極配置問題におけるフィードバックゲインの構成とその応用

不破 勝彦*・成 清 辰 生**・神 藤 久*

A Structure of State Feedback Gain Matrices in Pole Assignment and Its Application

Katsuhiko FUWA*, Tatsuo NARIKIYO** and Hisashi KANDOH*

In the controller design of the multi-input systems, it is well known that the feedback gain matrices to achieve a desired pole assignment are uniquely underdetermined and contain some redundant elements. From the viewpoint of theory and application, it is very interesting to investigate the class of parameter matrices which include these redundant elements. In this paper, we clarify the class of parameter matrices of the feedback gain matrices which assign the desired poles and propose a design method of the feedback gain matrices. Finally, on the basis of these studies, we consider not only the problem of pole assignment but also the problem of zero assignment.

Key Words: pole assignment, parameter matrices, redundancy, nonsingularity, zero assignment

1. はじめに

極配置問題は、現代制御理論特有の重要なテーマの一つであり、最適制御¹⁾など多くの制御問題として定式化されている。とりわけ、多入力系では一般に希望の極配置を達成するフィードバックゲイン行列において自由度が存在することが知られている²⁾。本稿では、この自由度について考察する。

自由度を考慮したフィードバックゲイン行列の設計問題に関しては、これまでに多数報告されてきた。文献2)では、フィードバックゲイン行列は自由度を記述する任意のパラメータ行列 $\bar{K}$ と、それに依存して正則とする行列 U の逆行列との積により構成されることが示されている。この方法の特徴は、フィードバックゲイン行列における自由度が明示されることに加え、数値的に安定であることである^{3),4)}。そして、この自由度は低ゲインのフィードバックゲインを導出すること²⁾や過渡応答を改善すること^{5),6)}に適用されている。これら数値計算上や制御性能上において有効性が報告されていることからしても、自由度を記述するパラメータ行列のクラスを明らかにすることは工学的に意義があると考えられる。しかしながら、このクラス以前に行列 U が正則となるようなパラメータ行列 $\bar{K}$ の存在性については明確にされていない。文献7)では正則とする行列 U の存在性を議論しているが、それを保証するパラメータ行列 $\bar{K}$ のクラスについては明確にしていな

いようである。文献8)では、繰り返し計算に基づく固有ベクトルの決定問題が議論されている。得られるフィードバックゲイン行列は入力行列の階数と同等の次数をもつ行列をパラメータ行列として有する。しかしながら、パラメータ行列は上記 $\bar{K}$ よりも要素の数が少なく、また正則であるという制限が存在する。文献9),10)では定数出力フィードバック制御による固有ベクトルの決定問題が議論されている。状態フィードバック制御と同様、フィードバックゲイン行列をパラメータ行列により記述することに成功しているが、フィードバックゲイン行列が存在するパラメータ行列のクラスについては言及していない。以下、文献11)では閉ループ系のロバスト性や雑音除去特性を改善するようなフィードバックゲイン行列の設計問題が、文献12),13)ではディスクリプタ系に対して極配置を行なうための比例微分状態フィードバック制御則の設計問題が、文献14)~16)では開ループ極と閉ループ極が共通する場合およびしない場合におけるフィードバックゲイン行列の設計問題が、文献17),18)ではフィードバックゲイン行列の自由パラメータを用いてシステム行列や入力行列のパラメータ変動が存在しても閉ループ系を安定にするようなフィードバックゲイン行列の設計問題が、おのおの議論されている。しかしながらどの文献も、フィードバックゲイン行列がパラメータ行列により記述されているものの、フィードバックゲイン行列が存在するパラメータ行列のクラスについてまでは明らかにされていない。その他、文献19)~21)でも文献2)と同様のフィードバックゲイン行列の構造を用いた議論がなされているが、フィードバックゲイン行列が存在するパラメータ行列のクラスについてまでは明らかにされていない。

本稿では、文献2)のフィードバックゲイン行列に対して、正則性を保証するパラメータ行列の一つのクラスについて考

* 名古屋工業大学 名古屋市昭和区御器所町

** 豊田工業大学 名古屋市天白区久方2丁目12-1, 理化学研究所 名古屋市守山区大字下志味字穴ヶ洞 2271 番地 130

* Nagoya Institute of Technology, Showa-ku, Nagoya

** Toyota Technological Institute, Tenpaku-ku, Nagoya
RIKEN BMC Center, Moriyama-ku, Nagoya

(Received October 12, 2006)

