線形ジャンプシステムに対する 出力フィードバックによる予見 H_∞ 追従制御

名 倉 剛*

H_∞ Tracking with Preview
by Output Feedback for Linear Jump Systems

Gou NAKURA*

In this paper we study H_∞ tracking problems with preview by output feedback for linear jump systems on the finite time interval. We mainly consider the problem that the reference signals are previewed in a fixed time interval and present feedback control laws for three types of H_∞ tracking problems including two other extreme cases. Numerical examples demonstrate that increasing the preview length improves the tracking error. Our theory is an extension of the H_∞ tracking theory with preview for linear continuous- and discrete-time systems to linear jump systems. Our theory can be applied into the sampled-control system with the control input realized through a zero-order hold and the sampled-observation.

Key Words: jump system, H_∞ theory, tracking control with preview, game theory, output feedback

1. はじめに

追従制御問題は安定化問題と並んで制御系設計において最も基本的かつ重要な問題の1つであって、またさらに、近年の H_∞ 制御理論・ロバスト制御理論の発展を鑑みて追従制御系設計において外乱の影響の抑制を考慮することも大切である。追従制御系を構成する際、目標信号の予見情報が閉ループ系の性能改善のために非常に役立つことはよく知られており、早勢⁵⁾・Tomizuka¹⁶⁾による研究以来、現在に至るまで、さまざまな研究がなされている^{1)~5), 8)~10), 12)~16)}。予見情報を考慮した追従制御理論は、移動体の誘導・操縦・姿勢制御などの現実のさまざまな制御系に対して広く適用可能である。

中でも U. Shaked らは連続時間線形時変システムに対して予見情報を利用する追従制御を含む H_∞ 追従制御理論の研究を行なった¹²⁾。その理論では、目標信号の予見情報を含む利用できる限りの目標信号の情報を十分に活用する観点に立って目標信号の性質を3種類に分類し、その3種類の H_∞ 追従制御問題を統一的に解くために評価出力のエネルギーの期待値を用いて追従制御性能を評価する有限時間区間におけるゲーム問題を定式化し、その問題に対する解を利用して上記の3種類の H_∞ 追従制御問題に対するコントローラーを決定した。U. Shaked らによる理論¹²⁾は主として以下のよう

な利点を有する。(i) 目標信号のダイナミクスの情報を事前に必要としない。(ii) 解くべき Riccati 方程式が安定化および外乱抑制を主たる目的とする標準的な H_∞ 制御理論で使われるものと全く同一であるためにコントローラー設計が容易である。(iii) プラントに対する目標信号のダイナミクスへの直接の影響をモデル化したフィードフォワード項を有効に利用すべき摂動項として捉え目標信号の影響を排除するのではなくその情報を有効に利用する。さらに U. Shaked らの理論は離散時間線形システムに対しても拡張され¹⁾、それらの連続時間および離散時間システムの H_∞ 追従制御理論をもとに、ロバスト予見 H_∞ 追従制御理論への拡張^{2), 13)}、確率的な不確かさを有するプラントに対する予見 H_∞ 追従制御理論への拡張^{3), 4)}がそれぞれ試みられた。このようにさまざまなクラスの制御系に対して同一の設計理論構築方法により予見 H_∞ 追従制御問題を解き得ることも U. Shaked らによる設計理論の大きな利点といえる。

一方、連続時間システム・離散時間システムのいずれのシステムをも包括するジャンプシステムに対する制御理論はメカニカルシステム・生態系・化学プロセスなどに広い範囲で応用例を有し、ゼロ次ホールドの入力をもつサンプル値制御系を表現できる。とくに線形ジャンプシステムの基礎理論は T. Yang¹⁷⁾に、最適制御理論および H_∞ 理論は A. Ichikawa and H. Katayama⁷⁾に、詳しく述べられおり、さらにジャンプシステムアプローチによるサンプル値制御系設計理論は文献^{6), 7)}などに見られる。

以上のような先行研究をふまえて著者は U. Shaked らによ

* 大阪大学大学院工学研究科 吹田市山田丘

* Graduate School of Engineering, Osaka University

(Received July 11, 2006)

(Revised December 4, 2006)

る連続時間および離散時間システムの有限時間区間における予見 H_∞ 追従制御理論^{1), 12)} を状態フィードバック則を用いる理論に限定してあるクラスの線形時変ジャンプシステムへ拡張した¹¹⁾。その理論では、U. Shaked らによる理論^{1), 12)} と同様に利用できる目標信号の予見可能性によって3つの追従問題を考え、それらの各問題に対する状態フィードバック則を与えた。このような線形時変ジャンプシステムへの拡張によって、 H_∞ 追従理論においても上述したようなジャンプシステムの特長を活かすことができると考えられる。

本論文では、状態の一部しか観測可能でないような状況を想定し、上述の状態フィードバックによる理論をサンプリング周期ごとの観測出力を設定した上での出力フィードバックによる設計理論への拡張を行なう。それにより U. Shaked らによる連続時間および離散時間システムにおける予見 H_∞ 追従制御理論を包括的に論じることを試み、2つの Riccati 解を用いた具体的なコントローラ設計法を提示し最終的にサンプル値制御系への応用にも言及する。

本論文では、利用可能な目標信号をできる限り有効に利用して追従制御系を構成するという観点から、連続信号が測定または予見できる場合をも想定しプラントが離散的な目標信号だけでなく連続的な目標信号も有する一般的な場合について考察する。それによって閉ループ系の性能改善のために必要に応じて連続的な目標信号をも利用することができる。この理論は容易に離散的な目標信号のみが利用できる場合にも適用することができる。

本論文の構成は以下のとおりである。第2章で、システムおよび問題設定について述べる。第3章では、前節で設定した追従問題のうち状態フィードバックによる H_∞ 追従制御問題の解を与え状態フィードバックを用いた制御則を提示する。その結果を利用して、第4章において本論文の主要な結果である出力フィードバックによる H_∞ 追従制御問題に対してその可解性の必要十分条件を与え所望の追従制御系を構成するための出力フィードバックコントローラを提示する。最後に第5章で1つの数値例を与え提案した制御則の有用性を検証する。

Notation: 本論文では、記号^{"/}は行列の転置を、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを、 $\|v\|_R^2$ はベクトル v に対する重み付きノルム $v'Rv$ をそれぞれ表わすものとする。また、 I_n は n 次単位行列、 $O_{m \times n}$ は m 行 n 列の零行列を表わすものとする。

2. システムおよび問題設定

以下のような連続およびジャンプのダイナミクスそれ自体に外乱および連続と離散の参照信号が印加されることを想定し、サンプリング時刻ごとに定義された観測出力をもつ線形時変ジャンプシステムについて考える。

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_3(t)r_c(t), \quad t \neq k\tau, \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(k\tau^+) &= A_d(k)x(k\tau) + B_d(k)u(k) + B_{3d}(k)r_d(k) \\ z_c(t) &= C_1(t)x(t) + D_3(t)r_c(t), \quad t \neq k\tau \\ z_d(k) &= C_{1d}(k)x(k\tau) + D_{12d}(k)u(k) \\ &\quad + D_{13d}(k)r_d(k) \\ y(k) &= C_2(k)x(k\tau) + D_{21}(k)w_d(k) + v(k)\end{aligned}\quad (1)$$

ここで、 $x \in \mathbf{R}^n$ はシステムの状態、 $w \in \mathbf{R}^p$ および $w_d \in \mathbf{R}^{p_d}$ は外乱、 $v \in \mathbf{R}^k$ は観測ノイズ、 $u \in \mathbf{R}^m$ は制御入力、 $y \in \mathbf{R}^k$ は観測出力、 $z_c \in \mathbf{R}^{k_c}$ と $z_d \in \mathbf{R}^{k_d}$ は連続と離散の評価用出力、 $r_c(t) \in \mathbf{R}^{r_c}$ と $r_d(k) \in \mathbf{R}^{r_d}$ は参照信号とする。すべての行列は適合する次元をもつものとし、表記の簡便化のために本論文を通して行列の t あるいは k に対する依存を省略する。

