(t_{0a} - \tau) - V(t_{1a} + \tau)|$$

が導かれる。

これは時間とともにモード 0 とモード 1 の 2 つの軌跡におけるリアプノフ関数 V の差が広がっていくことを示しており、上記 (A) の証明と合わせて、(B) が満たされることが示される。

(ii) $\dot{V}_0(\mathbf{x}_{0a}) + \dot{V}_1(\mathbf{x}_{1a}) \geq 0$ の場合

$\dot{V}_0(\mathbf{x}_{0a}) + \dot{V}_1(\mathbf{x}_{0a}) < 0$ と $\dot{V}_1(\mathbf{x})$ の連続性から、2 点 $\mathbf{x}_0$ と $\mathbf{x}_1$ を結ぶ線上 (領域 X とする) に、 $\dot{V}_0(\mathbf{x}_{0a}) + \dot{V}_1(\mathbf{y}) < 0$ となる領域 $Y (y \in Y)$ が存在する。この Y の領域 X に対する補集合 $\bar{Y}$ において、2 つのモードのリアプノフ関数の差の絶対値は減少するから、領域 Y を通らずして $V(\mathbf{x}_{0a}) = V(\mathbf{x}_{1a})$ となることはできない。

しかし領域 Y においては 2 つのモードのリアプノフ関数の差の絶対値 $|V(\mathbf{x}_{0a}) - V(\mathbf{x}_{1a})|$ は上記と同様拡大していくことが示される。よって $V(\mathbf{x}_{0a}) = V(\mathbf{x}_{1a})$ となることはありえず、さらに上記 (A) の証明と合わせて、(B) が満たされることが示される。□

3.2.2 3 次以上のシステムの ϵ -practical 安定条件

ここではこれまでの手法を $n \geq 3$ の場合に拡張する。 $n \geq 3$ の場合には、 $n = 2$ の場合と違い、必ずしもモード 0 とモード 1 の軌跡が同じ平面上を通るとは限らず、その結果、定理 3.1 を満たしていたとしても安定となるとは限らない。これは定理 3.1 が「最悪の場合モード 0 の軌跡とモード 1 の軌跡がぶつかる」という発想から来ているためで、3 次元以上の状態空間の場合では 2 つのモードの軌跡がぶつからずに不安定な方向へ向かってしまうこともあり得るためである。

そこで定理 3.1 の 4 番目の不等式を拡張することを考える。具体的には、「原点からの距離が a 、かつ、 $\bar{H}\bar{\mathbf{x}} = b$ となる領域」において、モード 0 の解軌道に沿ったリアプノフ関数の時間微分の最大値と、モード 1 の解軌道に沿ったリアプノフ関数の時間微分の最大値の総和が常に負、という形に拡張する (Fig. 4)。ここで、「原点からの距離」をレベルセット $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = a$ で定義する。

これは、モード 1 の軌跡がモード 0 の軌跡よりも「原点からの距離が遠い領域」を通らない、ということであり、両モー

Fig. 6 にこのアルゴリズムのイメージを示す.

Fig. 6 Algorithm

4.2 定理の解法

ここでは, 3.2 節で導出した定理 3.1 を実際に解ける形式にまで帰着する. 定理 3.1 を数値計算で解く場合に問題となるのは, 1. パラメータ依存性, 2. 非線形性, 3. 準大域性, の 3 つである. まず 2. 非線形性に関しては, 4.1 節の手法を用いれば解決できる. 1. パラメータ依存性に関しては, SOS 緩和³⁾を用いればよい. 3. 準大域性に対しては, 一般化ラグランジュ緩和⁴⁾を用いれば実現できる.

以下の定理 4.1 は定理 3.1 に対して一般化ラグランジュ緩和とグリッド法を用いることで数値計算可能な形に帰着したものである. 最終的には定理 4.1 に対し SOS 緩和を用いれば定理 3.1 の数値解を得ることができる.