(Revised February 6, 2007)

察する。上記において、フィードバックゲイン行列を構成する二つの行列 $U, \bar{K}$ について述べたが、 U は $\bar{K}$ に依存することが、この問題の本質的な難しさであると考えられる。そこで、本稿ではまず、フィードバックゲイン行列が存在するための問題を、制御対象とパラメータ行列に関係するものと分離して定式化する。これは、行列 $\bar{K}$ に依存する行列 U の正則性を直接的に議論する⁷⁾ことと異なる点であり、パラメータ行列のクラスが明確にされるための本稿の議論の特徴である。つぎに、この定式化のもとでパラメータ行列の構造を明らかにし、フィードバックゲイン行列が存在することを保証するパラメータ行列のクラスを導出する。逆にいえば、フィードバックゲイン行列が存在しないパラメータ行列を比較的容易に求めることが可能となる。このことは、理論的に興味深いばかりでなく、自由度を極配置以外の設計目的で用いる応用上の観点からも有用であると考ええる。本稿では得られたパラメータ行列の適用例として、unity-rank アプローチ²²⁾に基づく極零点配置問題を解く。希望の極および零点が配置されるフィードバックゲイン行列を求める際に、極配置を可能としかつ零点も配置するためのパラメータ行列が容易に与えられることも示される。

本稿の構成は以下のとおりである。

2章では問題の設定を行ない、3章ではフィードバックゲイン行列が存在するための問題を、制御対象とパラメータ行列に関係するものと分離して定式化する。4章ではパラメータ行列の構造を明らかにし、フィードバックゲイン行列が存在することを保証するパラメータ行列のクラスを導出して問題を解く。5章では3次系に対してパラメータ行列のクラスを解析的に求め、その結果を適用して6章では極零点配置問題を解く。

なお、本稿において、 I_n は n 次単位行列、 $O_{n \times m}$ は n 行 m 列の零行列、 $\otimes$ はクロネッカ積、 $\text{rank} A$, $\det A$, $\text{adj} A$, $\lambda(A)$ はおのおの行列 A の階数、行列式、余因子行列、固有値の集合、そして A^{-1} , A^T は行列 A の逆行列、転置行列をおおの表わす。

2. 問題の設定

つぎの状態方程式を考える。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

ただし、 $x(t)$ は n 次元状態変数、 $u(t)$ は m 次元制御入力、 A は $n \times n$ 、 B は $n \times m$ の定数行列であり、 (A, B) は可制御とする。いま、新たな m 次元入力 $v(t)$ をとり、 $m \times n$ の定数行列 K による状態フィードバック制御

$$u(t) = -Kx(t) + v(t) \quad (2)$$

を(1)式に施すことにより、閉ループ系の状態方程式は

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bv(t) \quad (3)$$

となる。本稿では、文献2)の議論にしたがい、希望の閉ルー

プ極 λ_i ($i = 1, \dots, n$) は

• 仮定1: 代数的重複度 m を越えない^(注1)

• 仮定2: 行列 A の固有値と共通ではない

を満足するものとして、行列 $A - BK$ の固有値が λ_i ($i = 1, \dots, n$) となる K を求める問題を考察する。文献2)より

$$K\bar{N} = \Pi_k \quad (4)$$

を満足する K が存在すれば極配置は可能である。ただし

$$\bar{N} := [N_1 k_1 \ \cdots \ N_n k_n], \quad N_i := (A - \lambda_i I_n)^{-1} B$$

$$\Pi_k := [k_1 \ \cdots \ k_n] \quad (5)$$

であり、 Π_k はフィードバックゲイン行列の自由度を記述するパラメータ行列である。このとき、 $\bar{N}$ が正則行列であれば、(4)式を満足する K が存在する。 $\bar{N}$ が正則行列でない場合において(4)式が満足されるとすると、 n 個の極を任意に配置するという要求は満足されない。したがって、このような場合は考えない。なお、複素極を配置する場合において、 $\lambda_i = \lambda_j^*$ ならば $k_i = k_j^*$ とする^{3), 7)}。ただし、 $*$ は $\cdot$ の複素共役である。