本論文でシステム (1) に対して提案する H_∞ 追従問題は参照信号 $r_c(t)$ および $r_d(k)$ の既知あるいは予見可能な情報を利用して最悪の初期状態 x_0 と最悪外乱 $w(t) \in L_2[0, T]$ に対して $z_c(t)$ と $z_d(k)$ それぞれの2乗和を最小化するような有限時間区間 $[0, T]$ 上での制御則 $u(k) \in l_2[0, N]$ を設計することである。ただし、 $N\tau < T < (N+1)\tau$ 、 τ はサンプリング時間とする。本論文では、参照信号 $r_c(t)$ および $r_d(k)$ は、必ずしも有限時間区間 $[0, T]$ のすべてにわたって先見的に知られているとは限らない場合を想定している。それゆえに、予見時刻 $t+h\tau$ および $k+h$ 以降の参照信号 $r_c(\cdot)$ および $r_d(\cdot)$ の情報に関しては、その統計的性質は終端時刻 T まで確定しているものの設計者（後述のゲーム問題の player の片方）にとって制御系戦略決定を行なう現在時刻においてその統計的性質自体は必ずしも終端時刻 T まで認識できているものではないと仮定する。その上で、この追従問題を解くための評価関数はシステムの状態の時間的変化の応じて参照信号の未知の部分の統計的な値を考慮し以下のように期待値を用いて表わすことにする。まず、状態フィードバックによる H_∞ 追従問題に対する評価関数として次式を定義する。

$$\begin{aligned}J_T(x_0, u, w, r_c, r_d) &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\tau^+}^{(k+1)\tau} \mathbf{E}_{\bar{R}_s} \{ \|z_c(s)\|^2 \} ds \\ &\quad + \int_{N\tau^+}^T \mathbf{E}_{\bar{R}_s} \{ \|z_c(s)\|^2 \} ds - \gamma^2 \|w\|_2^2 \\ &\quad + \sum_{k=0}^N \mathbf{E}_{\bar{R}_k} \{ \|z_d(k)\|^2 \} - \gamma^2 x_0' R^{-1} x_0\end{aligned}\quad (2)$$

さらに出力フィードバックによる H_∞ 追従問題に対する評価関数として出力に加わる外乱と観測ノイズの影響を考慮して

$$\begin{aligned}J_{vT}(x_0, u, w, w_d, v, r_c, r_d) \\ := J_T(x_0, u, w, r_c, r_d) - \gamma^2 [\|w_d\|_2^2 + \|v\|_2^2]\end{aligned}\quad (3)$$

を定義する。ここで $\gamma > 0$ はあらかじめ与えられたある正数を表わし、 $N\tau < T < (N+1)\tau$ であって、 $R = R' > 0$ は初期状態に対する重み行列を表わし、 $\mathbf{E}_{\bar{R}_s}$ と $\mathbf{E}_{\bar{R}_k}$ は $\bar{R}_{s+h\tau}$ および $\bar{R}_{k+h}$ 上の期待値を表わすものとする。ただし、 h は $r_c(t)$ お

および $r_d(k)$ の予見時間の長さであり, $\bar{R}_s$ と $\bar{R}_j$ はそれぞれ時刻 s および $j\tau$ における未来の情報を表わすものとする. すなわち, $\bar{R}_s := \{r_c(l); s < l \leq T\}$ かつ $\bar{R}_j := \{r_d(i); j < i \leq N\}$ である. よって評価関数 (2) および (3) においては, ある時刻において予見時間を越える時刻における目標信号が入る状態の評価にはその目標信号を何らかの定まった確率過程に従う確率変数とみなした上で評価用出力の2乗和の期待値を用いていることになる.

本論文では目標信号 r_c および r_d の利用可能な情報の性質によって3種類の異なる追従問題を考える.

Case i) (H_∞ Fixed-Preview Tracking -一定時間区間の予見情報を取り入れる場合-):

あらかじめ定められた予見ステップの長さを h として, 現在の時刻 t ($k\tau^+ \leq t \leq (k+1)\tau$) において, $r_c(s)$ は $s \leq \min(T, t+h\tau)$ で, $r_d(i)$ は $i \leq \min(N, k+h)$ で既知であるとする.

Case ii) (No preview case -予見情報なし-):

$\{r_c(t)\}$ および $\{r_d(k)\}$ はオンラインで測定されるものとする. すなわち, 時刻 $k\tau^+ \leq t \leq (k+1)\tau$ において, $r_c(s)$ は $s \leq t$ においてのみ, $r_d(i)$ は $i \leq k$ においてのみ知られており, 未来の目標値の情報は未知であるとする.

Case iii) (Noncausal case -目標信号が全有限時間区間 $[0, T]$ において既知である場合-):

目標信号 $\{r_c(t)\}$ および $\{r_d(k)\}$ は全時間区間 $t \in [0^+, T]$ かつ $k \in [0, N]$ においてあらかじめ既知であるものとする.

予見追従制御系を設計する上では, **Case ii)** および **Case iii)** は **Case i)** の特殊な場合といえる.

これらの3種類の追従問題に対して状態フィードバック・出力フィードバックそれぞれによる H_∞ 追従制御問題の解を得るために, システム (1) および評価関数 (2)(3) に対してそれぞれつぎのようにゲーム問題を定式化する.

状態フィードバックによる H_∞ 追従制御問題:

システム (1) と評価関数 (2) に対してつぎの不等式を満たす解 (鞍点) $(\{u^*\}, \{w^*\}, x_0^*)$ を見つけよ:

$$\begin{aligned} J_T(x_0, u^*, w, r_c, r_d) &\leq J_T(x_0^*, u^*, w^*, r_c, r_d) \\ &\leq J_T(x_0^*, u, w^*, r_c, r_d) \end{aligned}$$

ここで制御戦略 $u^*(k)$, $0 \leq k \leq N$, は時刻 s ($k\tau^+ \leq s \leq (k+1)\tau$) における予見可能な情報

$R_{s+h\tau} := \{r_c(l); 0 < l \leq s+h\tau\}$ および $R_{k+h} := \{r_d(i); 0 < i \leq k+h\}$ ($0 \leq h \leq N$) に基づいて決定されるものとする.

出力フィードバックによる H_∞ 追従制御問題:

システム (1) と評価関数 (3) に対してつぎの不等式を満たす解 (鞍点) $(\{u^*\}, \{w^*\}, \{w_d^*\}, \{v^*\}, x_0^*)$ を見つけよ:

$$\begin{aligned} J_{vT}(x_0, u^*, w, w_d, v, r_c, r_d) &\leq J_{vT}(x_0^*, u^*, w^*, w_d^*, v^*, r_c, r_d) \\ &\leq J_{vT}(x_0^*, u, w^*, w_d^*, v^*, r_c, r_d) \end{aligned}$$

状態フィードバックによる H_∞ 追従制御問題の場合と異なり, 制御戦略 $u^*(k)$, $0 \leq k \leq N$, は時刻 s ($k\tau^+ \leq s \leq (k+1)\tau$) における予見可能な情報 $R_{s+h\tau}$, R_{k+h} ($0 \leq h \leq N$) および時刻 $t = k\tau$ における観測出力 $y(k)$ に基づいて決定されるものとする.

3. 状態フィードバックによる予見 H_∞ 追従制御理論

本章では, 出力フィードバックによる予見 H_∞ 追従制御を論ずるための準備として状態フィードバックによる H_∞ 追従制御問題に対する解を与え (命題 1), さらにこの唯一の問題の解を得ることにより先に述べた3種類の問題の解が得られ, それぞれの問題に対するコントローラおよび評価関数の値が決定されることを述べる (定理 1). その詳しい証明は文献 11) を参照されたい.

システム (1) に対して以下のような一般的な仮定をおく¹¹⁾.

$$\mathbf{A1}: D'_{12d}D_{12d} > 0 \quad D'_{12d}C_{1d} = 0 \quad D'_{12d}D_{13d} = 0$$

そのうえで, 以下のようなジャンプ部分をもつ Riccati 方程式を考える.

$$\begin{aligned} \dot{X} + A'X + XA + C'_1C_1 \\ + \frac{1}{\gamma^2}XB_1B'_1X = 0, \quad t \neq k\tau \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} X(k\tau^-) - [A'_dX(k\tau)A_d + C'_{1d}C_{1d} - A'_dX(k\tau)B_d \\ \times T_2^{-1}(k)B'_dX(k\tau)A_d] = 0, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

ここで $T_2(k) = D'_{12d}D_{12d} + B'_dX(k\tau)B_d$ である. このジャンプ部分をもつ Riccati 方程式は, 線形ジャンプシステムに対する (追従 H_∞ 制御とは限らない) 標準的な H_∞ 制御理論において使われるものと同じであることに注意されたい⁷⁾.