定理 4.1

以下の不等式を満たす行列 $P, \bar{H}$ が存在すれば, システム (2) は与えられた $\bar{H}$ で定義される超平面分割によって ϵ -practical 安定となる. ただし, $\bar{P} = [I \ 0]^T P [I \ 0]$ とし, $f(x) > 0$ は ϵ -practical 安定性におけるボールの外側, $g(x) > 0$ は領域 X_c を表わす. なお $f(x), g(x), \omega_i(x)$ はともに x の多項式のクラスとする.

$$\begin{aligned}
 & \cdot x^T P x > 0 \\
 & \cdot \bar{x}^T (\bar{A}_0^T \bar{H}^T \bar{H} + \bar{H}^T \bar{H} \bar{A}_0) \bar{x} \\
 & \quad + \omega_1(x) (\bar{H} \bar{x} + \frac{d}{2}) + \omega_2(x) g(x) < 0 \\
 & \cdot \bar{x}^T (\bar{A}_1^T \bar{H}^T \bar{H} + \bar{H}^T \bar{H} \bar{A}_1) \bar{x} \\
 & \quad + \omega_3(x) (-\bar{H} \bar{x} + \frac{d}{2}) + \omega_4(x) g(x) < 0 \quad (17) \\
 & \cdot \bar{x}^T (\bar{P} (\alpha_1(x) \bar{A}_0 + \alpha_0(x) \bar{A}_1) \\
 & \quad + (\alpha_1(x) \bar{A}_0^T + \alpha_0(x) \bar{A}_1^T) \bar{P}) \bar{x} \\
 & \quad + \omega_5(x) (\bar{H} \bar{x} + \frac{d}{2}) + \omega_6(x) (-\bar{H} \bar{x} + \frac{d}{2}) \\
 & \quad + \omega_7(x) g(x) + \omega_8(x) f(x) < 0 \\
 & \cdot \omega_i(x) > 0 \quad 0 \leq i \leq 8 \\
 & \text{for } x \in \Omega
 \end{aligned}$$

この定理は, 元々十分条件に過ぎない定理 3.1 をさらに SOS 緩和, ラグランジュ緩和, グリッド法という十分条件で解いているため, 保守性が高くなる可能性がある. より保守性の少ない数値計算法の確立は今後の課題である.

5. スイッチングコンバータへの実装

最後にスイッチングコンバータを用いた実験を行なう. 本稿では昇圧型 DC-DC コンバータを製作する (Fig. 7). このシステムはダイオードによるセル分割とトランジスタによる離散入力 of 2 種類のスイッチングが存在しているため, 離散入力のある区分的線形システム^{1), 7)}としてモデル化される. そのためこのままでは扱うことができないので, トランジスタが ON のときはダイオードは OFF し, トランジスタが OFF のときはダイオードは ON すると仮定し, 離散入力アフィンシステムとして近似する.

Fig. 7 DCDC boost converter

また, 本稿での手法をこのシステムに適用する場合, 大きな問題となるのが数値計算エラーである. この問題は, 回路素子の値が小さいため, 数値計算誤差が大きくなることから生じると考えられる. そのため, 本稿では回路素子として比較的大きいものを用いることとした. 実際のパラメータは以下のようなものである.

$$C = 1000\mu\text{F} \quad L = 10\text{mH} \quad R = 50\Omega \quad E = 5\text{V}$$

また, モデルは以下ようになる.

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} \\
 \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} -20 & 1000 & 0 \\ -104.2 & -135.4 & 520.8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} \quad \text{for } \{x | \bar{H} \bar{x} < 0\} \\
 \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} -200 & 0 & 0 \\ 0 & -1042 & 520.8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} \quad \text{for } \{x | \bar{H} \bar{x} > 0\}
 \end{aligned}$$

なお, 目標点を $r_V = 10$, 状態変数の範囲を $0 \leq V \leq 11$, $0 \leq I \leq 5$, ボールを半径 0.6 の円とした. ヒステリシス幅 d の決定に関しては, 小さくしすぎると解が求まらず, また, 大

きくしすぎると電流と電圧の脈動が大きくなってしまうことからシミュレーションを繰り返して最適なものを見つける必要がある。今回は脈動が許容範囲に納まる中でできる限り大きいヒステリシス幅となるように d を決め、 $d=0.2$ とした。

5.1 シミュレーション

このモデルに対し定理 3.3 を用い、グリッド法を使って計算したところ、 $H = [-0.32 \ 1 \ -1]$ 、 $\mu = -42.27$ を得た。このときのシミュレーション結果を Fig. 8 に示す。この図から制御仕様がすべて満たされていることがわかる。

Fig. 8 Simulation result

5.2 実験

つぎに実験を行なう。Fig. 7 の回路をつくり、制御器をアナログ回路で実装した。具体的には、 $\bar{H}\bar{x} = -0.32V + I - 1$ をオペアンプで増幅して作り出し、ヒステリシス特性をもたせたコンパレータ（シュミットトリガ）で 0V と比較し、その結果を MOSFET のゲートと接続することで制御系を構築した。その回路図を Fig. 9 に示す。なお、抵抗 R_1 は電流値取得のため、 R_2 は保護のために挿入してある。