そこで、本稿ではつぎの問題を考える。

[問題1] 行列 $\bar{N}$ が正則となるようなパラメータ行列 Π_k のクラスを求めよ。□

問題1を解くにあたり、本稿では以下の考察を行なう。

• 上記より行列 $\bar{N}$ はパラメータ行列 Π_k に依存していることがわかる (これは、第1章で述べた文献2)の行列 U が行列 $\bar{K}$ に依存している関係である)。そこで、(1)式の行列 A, B に関係する行列と自由パラメータに関係する行列に分離された問題の定式化を行なう。

• その上で、行列 $\bar{N}$ が正則となるようなパラメータ行列 Π_k の存在とそのクラスを考察する。

3. 問題の定式化

行列 A の特性多項式および行列 B を

$$d(\lambda_i) := -\det(\lambda_i I_n - A)$$

$$=: -\lambda_i^n - \alpha_1 \lambda_i^{n-1} - \cdots - \alpha_{n-1} \lambda_i - \alpha_n$$

$$B = [b_1 \ \cdots \ b_m]$$

として記述する。

Faddeev の公式²³⁾により

$$d(\lambda_i)(A - \lambda_i I_n)^{-1} b_j = [\bar{U}_{cj} \ U_{cj}^c] \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{cj}(\lambda_i) \\ \Phi_{cj}^c(\lambda_i) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

である (詳細は付録Aを参照されたい)。ただし

$$\bar{U}_{cj} := [b_j \ \cdots \ A^{n_j-1} b_j], \quad U_{cj}^c := [A^{n_j} b_j \ \cdots \ A^{n-1} b_j]$$

(注1) (5)式の $\bar{N}$ は n 個の N_i ($i = 1, \dots, n$) から独立な n 個の列ベクトルを取り出して構成されているため、一つの N_i から $m+1$ 個以上の独立な列ベクトルを取ることは不可能である。

$$\bar{\Phi}_{cj}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \phi_{n-1}(\lambda_i) \\ \vdots \\ \phi_{n-\nu_j}(\lambda_i) \end{bmatrix}, \quad \Phi_{cj}^c(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \phi_{n-\nu_j-1}(\lambda_i) \\ \vdots \\ \phi_1(\lambda_i) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\phi_k(\lambda_i) := \lambda_i^k + \alpha_1 \lambda_i^{k-1} + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_i + \alpha_k$, $k = 1, \dots, n-1$ であり, また $\nu_j (j = 1, \dots, m)$ は可制御指数である. いま, $k_i := [k_{i1} \ \cdots \ k_{im}]^T (i = 1, \dots, n)$ とすると

$$\bar{N}D = \bar{U}_c \bar{\Sigma} + U_c^c \Sigma^c \quad (7)$$

と記述される (詳細は付録 A を参照されたい.). ただし

$$D := \begin{bmatrix} d(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & d(\lambda_n) \end{bmatrix},$$

$$\bar{U}_c := [\bar{U}_{c1} \ \cdots \ \bar{U}_{cm}], \quad U_c^c := [U_{c1}^c \ \cdots \ U_{cm}^c],$$

$$\bar{\Sigma} := \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{c1}(\lambda_1)k_{11} & \cdots & \bar{\Phi}_{c1}(\lambda_n)k_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{\Phi}_{cm}(\lambda_1)k_{1m} & \cdots & \bar{\Phi}_{cm}(\lambda_n)k_{nm} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma^c := \begin{bmatrix} \Phi_{c1}^c(\lambda_1)k_{11} & \cdots & \Phi_{c1}^c(\lambda_n)k_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_{cm}^c(\lambda_1)k_{1m} & \cdots & \Phi_{cm}^c(\lambda_n)k_{nm} \end{bmatrix}$$

である. それゆえ, 問題は行列 $\bar{U}_c \bar{\Sigma} + U_c^c \Sigma^c$ の正則性である. さて, $\bar{\Sigma}$ および Σ^c はつぎのようにも記述できる.