このとき, 設定した追従問題の解として以下のような鞍点およびそれが成り立つための必要十分条件を得る. この命題は, 後に3種類の追従 H_∞ 制御問題を解くために利用される.

[命題 1]¹¹⁾ システム (1) に対して条件 **A1** を課す. このとき, 状態フィードバックによる H_∞ 追従制御問題が解をもつための必要十分条件は, 条件 $X(0^-) < \gamma^2 R^{-1}$ および $X(T) = 0$ を満たすようなある正定行列 $X(t) > 0$ が存在して Riccati 方程式 (4)(5) が有限時間区間 $[0, T]$ 上で成り立つことであり, そのとき状態フィードバックによる H_∞ 追従制御問題の解 (鞍点) はつぎのように与えられる.

$$\begin{aligned} x_0^* &= [\gamma^2 R^{-1} - X(0^-)]^{-1}\theta(0) \\ w^* &= \frac{1}{\gamma^2}B'_1(Xx + \theta) \\ u^*(k) &= -T_2^{-1}(k)B'_d \\ &\quad \times [X(k\tau)(A_dx(k\tau) + B_{3d}r_d(k)) + \theta_c(k\tau^+)] \end{aligned}$$

ここで $\theta(t)$, $t \in [0, T]$, は以下のダイナミクスおよび終端条件を満たす.

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = -\bar{A}'(t)\theta(t) + \bar{B}(t)r_c(t) & t \neq k\tau \\ \theta(k\tau) = \bar{A}'_d(k)\theta(k\tau^+) + \bar{B}_d(k)r_d(k) \\ \theta(T) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1' X \\ \bar{B} &= -(XB_3 + C_1' D_3) \\ \bar{A}_d(k) &= [I_n - B_d T_2^{-1}(k) B_d' X(k\tau)] A_d \\ \bar{B}_d(k) &= A_d' X(k\tau) [I_n - B_d T_2^{-1}(k) B_d' X(k\tau)] B_{3d} \\ &\quad + C_{1d}' D_{13d} \end{aligned}$$

である. さらに, $\theta_c(t)$ は時刻 t における $\theta(\cdot)$ によって定まり, θ の $\bar{R}_s$ および $\bar{R}_k$ 上における期待値を表わし, 時刻 t に依存する以下のダイナミクスおよび終端条件によって与えられる.

$$\begin{cases} \dot{\theta}_c(s) = -\bar{A}'(s)\theta_c(s) + \bar{B}(s)r_c(s) & s \neq k\tau \\ t \leq s \leq t_f \\ \theta_c(j\tau) = \bar{A}'_d(j)\theta_c(j\tau^+) + \bar{B}_d(j)r_d(j) \\ k < j \leq k_f \quad (k_f\tau < t_f < (k_f+1)\tau) \\ \theta_c(t_f) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

ここで $k\tau^+ \leq t \leq (k+1)\tau$ に対して

$$\begin{cases} t_f = t + h\tau & \text{and} & k_f = k + h & \text{if } (k+h)\tau < T \\ t_f = T & \text{and} & k_f = N & \text{if } (k+h)\tau \geq T \end{cases}$$

である. さらに, この鞍点における評価関数の値は以下のよう決定される.

$$\begin{aligned} J_T(x_0^*, u^*, w^*, r_c, r_d) \\ = \sum_{k=0}^N \mathbf{E}_{\bar{R}_k} \{ \|T_2^{-1}(k) B_d' \theta_1(k\tau^+) \|_{T_2(k)}^2 \} \\ + \bar{J}_c(r_c) + \bar{J}_d(r_d) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで $\theta_1(t) = \theta(t) - \theta_c(t)$, $t \in [0, T]$, であり,

$$\begin{aligned} \bar{J}_c(r_c) &= \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\tau^+}^{(k+1)\tau} + \int_{N\tau^+}^T \right\} \mathbf{R}_{\bar{R}_s} \{ \|D_{3d} r_c\|^2 \\ &\quad + \gamma^{-2} \|B_1' \theta\|^2 + 2\theta' B_3 r_c \} ds \end{aligned} \quad (9)$$

かつ

$$\begin{aligned} \bar{J}_d(r_d) &= \gamma^2 \mathbf{E}_{\bar{R}_0} \{ \|\theta(0^-)\|_{\bar{P}_0}^2 \} \\ &+ \sum_{k=0}^N \mathbf{E}_{\bar{R}_k} \{ -\|T_2^{-1}(k) B_d' \theta(k\tau^+) \|_{T_2(k)}^2 + \|D_{13d} r_d(k)\|^2 \\ &+ r_d'(k) B_{3d}' X(k\tau) [I_n - B_d T_2^{-1}(k) B_d' X(k\tau)] B_{3d} r_d(k) \\ &+ 2\theta'(k\tau^+) [I_n - T_2^{-1}(k) B_d' X(k\tau)] B_{3d} r_d(k) \} \end{aligned} \quad (10)$$

である.

(注意 1) この H_∞ 追従問題の解において評価関数の最小化を行なう $u^*(k)$ を構成する項のうち, 第 3 項は h ステップ

先までの予見情報を取り入れるための項である. この項のベクトル $\theta_c(k\tau^+)$ は現在の時刻 t に依存する終端時刻を課した方程式 (7) を時刻 T まで終端条件を更新しつつ解くことによって得られる.

つぎに, 命題 1 の結果を利用して状態フィードバックによる 3 種類の H_∞ 追従問題それぞれに対する制御則および評価関数の値を提示する¹¹⁾.

《定理 1》 システム (1) に対して A1 を仮定する. 状態フィードバックによる H_∞ 追従制御問題が解き得るとき, Riccati 方程式 (4)(5) の解を用いたゲイン

$$\begin{aligned} K_x &= -T_2^{-1}(k) B_d' X(k\tau) A_d \\ K_{r_d} &= -T_2^{-1}(k) B_d' X(k\tau) B_{3d} \\ K_\theta &= -T_2^{-1}(k) B_d'. \end{aligned}$$

を使って, 以下の結果が成り立つ.

Case i) に対する状態フィードバック制御則は命題 1 の u^* と同一であり (7) によって与えられるベクトル $\theta_c(\cdot)$ を用いて

$$u_{s1}(k) = K_x x(k\tau) + K_{r_d} r_d(k) + K_\theta \theta_c(k\tau^+)$$

と表現できる. 評価関数の値 $J_T(x_0^*, u_{s1}, w^*, r_c, r_d)$ もまた (8) に一致する.

Case ii) に対する状態フィードバック制御則は

$$u_{s2}(k) = K_x x(k\tau) + K_{r_d} r_d(k)$$

となり, 評価関数の値は

$$\begin{aligned} J_T(x_0^*, u_{s2}, w^*, r_c, r_d) \\ = \sum_{k=0}^N \mathbf{E}_{\bar{R}_k} \{ \|T_2^{-1}(k) B_d' \theta(k\tau^+) \|_{T_2(k)}^2 \} + \bar{J}_c(r_c) + \bar{J}_d(r_d) \end{aligned}$$

となる.

Case iii) に対する状態フィードバック制御則は (6) によって与えられるベクトル $\theta(\cdot)$ を用いて

$$u_{s3}(k) = K_x x(k\tau) + K_{r_d} r_d(k) + K_\theta \theta(k\tau^+)$$

となり, すべての時刻 $t \in [0, T]$ に対して $\theta(t) = \theta_c(t)$ なので評価関数の値は

$$J_T(x_0^*, u_{s3}, w^*, r_c, r_d) = \bar{J}_c(r_c) + \bar{J}_d(r_d)$$

となる.

以上, 出力フィードバックによる H_∞ 追従制御問題を論ずる準備として, 状態フィードバックによる H_∞ 追従制御系設計理論について述べた.

4. 出力フィードバックによる予見 H_∞ 追従制御理論

本章では, 前節の結果を利用してシステム (1) に対する出力フィードバックによる H_∞ 追従制御問題の解を与え, コンローラ設計法を提示する.