この回路を用いた実験結果を Fig. 10~14 に示す。この結果から電圧は 10V になっているが、電流の挙動がシミュレーションとは全く異なったものとなってしまった。これは電流側の回路（RL 回路）の時定数が小さすぎるために電子回路のスルーレート以上の速度が必要となり、結果、シュミットトリガがヒステリシス幅範囲内でスイッチング仕切れずに大

Fig. 9 Circuit chart

幅にはみ出してしまったものだと考えられる。しかし、電流の周波数が電圧側の回路（RC 回路）の極よりもはるかに高周波側にあるため、出力電圧にはその影響がほとんど現れていない。

また、0V 近辺でトラジェクトリが可到達条件を満たしていないかのような挙動を示しているが、これは計算の単純化のためにダイオードの挙動を無視したために起こったものと考えられる。

しかし、Fig. 12 からトラジェクトリは概ね $\bar{H}\bar{x} = 0$ の周りでスイッチングしており、想定外の動作があるとはいえ、本稿の手法で制御できているといえる。ただ上記のとおり、

Fig. 10 Experimental result (voltage)

Fig. 11 Experimental result (current)

Fig. 12 Experimental result (trajectory)

Fig. 13 Experimental result (value of $\bar{H}\bar{x}$)

Fig. 14 Experimental result (input)

シュミットトリガがきちんと動作していないのでこの修正は今後の課題となる。

6. おわりに

本稿では離散入力システムに対するスライディングモード制御法を構築し、スイッチングコンバータを用いた実験を行なうことでその有効性を確認した。本研究では文献3)のツールボックスを用いたが、数値計算の途中でイタレーションが止まり、保守的な解が計算されることが多々あった。SOS緩和を高次の複雑な問題に適用する場合には数値計算エラーが発生し許容解が求まらない場合があることが指摘されている⁴⁾。したがって、本研究の解法をSOS緩和に拠らない形に修正すること望まれる。この問題への対応と、回路動作の修正が今後の課題である。

参考文献

- 1) M. Johansson: Piecewise Linear Control Systems, Springer (2002)
- 2) A. van der Schaft: An Introduction to Hybrid Dynamical Systems, Springer (2000)
- 3) S. Prajna, A. Papachristodoulou and P.A. Parrilo: SOS-TOOLS: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB, available at <http://www.cds.caltech.edu/sostools> (2004)
- 4) 小島政和: 多項式計画問題とその緩和, 第32回制御理論シンポジウムチュートリアルレクチャー, available at <http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/talkJ.html> (2003)
- 5) 野波健蔵: スライディングモード制御, コロナ社 (1994)
- 6) S. Boyd: A Path-following Method for Solving BMI Problems in Control, In Proceedings of American Control Conference (1999)
- 7) 神谷, 内田: 離散入力アファインシステムにおけるスライディングモードを用いた制御, 第34回制御理論シンポジウム (2005)
- 8) 小西, 新: Matrix-Based SDP 緩和を用いた分枝限定法によるBMI最適化問題の解法, 第23回 Dynamical System Theory シンポジウム (2000)
- 9) X. Xu: On practical stability and stabilization of hybrid and switched systems, HSCC2004 (2004)
- 10) A. Hassibi: Lyapunov methods in the analysis of complex dynamical systems, PhD thesis of Stanford University (2000)
- 11) 井村順一: ハイブリッドシステムの制御における未解決問題, 計測と制御, 42-2, 113/119 (2003)
- 12) P. Gupta: Hybrid sliding mode control of DC-DC power converter circuits, IEEE TENCON-2003 (2003)
- 13) M. Senesky: Hybrid modelling and control of power electronics, HSCC2003 (2003)
- 14) J. Buisson: On the stabilisation of switching electrical power converters, HSCC2005 (2005)

[著者紹介]

神谷 慶

2006年早稲田大学大学院修士課程修了。同年、(株)デンソー統合システム開発部所属、現在に至る。

内田 健康 (正会員)

1976年早稲田大学大学院博士課程修了。工学博士。83年より早稲田大学教授(現在、電気・情報生命工学科)。制御系の情報構造、ロバスト制御および最適化制御の理論と応用、生物における制御問題などの研究に従事。電気学会、システム制御情報学会、IEEEなどの会員。