$$\bar{\Sigma} = \bar{\Phi} \bar{K}, \quad \Sigma^c = \Phi^c \bar{K}$$

ただし

$$\bar{\Phi} := \begin{bmatrix} [\bar{\Phi}_{c1}(\lambda_1) \cdots \bar{\Phi}_{c1}(\lambda_n)] & & \\ & \ddots & \\ & & [\bar{\Phi}_{cm}(\lambda_1) \cdots \bar{\Phi}_{cm}(\lambda_n)] \end{bmatrix}$$

$$\bar{K} := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & k_{n1} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} k_{1m} & & \\ & \ddots & \\ & & k_{nm} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^c := \begin{bmatrix} [\Phi_{c1}^c(\lambda_1) \cdots \Phi_{c1}^c(\lambda_n)] & & \\ & \ddots & \\ & & [\Phi_{cm}^c(\lambda_1) \cdots \Phi_{cm}^c(\lambda_n)] \end{bmatrix}$$

である. それゆえ, 行列 $\bar{U}_c \bar{\Sigma} + U_c^c \Sigma^c$ は任意パラメータを含んだ行列 $\bar{K}$ と分割して

$$\bar{U}_c \bar{\Sigma} + U_c^c \Sigma^c = [\bar{U}_c \ U_c^c] \begin{bmatrix} \bar{\Phi} \\ \Phi^c \end{bmatrix} \bar{K}$$

となるので, 考えるべき問題 1 は, つぎのように記述される. [問題 1'] 行列 $\bar{U}_c \bar{\Sigma} + U_c^c \Sigma^c$ を正則にするような $\bar{K}$ のクラスを求めよ. $\square$

ところで, 行列 $\bar{U}_c \bar{\Sigma} + U_c^c \Sigma^c$ の階数は

$$\begin{aligned} \text{rank}(\bar{U}_c \bar{\Sigma} + U_c^c \Sigma^c) \\ = \text{rank} \bar{K} - \dim \left(\text{Im} \bar{K} \cap \text{Ker} [\bar{U}_c \ U_c^c] \begin{bmatrix} \bar{\Phi} \\ \Phi^c \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

である²⁴⁾. 極配置の要請から $\text{rank} \bar{K} = n$ となるように $\bar{K}$ を設定するので, 行列 $\bar{U}_c \bar{\Sigma} + U_c^c \Sigma^c$ が正則であるためには, 簡単な計算より

$$\begin{aligned} \text{Im} \bar{K} \cap \text{Ker} [\bar{U}_c \ U_c^c] \begin{bmatrix} \bar{\Phi} \\ \Phi^c \end{bmatrix} &= \emptyset \\ \Leftrightarrow \text{rank} \left[(\bar{K}^T)^P \quad [\bar{\Phi}^T \ \Phi^{cT}] \begin{bmatrix} \bar{U}_c^T \\ U_c^{cT} \end{bmatrix} \right] &= nm \quad (8) \end{aligned}$$

でなければならない^{24), 25)}. ただし, $(\bar{K}^T)^P$ は

$$\bar{K}^T (\bar{K}^T)^P = O_{n \times n(m-1)}$$

を満足する nm 行 $n(m-1)$ 列の行列である. そこで

$$T_k = \begin{bmatrix} I_m \otimes e_1 \\ \vdots \\ I_m \otimes e_n \end{bmatrix}, \quad e_i = [O_{1 \times i-1} \ 1 \ O_{1 \times n-i}]$$

なる nm 次直交行列 (行変換行列) と

$$K^{Pi} k_i = O_{(m-1) \times 1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

を満足する $K^{Pi} (i = 1, \dots, n)$ を考慮して, (8) 式は

$$\begin{aligned} \text{rank} \left[T_k (\bar{K}^T)^P \quad T_k [\bar{\Phi}^T \ \Phi^{cT}] \begin{bmatrix} \bar{U}_c^T \\ U_c^{cT} \end{bmatrix} \right] \\ = \text{rank} \begin{bmatrix} K^{P1T} & & \theta_c(\lambda_1) \\ & \ddots & \vdots \\ & & K^{PnT} \theta_c(\lambda_n) \end{bmatrix} = nm \quad (10) \end{aligned}$$

と記述される (詳細は付録 B を参照されたい.). ただし

$$\theta_c(\lambda_i) = [\theta_{c1}(\lambda_i)^T \ \cdots \ \theta_{cm}(\lambda_i)^T]^T, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\theta_{cj}(\lambda_i)^T := \bar{U}_{cj} \bar{\Phi}_{cj}(\lambda_i) + U_{cj}^c \Phi_{cj}^c(\lambda_i), \quad j = 1, \dots, m$$

である. それゆえ, 問題 1' は (10) 式が満足されるような $\bar{K}$ のクラスを求めることとなる. (10) 式は, 制御対象に依存する行列 $T_k [\bar{\Phi}^T \ \Phi^{cT}] \begin{bmatrix} \bar{U}_c^T \\ U_c^{cT} \end{bmatrix}$ と, パラメータ行列に関係する行列 $T_k (\bar{K}^T)^P$ とに分離して表現されている.