ここで

$$\bar{u}(k) = u(k) + T_2^{-1}(k)B_d'[X(k\tau)B_{3d}r_d(k) + \theta(k\tau^+)]$$

および

$$\bar{w} = w - \gamma^{-2}B_1'(Xx + \theta),$$

を導入すると、ジャンプ部分をもつ Riccati 方程式 (4)(5) および終端条件 $X(T) = O$ を使って、評価関数 J_{vT} はつぎのように書き換えることができる¹¹⁾。

$$\begin{aligned} J_{vT}(x_0, \bar{u}, \bar{w}, w_d, v, r_c, r_d) \\ = \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\tau^+}^{(k+1)\tau} + \int_{N\tau^+}^T \right\} \mathbf{E}_{\bar{R}_s} \{ -\gamma^2 \|\bar{w}\|^2 \} ds \\ + \sum_{k=0}^N \mathbf{E}_{\bar{R}_k} \{ \|\bar{u}(k) + T_2^{-1}(k)B_d'X(k\tau)A_d x(k\tau)\|_{T_2(k)}^2 \\ + \bar{J}_c(r_c) + \bar{J}_d(r_d) - \gamma^2 [\|w_d\|_2^2 + \|v\|_2^2] \\ - \gamma^2 \mathbf{E}_{\bar{R}_0} \{ \|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 \} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで $P_0 = [R^{-1} - \gamma^{-2}X(0^-)]^{-1}$, $\hat{x}_0 = \gamma^{-2}P_0\theta(0)$ である。

よってここで考える出力フィードバック問題は $J_{vT}(x_0, \bar{u}, \bar{w}, w_d, v, r_c, r_d)$ を最大化する $x_0, \bar{w}, w_d$ および v と、最小化する $\bar{u}(k)$ を見つける問題に帰着される。これらの $\bar{u}(k)$ および $\bar{w}$ を使って (1) 式のダイナミクスは以下のように書き換えることができる。

$$\dot{\hat{x}} = \bar{A}\hat{x} + B_1\bar{w} + \bar{r}_c, \quad t \neq k\tau, \quad x(0) = x_0$$

$$x(k\tau^+) = A_d x(k\tau) + B_d \bar{u}(k) + \bar{r}_d(k) \quad (12)$$

ただし、 $\bar{A} = A + \frac{1}{\gamma^2}B_1B_1'X$, $\bar{r}_c = B_3r_c + \frac{1}{\gamma^2}B_1B_1'\theta$, $\bar{r}_d(k) = B_{3d}r_d(k) - B_dT_2^{-1}(k)B_d'[X(k\tau)B_{3d}r_d(k) + \theta(k\tau^+)]$ とする。このシステムに対してつぎのような形式のコントローラを考える。

$$\dot{\hat{x}} = \bar{A}\hat{x} + \bar{r}_c, \quad t \neq k\tau$$

$$\hat{x}(k\tau^+) = A_d\hat{x}(k\tau) + B_d\bar{u}_*(k) + \bar{r}_d(k) \quad (13)$$

$$+ L_1[y(k) - C_2\hat{x}(k\tau)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

$$\bar{u}_*(k) = -T_2^{-1}(k)B_d'X(k\tau)A_d\hat{x}(k\tau)$$

$$+ L_2[y(k) - C_2\hat{x}(k\tau)]$$

ここで L_1 および L_2 は Riccati 方程式の解を使って後で決定されるコントローラ・ゲインである。

状態推定誤差を $e := x - \hat{x}$ とすると、(12) および (13) により以下のような誤差システムが得られる。

$$\dot{e} = \bar{A}e + B_1\bar{w}, \quad t \neq k\tau, \quad e(0) = x_0 - \hat{x}_0$$

$$e(k\tau^+) = (A_d - L_1C_2)e(k\tau) \quad (14)$$

$$+ [-L_1D_{21} \quad -L_1] \begin{bmatrix} w_d \\ v \end{bmatrix}$$

ここで、評価される出力を以下のように定義する。

$$f(k) := T_2^{\frac{1}{2}}(k)\{\bar{u}_*(k) + T_2^{-1}(k)B_d'X(k\tau)A_d x(k\tau)\}$$

$$\begin{aligned} = T_2^{\frac{1}{2}}(k)\{ & (T_2^{-1}(k)B_d'X(k\tau)A_d \\ & + L_2C_2)e(k\tau) + [L_2D_{21} \quad L_2] \begin{bmatrix} w_d \\ v \end{bmatrix} \} \end{aligned}$$

評価されるべき出力 $f(k)$ の定義された誤差システム (14) に対して、評価関数

$$\begin{aligned} J_{vT}(x_0, \bar{u}_*, \bar{w}, w_d, v, r_c, r_d) \\ = \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\tau^+}^{(k+1)\tau} + \int_{N\tau^+}^T \right\} \mathbf{E}_{\bar{R}_s} \{ -\gamma^2 \|\bar{w}\|^2 \} ds \\ + \sum_{k=0}^N \mathbf{E}_{\bar{R}_k} \{ \|f(k)\|^2 \} - \gamma^2 \mathbf{E}_{\bar{R}_0} \{ \|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 \} \\ + \bar{J}_c(r_c) + \bar{J}_d(r_d) - \gamma^2 [\|w_d\|_2^2 + \|v\|_2^2] \end{aligned} \quad (15)$$

を最大化する $x_0, \bar{w}, v$ および w_d を見つける問題を考える。この問題は誤差システム

$$\dot{e} = \bar{A}e + B_1\bar{w}, \quad t \neq k\tau, \quad e(0) = x_0 - \hat{x}_0$$

$$e(k\tau^+) = \hat{A}_d e(k\tau) + \hat{B}_d w_{de}$$

$$z(k) = \hat{C}e(k\tau) + \hat{D}w_{de},$$

$$\hat{A}_d = A_d - L_1C_2, \quad \hat{B}_d = [-L_1D_{21} \quad -L_1],$$

$$\hat{C} = T_2^{\frac{1}{2}}(k)(T_2^{-1}(k)B_d'X(k\tau)A_d + L_2C_2),$$

$$\hat{D} = T_2^{\frac{1}{2}}(k)[L_2D_{21} \quad L_2], \quad w_{de} = \begin{bmatrix} w_d \\ v \end{bmatrix}$$

に対して

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\tau^+}^{(k+1)\tau} + \int_{N\tau^+}^T \right\} \mathbf{E}_{\bar{R}_s} \{ -\gamma^2 \|\bar{w}\|^2 \} ds - \gamma^2 \|w_{de}\|_2^2 \\ + \sum_{k=0}^N \mathbf{E}_{\bar{R}_k} \{ \|z(k)\|^2 \} - \gamma^2 \mathbf{E}_{\bar{R}_0} \{ \|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 \} \end{aligned}$$

を最大化する $x_0, \bar{w}$ および w_{de} を与える問題と等価であることに注意されたい。ここで、以下のようなジャンプ部分をもつ Riccati 方程式を考え、この方程式に対してつぎのような初期条件を課す。

$$\dot{Q} + \bar{A}'Q + Q\bar{A} + \frac{1}{\gamma^2}QB_1B_1'Q = O, \quad t \neq k\tau \quad (16)$$

$$Q(k\tau^-) = \hat{A}_d'Q(k\tau)\hat{A}_d + \hat{C}'\hat{C} \quad (17)$$

$$+ \hat{R}_d'(k)\hat{T}_d^{-1}(k)\hat{R}_d(k), \quad Q(0^-) = \gamma^2 P_0^{-1}$$

$$\text{ただし, } \hat{R}_d(k) = \hat{B}_d'Q(k\tau)\hat{A}_d + \hat{D}'\hat{D},$$

$$\hat{T}_d(k) = \gamma^2 I_{\mathbf{p}_d + \mathbf{k}} - \hat{D}'\hat{D} - \hat{B}_d'Q(k\tau)\hat{B}_d \text{ であり,}$$

$$\hat{T}_d(k) > O \quad (18)$$

と仮定する。このとき、Riccati 方程式 (16)(17) を使って評価関数 (15) を $\text{col}(w_d', v')$ について平方完成すると次式が成り立つ⁷⁾。

$$J_{vT}(x_0, \bar{u}_*, w, w_d, v, r_c, r_d)$$

$$= -\left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\tau+}^{(k+1)\tau} + \int_{N\tau+}^T \right\} \mathbf{E}_{\bar{R}_s} \{ \gamma^2 \|\bar{w} - \gamma^{-2} B_1' Q e\|^2 \} ds \\ + \bar{J}_c(r_c) + \bar{J}_d(r_d) - e'(T) Q(T) e(T) \\ - \sum_{k=0}^N \mathbf{E}_{\bar{R}_k} \{ \|\hat{T}_d^{1/2}(k) \begin{bmatrix} w_d \\ v \end{bmatrix} - \hat{T}_d^{-1}(k) R_d(k) e(k) \|^2 \}$$

誤差システム (13) の $\bar{w}, w_d, v$ および x_0 に対して $\bar{w} = \bar{w}^* = B_1' Z^{-1} e$, $\begin{bmatrix} w_d \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_d^* \\ v^* \end{bmatrix} = \hat{T}_d^{-1}(k) \hat{R}_d(k) e(k)$, $x_0 = x_0^* = \hat{x}_0$ と選ぶと, $e(t) = 0$ は時間区間 $[0, T]$ に対して誤差システム (14) の平衡点となるので, $[0, T]$ 上において $e(t) = 0$ を得る. それゆえに, $\begin{bmatrix} w_d^* \\ v^* \end{bmatrix}(k) = 0, k \in [0, N]$ よりここで評価される出力 $f(k)$ は $k \in [0, N]$ において

$$f(k) = \hat{C} e(k\tau) + \hat{D} \begin{bmatrix} w_d^* \\ v^* \end{bmatrix}(k) = 0$$

となる. その結果,

$$J_{vT}(x_0^*, \bar{u}^*, \bar{w}^*, w_d^*, v^*, r_c, r_d) = \bar{J}_c(r_c) + \bar{J}_d(r_d)$$

を得る.

ここでもとの評価関数を与える (11) 式に戻って, 最悪外乱および最悪の初期状態に対して評価関数 J_{vT} を最小化するという意味で最適な入力として $\bar{u}^* = \bar{u}_*$ を選ぶと $t \in [0, T]$ における上で得た $x_0^* = \hat{x}_0$, $\bar{w}^* = 0$, $w_d^* = 0$, $v^* = 0$ および $e(t) = 0$ により不等式

$$J_{vT}(x_0^*, \bar{u}, \bar{w}^*, w_d^*, v^*, r_c, r_d) \\ = \sum_{k=0}^N \mathbf{E}_{\bar{R}_k} \{ \|\bar{u}(k) + T_2^{-1}(k) B_d' X(k\tau) A_d x(k\tau)\|_{T_2(k)}^2 \} \\ + \bar{J}_c(r_c) + \bar{J}_d(r_d) \\ \geq \bar{J}_c(r_c) + \bar{J}_d(r_d) \\ = J_{vT}(x_0^*, \bar{u}^*, \bar{w}^*, w_d^*, v^*, r_c, r_d)$$

が成り立つ. さらにこの最適入力 $\bar{u}^* = \bar{u}_*$ によって不等式

$$J_{vT}(x_0, \bar{u}^*, \bar{w}, w_d, v, r_c, r_d) \\ = -\left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\tau+}^{(k+1)\tau} + \int_{N\tau+}^T \right\} \mathbf{E}_{\bar{R}_s} \{ \gamma^2 \|\bar{w} - \gamma^{-2} B_1' Q e\|^2 \} ds \\ + \bar{J}_c(r_c) + \bar{J}_d(r_d) - \|e(T)\|_{Q(T)}^2 \\ - \sum_{k=0}^N \mathbf{E}_{\bar{R}_k} \{ \|\hat{T}_d^{1/2}(k) \begin{bmatrix} w_d \\ v \end{bmatrix} - \hat{T}_d^{-1}(k) R_d(k) e(k) \|^2 \} \\ \leq \bar{J}_c(r_c) + \bar{J}_d(r_d) \\ = J_{vT}(x_0^*, \bar{u}^*, \bar{w}^*, w_d^*, v^*, r_c, r_d)$$

が成り立つ. これらの不等式よりゲーム問題の解が以下のようを得られる.

[命題 2] システム (1) に対して仮定 **A1** を課す. このとき, 出力フィードバックによる $\mathbf{H}_\infty$ 追従制御問題が解をもつため

の必要十分条件は性質 $X(0^-) < \gamma^2 R^{-1}$, $X(T) = O$ および $Q(0^-) = \gamma^2 P_0^{-1}$ を満たす正定行列 $X(t) > O$ と $Q(t) > O$ が存在して有限時間区間 $[0, T]$ 上で Riccati 方程式 (4)(5), (16)(17) および条件 (18) が成り立つことであり, このとき出力フィードバックによる $\mathbf{H}_\infty$ 追従制御問題の解 (鞍点) はつぎのように与えられる.

$$x_0^* = [\gamma^2 R^{-1} - X(0^-)]^{-1} \theta(0), \\ w^* = \frac{1}{\gamma^2} B_1' (X x + \theta), w_d^* = 0, v^* = 0, \\ u_c^*(k) = -T_2^{-1}(k) B_d' \\ \times [X(k\tau) (A_d \hat{x}_c(k\tau) + B_{3d} r_d(k)) + \theta_c(k\tau^+) \\ + L_2 [y(k) - C_2 \hat{x}_c(k\tau)]]$$

ここでベクトル $\theta(t)$, $t \in [0, T]$ は (6) のダイナミクスおよび終端条件を満たし, ベクトル $\theta_c(s)$, $s \in [t, t+h\tau]$ は (7) のダイナミクスおよび終端条件を満たす. $\hat{x}_c$ は θ_c と同様に $\hat{x}$ のうち予見可能時刻 $t+h\tau$, $k+h$ までで決定されるベクトルである. さらに, この鞍点における評価関数の値は以下のように決定される.

$$J_{vT}(x_0^*, u_c^*, w^*, w_d^*, v^*, r_c, r_d) \\ = \sum_{k=0}^N \mathbf{E}_{\bar{R}_k} \{ \|T_2^{-1}(k) B_d' X(k\tau) A_d \hat{x}_1(k\tau) \\ + T_2^{-1}(k) B_d' \theta_1\|_{T_2(k)}^2 \} \\ + \bar{J}_c(r_c) + \bar{J}_d(r_d) \quad (19)$$

ここで $\theta_1(t) = \theta(t) - \theta_c(t)$, $\hat{x}_1(t) = \hat{x}(t) - \hat{x}_c(t)$, $t \in [0, T]$ であり, かつ $\bar{J}_c(r_c)$ および $\bar{J}_d(r_d)$ の値は (9) および (10) である.

(証明) 十分性に関してはこれまで述べたとおりであり, その解 (鞍点) における最適入力 $u_c^*(k)$, $k \in [0, N]$ は $R_{s+h\tau}$, R_{k+h} および $y(k)$, $k \in [0, N]$ に基づいてオンラインで決定される θ_c および $\hat{x}_c$ のみを用いて構成される. 必要性に関しては, このゲーム問題では目標信号 $r_c(\cdot)$ および $r_d(\cdot)$ を任意としているので $r_c(\cdot)$ および $r_d(\cdot)$ が恒等的にゼロである場合を考えることにより導出される. 詳細はたとえば文献 (6) または (7) 等を参照されたい. ■

(注意 2) この追従制御問題における追従誤差を表わす $\bar{J}_c(r_c)$ および $\bar{J}_d(r_d)$ に関しては, すべての時刻 $t \in [0, T]$ において $r_c = 0$, $r_d = 0$ かつ $\theta(t) = 0$ ならば $\bar{J}_c(r_c) = 0$ かつ $\bar{J}_d(r_d) = 0$ が成り立つ. 即ち, 参照信号が印加されず予見情報も考慮されない場合は評価関数におけるこれらの誤差項はゼロとなり, 追従を目的としない外乱抑制問題の解に帰着される. このことは状態フィードバックによる $\mathbf{H}_\infty$ 追従制御問題の場合と同様である.

この出力フィードバックによる $\mathbf{H}_\infty$ 追従制御問題に対する解となる鞍点は任意の目標信号 $\{r_c\}$ および $\{r_d\}$ に対して与えられる. それに対して問題の可解性を与える Riccati 方程式は $\{r_c\}$ および $\{r_d\}$ にかかわる項には依存しない. 従って

追従信号の印加を想定しない標準的な H_∞ 制御理論の場合と同様にジャンプ Riccati 方程式 (17) の右辺を L_1 および L_2 に関して平方完成することによって2つのコントローラーゲイン L_1 および L_2 を決定することができる。(詳しくは文献6),7)等を参照されたい。)いま, $Z(k\tau) = \gamma^2 Q^{-1}(k\tau^-)$ かつ $Z(k\tau^+) = \gamma^2 Q^{-1}(k\tau)$ であるように $Z(t) = \gamma^2 Q^{-1}(t)$ とおき, 以下のようなジャンプ部分をもつ $Z(t)$ に関する Riccati 方程式を考える.

$$\dot{Z} = \bar{A}Z + Z\bar{A}' + B_1 B_1' \quad t \neq k\tau \quad (20)$$

$$Z(k\tau^+) = A_d Z(k\tau) A_d' - (R_{2Z}' T_{2Z} R_{2Z})(k) + (F_{1Z}' V_Z F_{1Z})(k) \quad (21)$$

$$V_Z(k) > aI \text{ for some } a > 0 \quad (22)$$

ここで

$$R_2(k) = B_d' X(k\tau) A_d,$$

$$T_{1Z}(k) = \gamma^2 I_m - T_2^{-1/2} R_2(k) Z(k\tau) R_2' T_2^{-1/2}(k),$$

$$T_{2Z}(k) = \hat{D}_{21} \hat{D}_{21}' + C_2 Z(k\tau) C_2',$$

$$R_{1Z}(k) = T_2^{-1/2} R_2(k) Z(k\tau) A_d',$$

$$R_{2Z}(k) = C_2 Z(k\tau) A_d',$$

$$S_Z(k) = C_2 Z(k\tau) R_2' T_2^{-1/2}(k),$$

$$V_Z(k) = [T_{1Z} + S_Z' T_{2Z}^{-1} S_Z](k),$$

$$F_{1Z}(k) = [V_Z^{-1} (R_{1Z} - S_Z' T_{2Z}^{-1} R_{2Z})](k),$$

$$F_{2Z}(k) = -[T_{2Z}^{-1} (R_{2Z} + S_Z F_{1Z})](k),$$

$$\hat{D}_{21} = [D_{21} \quad I_k]$$

である.

この Riccati 方程式を用いて最終的に以下の結果を得る.

《定理 2》 システム (1) に対して条件 **A1** を課す. $\gamma > 0$ をあるあらかじめ与えられた正数とする. このとき H_∞ 追従制御問題のそれぞれが出力フィードバックによって解き得るための必要十分条件は, 性質 $X(0^-) < \gamma^2 R^{-1}$, $X(T) = O$ および $Z(0) = P_0$ を満たすような正定行列 $X(t) > O$ および $Z(t) > O$ が存在して Riccati 方程式 (4)(5), (20)~(22) が有限時間区間 $[0, T]$ 上で成り立つことである. さらに, ゲイン

$$L_1(k) = R_{2Z}' T_{2Z}^{-1}(k),$$

$$L_2(k) = -T_2^{-1} R_2(k) Z(k\tau) C_2' T_{2Z}^{-1}(k),$$

を使って, 以下の結果が成り立つ.

Case i) に対する出力フィードバック制御則は (7) によって与えられるベクトル $\theta_c(\cdot)$ を用いて

$$\dot{\hat{x}}_c = A\hat{x}_c + B_1 \bar{w}_c^* + B_3 r_c$$

$$\hat{x}_c(k\tau^+) = A_d \hat{x}_c(k\tau) + B_d u(k) + B_{3d} r_d(k)$$

$$+ L_1(y(k) - C_2 \hat{x}_c(k)), \quad \hat{x}_c(0) = x_{0c}^*$$

$$u_{o1}(k) = K_x \hat{x}_c(k\tau) + K_{r_d} r_d(k) + K_\theta \theta_c(k\tau^+)$$

$$+ L_2[y(k) - C_2 \hat{x}_c(k\tau)],$$

となる. ただし, $\bar{w}_c^* = \gamma^{-2} B_1' (X \hat{x}_c + \theta_c)$, $x_{0c}^* = [\gamma^2 R^{-1} - X(0^-)]^{-1} \theta_c(0)$ である. また, 評価関数の値 $J_{vT}(x_0^*, u_{o1}, w^*, w_d^*, v^*, r_c, r_d)$ は (19) に一致する.

Case ii) に対する出力フィードバック制御則は

$$\dot{\hat{x}}_c = A\hat{x}_c + B_1 w_c^* + B_3 r_c, \quad w_c^* = \gamma^{-2} B_1' X \hat{x}_c$$

$$\hat{x}_c(k\tau^+) = A_d \hat{x}_c(k\tau) + B_d u(k) + B_{3d} r_d(k)$$

$$+ L_1(y(k) - C_2 \hat{x}_c(k)), \quad \hat{x}_c(0) = 0$$

$$u_{o2}(k) = K_x \hat{x}_c(k\tau) + K_{r_d} r_d(k)$$

$$+ L_2[y(k) - C_2 \hat{x}_c(k\tau)]$$

となり評価関数の値は

$$J_{vT}(x_0^*, u_{o2}, w^*, w_d^*, v^*, r_c, r_d)$$

$$= \sum_{k=0}^N \mathbf{E}_{\bar{R}_k} \{ \|T_2^{-1}(k) B_d' X(k\tau) A_d \hat{x}_1(k\tau) + T_2^{-1}(k) B_d' \theta \|_{T_2(k)}^2 \}$$

$$+ \bar{J}_c(r_c) + \bar{J}_d(r_d)$$

となる.

Case iii) に対する出力フィードバック制御則は (6) によって与えられるベクトル $\theta(\cdot)$ を用いて

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1 \bar{w}^* + B_3 r_c, \quad \bar{w}^* = \gamma^{-2} B_1' (X \hat{x} + \theta)$$

$$\hat{x}(k\tau^+) = A_d \hat{x}(k\tau) + B_d u(k) + B_{3d} r_d(k)$$

$$+ L_1(y(k) - C_2 \hat{x}(k)), \quad \hat{x}(0) = x_0^*$$

$$u_{o3}(k) = K_x \hat{x}(k\tau) + K_{r_d} r_d(k) + K_\theta \theta(k\tau^+)$$

$$+ L_2[y(k) - C_2 \hat{x}(k\tau)]$$

で与えられる. また, すべての時刻 $t \in [0, T]$ に対して $\theta(t) = \theta_c(t)$ なので評価関数の値は $J_{vT}(x_0^*, u_{o3}, w^*, w_d^*, v^*, r_c, r_d) = \bar{J}_c(r_c) + \bar{J}_d(r_d)$ となる. この値は状態フィードバックの場合に一致する.

(証明) **Case i)**: この場合のコントローラーおよびその初期状態は (13) で考えたコントローラーにおいて $\theta(\cdot) = \theta_c(\cdot) + \theta_1(\cdot)$ のうち予見可能時刻 $t + h\tau$, $k + h$ まです決定される $\theta_c(\cdot)$ のみを用いて構成される.

Case ii): この場合, 予見情報を利用することができないので, 出力フィードバック則は **Case i)** の出力フィードバックより予見情報を導入するベクトル $\theta_c(\cdot)$ に依存する項を省いたものとなる. 予見ステップ数 $h = 0$ なので $\theta_c(t) = \mathbf{E}_{\bar{R}_t} \{\theta(t)\} = \mathbf{E}_{\bar{R}_k} \{\theta(k\tau)\} = 0$ であり, ゆえにすべての時刻 $t \in [0, T]$ に対して $\theta_1(t) = \theta(t)$ である. これにより, 評価関数の値も求められる.

Case iii): この場合, $t_f = T$ かつ $h = N - k$ であるので (6) と (7) は一致しそれゆえにすべての時刻 $t \in [0, T]$ に対して $\theta_c(t) = \theta(t)$ である. このとき, すべての $t \in [0, T]$ に対して $\theta_1(t) = 0$ かつ $\hat{x}_1(t) = 0$ であり, それゆえに (19) よ

りゲームの値は $\bar{J}_c(r_c) + \bar{J}_d(r_d)$ となる。

(注意3) **Case i)** に対する出力フィードバック則は Riccati 方程式の解を用いて設計された5つのゲインを使って構成されている。すなわち、外乱抑制の要因となるゲイン K_x 、追従目的を満たすためのゲイン K_{r_d} 、予見情報を導入するためのゲイン K_θ 、そして出力誤差を駆動して状態と状態推定値の誤差を漸近的にゼロに収束させつつその結果をフィードバックするための2つのゲイン L_1 と L_2 から成る。この出力フィードバック則は各時刻でベクトル θ_c に依存する。ゆえに終端条件が時間的に連続的に更新されるダイナミクス (7) の解を各時刻で求める必要がある。このダイナミクス自体は状態フィードバックによる予見 H_∞ 追従制御の場合と変わらない。

(注意4) 一方、**Case ii)** では目標信号の予見情報が全く用いられないので、出力フィードバックに予見情報を導入する項が付加されないのみならず、評価関数の値もベクトル θ_c に依存しないのでベクトル θ に対する終端条件が固定されたダイナミクス (6) の解を求めることにより決定される。

(注意5) **Case iii)** において求められたゲームの値 $\bar{J}_c(r_c) + \bar{J}_d(r_d)$ は与えられた目標信号 $r_c(\cdot)$ および $r_d(\cdot)$ に対して達成しうる最小値である。すなわち、目標信号に関する事前情報をもっとも多い状況において設計した制御則に対して評価関数の値が最小となることを示している。

定理2は、入力と同じ次元をもつ補助の状態変数を導入し一般的に記述されたシステム (1) を以下の形式で表わされるシステムに限定することによりゼロ次ホールドの入力をもつサンプル値制御系へ適用することが可能である。

つぎのようなゼロ次ホールドの入力をもつサンプル値制御系を考える。

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_s &= \bar{A}\bar{x}_s + \bar{B}_1 w + \bar{B}_2 \bar{u} + \bar{B}_3 r_c(t), \\ \bar{x}_s &\in \mathbf{R}^{n_s}, \bar{u} \in \mathbf{R}^{m_s} \\ \bar{z}(t) &= \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \bar{x}_s + D_3 r_c(t) \\ \bar{D}_{12} \bar{u} \end{bmatrix} \\ y(k) &= \bar{C}_2 \bar{x}_s(k\tau) + D_{21} w_d(k) + v(k)\end{aligned}$$

ここで $\bar{u}(t)$ はゼロ次ホールドの入力、即ち $\bar{u}(t) = u(k)$, $k\tau < t \leq (k+1)\tau$ であって τ はサンプリング周期を表わすとする。このシステムは補助変数 $\bar{x} \in \mathbf{R}^{m_s}$ を用いてつぎのようなジャンプシステムで表現することができる。

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_3 r_c(t), \quad t \neq k\tau, \\ x(0) &= x_0, \quad x \in \mathbf{R}^{n_s+m_s}, \quad n_s + m_s = n \\ x(k\tau^+) &= A_d x(k\tau) + B_d u(k) + B_{3d} r_d(k) \\ z_c(t) &= C_1 x(t) + D_3 r_c(t), \quad t \neq k\tau \\ z_d(k) &= C_{1d} x(k\tau) + D_{12d} u(k) + D_{13d} r_d(k) \\ y(k) &= C_2 x(k\tau) + D_{21} w_d(k) + v(k)\end{aligned}\quad (23)$$

ここで、 $x = \text{col}(\bar{x}'_s, \bar{x}')$, $w \in \mathbf{R}^p$, $w_d \in \mathbf{R}^{p_d}$, $v \in \mathbf{R}^k$,

$$u \in \mathbf{R}^{m_s}, y \in \mathbf{R}^k, z_c \in \mathbf{R}^{k_c}, z_d \in \mathbf{R}^{k_d},$$

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B}_2 \\ O_{m_s \times n_s} & O_{m_s \times m_s} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ O_{m_s \times p} \end{bmatrix}, \\ B_3 &= \begin{bmatrix} \bar{B}_3 \\ O_{m_s \times r_c} \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} I_{n_s} & O_{n_s \times n_s} \\ O_{m_s \times n_s} & O_{k \times m_s} \end{bmatrix}, \\ B_d &= \begin{bmatrix} O_{m_s \times n_s} \\ I_{m_s} \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & O_{k_c \times m_s} \end{bmatrix}, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} \bar{C}_2 & O_{m_s \times n_s} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$C_{1d} = C_1, D_{12d} = \sqrt{\tau} D_{12}, D_{13d} = D_3, r_d(k) = r_c(k\tau)$$

であって、条件 $D'_{12d} C_{1d} = O$ かつ $D'_{12d} D_{13d} = O$ を課す。
[系1] ゼロ次ホールドの入力をもつサンプル値制御系のジャンプシステム表現 (23) について考える。このシステムに仮定 **A1** および **A2** を課す。このとき、このシステムに対する H_∞ 追従問題が出力フィードバックによって解き得るための必要十分条件は、性質 $X(0^-) < \gamma^2 R^{-1}$, $X(T) = O$ および $Z(0) = P_0$ を満たすような行列 $X(t)$ および $Z(t)$ が存在して Riccati 方程式 (4)(5), (20)~(22) が有限時間区間 $[0, T]$ 上で成り立つことである。さらに、定理2で示したようにこれらの Riccati 方程式の解を用いて設計したゲインを使って H_∞ 追従問題 **Case i)**~**Case iii)** に対する出力フィードバックコントローラーを設計することができる。

(注意6) サンプル値制御系のジャンプシステム表現に関しては文献6), 7) 等で示されているように $C_{1d} = O$, $D_{13d} = O$ として連続時間間隔においてのみ制御性能を評価するシステム表現も頻繁に用いられる。当然この場合、上の系1においても $C_{1d} = O$, $D_{13d} = O$ に限定した Riccati 方程式の解を求めることになる。またさらに、ジャンプダイナミクスへの目標信号の印加を考慮しない場合、即ち $B_{3d} = O$ のとき、 $\bar{B}_d(\cdot) = O$ となることにも注意されたい。

以上、出力フィードバックによる H_∞ 追従制御系の設計理論を提示し、その適用例としてサンプル値制御系のジャンプシステム表現に対する H_∞ 追従制御系設計理論についても述べた。この理論は状態フィードバックによる理論¹¹⁾と同様に $r_c(\cdot) \equiv 0$ の場合、即ち離散的な目標信号のみがジャンプダイナミクスに印加される場合にも適用可能であることを付記しておく。

5. 数 値 例

つぎのようにサンプリング周期ごとの観測出力を設定した数値例を考える^{1), 11), 12)}。

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_s &= \bar{A}\bar{x}_s + \bar{B}_1 w_s + \bar{B}_2 \bar{u}, \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^2, w_s \in \mathbf{R}^1, \\ y(k) &= C_2 x(k\tau) + D_{21} w_d(k) + v(k)\end{aligned}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0.4 \end{bmatrix}, \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ここで $\tilde{u}$ はゼロ次ホールドの制御入力, すなわち, $\tilde{u}(t) = u(k)$, $k\tau < t \leq (k+1)\tau$ であり, τ はサンプリング周期である. このシステムダイナミクスはつぎのようなジャンプシステムで表現することができる.

$$\dot{x} = Ax + B_1 w, t \neq k\tau, x(0) = x_0$$

$$x(k\tau^+) = A_d x(k\tau) + B_d u(k), x \in \mathbf{R}^3, w \in \mathbf{R}^1.$$

ここで

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

このようなサンプル値システムのジャンプシステムによる表現に基づいてつぎのようなダイナミクスのジャンプ部分に目標信号のフィードフォワード項をもつジャンプシステムと評価関数を設定する.

$$\dot{x} = Ax + B_1 w, t \neq k\tau, x(0) = x_0$$

$$x(k\tau^+) = A_d x(k\tau) + B_d u(k) + B_{3d} r_d(k)$$

$$z_d(k) = C_{1d} x(k\tau) + D_{12d} u(k) + D_{13d}(k) r_d(k)$$

$$y(k) = C_2 x(k\tau) + D_{21} w_d(k) + v(k)$$

ここで

$$B_{3d} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_{1d} = \begin{bmatrix} 0.35 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{12d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, D_{13d} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{dT}(x_0, u, w, w_d, v, r_d) = -\gamma^2 x_0' R^{-1} x_0$$

$$-\gamma^2 [\|w\|_2^2 + \|w_d\|_2^2 + \|v\|_2^2]$$

$$+ \sum_{k=0}^N \mathbf{E}_{\bar{R}_k} \{ \|C_{1d} x(k) - r_d(k)\|^2 + 0.5^2 \|u(k)\|^2 \}$$

ここで $N\tau < T < (N+1)\tau$ であり T は非常に大きい値であると仮定しておく. このシステムおよび評価関数ではサンプリング周期を十分小さく設定した上で制御性能評価の簡便性のために離散的な追従評価のみを行なうものとする¹¹⁾. また, ジャンプ部分のダイナミクスに付加した項 $B_{3d} r_d(k)$ は, 文献 1), 11), 12) と同様に追従性能を高めることが期待できる.

$\gamma = 20, \tau = 0.05$ とし, 評価関数 J_{dT} を最小化するような出力フィードバック則を定理 2 および系 1 に基づいて設計する. 離散的な目標信号 $r_d(k) = 2\sin(2k)$ に対して H_∞ 追従制御理論を予見ステップ数 h を変えて適用し, そのシミュレーション結果を示した. Fig. 1 より $h=0$ (予見なし) か

Fig. 1 Tracking performance of the outputs for various preview lengths

Fig. 2 The error of tracking $r_d(k) = 2\sin(2k)$ for various preview lengths

ら $h=3, 6, 9, 12$ と予見ステップ数を増やしていくにつれて追従性能が良くなり, 追従誤差が減少していることが文献 11) の数値例と同様に確認できた. 本論文においてはさらに予見ステップを $h=24, 36$ と増やしてみるによりさらに追従性能が良くなることを確認した. 実際, Fig. 2 に各予見ステップに対する追従誤差の 2 乗の時間的変化を示しており, これにより予見ステップが増えるにつれて追従誤差が明らかに減少していくことがわかる. 予見ステップ $h=36$ においては $t=5$ 秒後以降においても若干の追従誤差の振動が見られるが, ほぼ追従目的を達成したといえる結果が得られた. この数値シミュレーションによって, 文献 1), 11) または 12) で示されている数値例に対してゼロ次ホールドの入力とサンプリング周期ごとの観測出力を設定したサンプル値制御系を設計することを想定した場合でも追従性能に大きな劣化が見られることなく, 予見情報の利用により追従性能が改善することが確認された.

6. おわりに

本論文では, U. Shaked らによる連続時間および離散時間

システムに対する追従制御理論^{1),12)}の線形時変ジャンプシステムへの拡張を試み、線形時変ジャンプシステムに対する有限時間区間での出力フィードバックによる H_∞ 追従制御問題について考察した。本論文では、利用できる目標信号の性質（予見可能性）によって3種類の H_∞ 追従制御問題を考えた。予見情報を考慮した追従制御系において **Case i)** は最も一般的な問題設定といえる。

本論文の有用性は、幅広い応用例をもつジャンプシステムのプラントに対する追従制御系の設計理論を提示したこと、また、この予見 H_∞ 追従制御理論が連続時間システム・離散時間システムのいずれの理論も包括する理論であること、状態の一部しか観測可能でない場合をも想定し出力フィードバックによる設計理論を提示したこと、システムのクラスを限定することによりゼロ次ホールドの入力をもつサンプル値制御系に適用できることにあるといえる。数値例によって予見時間を長くとることにより追従性能を高めることができることを示した。

提示した制御則においては、予見情報を導入するために必要なダイナミクスに対する解を時間の経過に従って変化する終端条件に応じて求める必要がある。この解を実時間で得るアルゴリズムを構築することは今後の課題として残されている。なお、**Case iii)** ではあらかじめ固定された終端条件に対して事前にその解を求めておくことができ、実時間で予見情報を取り入れるダイナミクスを解く必要がないことを付記しておく。

また、本論文は有限時間に限定した問題設定で考察しているが、ジャンプシステム・サンプル値制御系ともに無限時間での H_∞ 制御理論はすでに構築されている。すでに述べたように本論文で提示した問題の可解性は従来の H_∞ 理論と全く同じ形式の Riccati 方程式に基づいて論じられているので、文献 12) などでも示唆されているように無限時間での設計理論に拡張することは十分可能であると思われる。その追従性能評価・アルゴリズム構築を含めて今後の重要な発展的研究課題となり得る。

さらに、ジャンプシステムに対して制御対象のモデル化誤差を考慮したロバスト追従制御問題や不規則外乱が加わることを想定した確率追従制御問題を考察することも今後の課題として重要である。

謝辞 本研究全般に渡って多数の有益な御意見を頂きました京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻の杉江俊治教授に感謝します。また、大阪大学大学院工学研究科フロンティア研究機構におきまして一連の予見制御理論の研究に従事する機会を与えて下さいました池田雅夫教授に感謝します。

参考文献

- 1) A. Cohen and U. Shaked: Linear Discrete-Time H_∞ -Optimal Tracking with Preview, IEEE Trans. Automat. Contr., **42-2**, 270/276 (1997)
- 2) A. Cohen and U. Shaked: Robust Discrete-Time H_∞ -Optimal Tracking with Preview, Int. J. Robust and Non-

linear Control, **8**, 29/37 (1998)

- 3) E. Gershon, D. J. N. Limebeer, U. Shaked and I. Yaesh: Stochastic H_∞ Tracking with Preview for State-Multiplicative Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., **49-11**, 2061/2068 (2004)
- 4) E. Gershon, U. Shaked and I. Yaesh: H_∞ tracking of linear continuous-time systems with stochastic uncertainties and preview, Int. J. Robust and Nonlinear Control, **14**, 607/626 (2004)
- 5) 早勢, 市川: 目標値の未来値を最適に利用する追従制御, 計測自動制御学会論文集, **5-1**, 86/94 (1969)
- 6) A. Ichikawa and H. Katayama: H_2 and H_∞ control for jump systems with application to sampled-data systems, Int. J. Systems Science, **29-8**, 829/849 (1998)
- 7) A. Ichikawa and H. Katayama: Linear Time Varying Systems and Sampled-data Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, **265** (2001)
- 8) A. Kojima and S. Ishijima: LQ preview synthesis: Optimal control and worst-case analysis, IEEE Trans. Automat. Contr., **44-2**, 352/357 (1999)
- 9) A. Kojima and S. Ishijima: H_∞ performance of preview control systems, Automatica, **39-4**, 693/701 (2003)
- 10) A. Kojima and S. Ishijima: H_∞ preview tracking in output feedback setting, Int. J. Robust and Nonlinear Control, **14**, 627/641 (2004)
- 11) 名倉 剛: 線形ジャンプシステムに対する状態フィードバックによる予見 H_∞ 追従制御, 計測自動制御学会論文集, **42-6**, 628/635 (2006)
- 12) U. Shaked and C. E. de Souza: Continuous-Time Tracking Problems in an H_∞ Setting: A Game Theory Approach, IEEE Trans. Automat. Contr., **40-5**, 841/852 (1995)
- 13) C. E. de Souza, U. Shaked and M. Fu: Robust H_∞ -tracking: a game theory approach, Int. J. Robust and Nonlinear Control, **5**, 223/238 (1995)
- 14) K. Takaba: Robust servomechanism with preview action for polytopic uncertain systems, Int. J. Robust and Nonlinear Control, **10-2**, 101/111 (2000)
- 15) K. Takaba: A tutorial on preview control systems, Proc. 2nd SICE Annual Conference, Fukui, 1561/1566 (2003)
- 16) M. Tomizuka: Optimal continuous finite preview problem, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-20-3**, 362/365 (1975)
- 17) T. Yang: Impulsive Control Theory, LN in Control and Information Sciences, **272**, Springer-Verlag, Berlin (2001)

[著者紹介]

名倉 剛 (正会員)

1996 年京都大学工学部数理工学科卒業。2003 年静岡大学大学院理工学研究科博士後期課程システム科学専攻修了。同年青山学院大学理工学部電気電子工学科助手。2005 年 4 月～9 月京都大学大学院情報学研究科研修員。2005 年 10 月～2006 年 3 月大阪大学大学院工学研究科フロンティア研究機構特任助手。2006 年 4 月～9 月京都大学大学院情報学研究科研修員。2006 年 11 月～大阪大学大学院工学研究科附属フロンティア研究センター特任助手。(2007 年 4 月～特任助教) 現在に至る。ロバスト制御, 予見制御, 非線形制御の研究に従事 (工学博士)。