4. 問題の解法

2 章の問題 1 を解くにあたり, 本章では

- (1) 行列 $\theta_c(\lambda_i) (i = 1, \dots, n)$ の構造と性質 (4.1 節)
- (2) (10) 式を満足する自由パラメータが存在すること (4.2 節)
- (3) (10) 式が満足されるようなパラメータ行列の構造とクラス (4.3 節)

をおのおの明らかにする.

4.1 行列 $\theta_c(\lambda_i)$ の構造と性質

(A, B) の可制御標準形の対を (A_c, B_c) とする. ただし,

$A_c = T^{-1}AT$, $B_c = T^{-1}B$ であり, T は可制御標準形に変換するための変換行列²³⁾である. 行列 A_c , B_c の構造については, 付録 C を参照されたい. このとき

$$g(\lambda_i) := \begin{bmatrix} g_{11}(\lambda_i) & \cdots & g_{1m}(\lambda_i) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1}(\lambda_i) & \cdots & g_{mm}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

ただし

$$g_{jj}(\lambda_i) := \lambda_i^{\nu_j} + a_{j,\xi_j} \lambda_i^{\nu_j-1} + \cdots + a_{j,\xi_j-1+2} \lambda_i + a_{j,\xi_j-1+1}$$

$$g_{jl}(\lambda_i) := a_{j,\xi_l} \lambda_i^{\nu_l-1} + \cdots + a_{j,\xi_l-1+2} \lambda_i + a_{j,\xi_l-1+1} \quad (l \neq j)$$

なる行列を定義すると

$$\det(\lambda_i I_n - A) = \det g(\lambda_i), \quad i = 1, \dots, n$$

となる²³⁾. また

$$\bar{b} := \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1,m-1} & b_{1m} \\ 0 & 1 & \cdots & b_{2,m-1} & b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & b_{m-1,m} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

なる行列を定義する. このとき, B_c の構造から

$$B_c \bar{b}^{-1} = [\tilde{b}_1 \cdots \tilde{b}_m], \quad \tilde{b}_j := \begin{bmatrix} O_{(\xi_j-1) \times 1} \\ 1 \\ O_{(n-\xi_j) \times 1} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, m$$

となる. 行列 A , B に関する n 次行ベクトル $\theta_{cj}(\lambda_i)$ は

$$\begin{aligned} \theta_{cj}(\lambda_i) &= b_j^T \text{adj}(\lambda_i I_n - A^T) \\ &= d(\lambda_i) b_j^T (A^T - \lambda_i I_n)^{-1}, \quad j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

であるので

$$(\lambda_i I_n - A) \theta_{cj}(\lambda_i)^T = \det(\lambda_i I_n - A) b_j$$

となる. 両辺左から T^{-1} をかけると

$$(\lambda_i I_n - A_c) T^{-1} \theta_{cj}(\lambda_i)^T = \det(\lambda_i I_n - A) T^{-1} b_j \quad (11)$$

が得られる. いま

$$\sum_{l=1}^m g_{sl}(\lambda_i) G_{jl}(\lambda_i) = \begin{cases} \det(\lambda_i I_n - A) b_{sj} & (s < j) \\ \det(\lambda_i I_n - A) & (s = j) \\ 0 & (s > j) \end{cases} \quad (12)$$

を満足する λ_i の多項式 $G_{jl}(\lambda_i)$ ($j, l = 1, \dots, m$) を考えると, 行列 $\lambda_i I_n - A_c$ および B_c の構造から, (11) 式を満足する行ベクトル $\theta_{cj}(\lambda_i)$ は

$$\begin{aligned} \theta_{cj}(\lambda_i) &= [G_{j1}(\lambda_i) [1 \quad \lambda_i \quad \cdots \quad \lambda_i^{\nu_1-1}] \cdots \\ &\quad G_{jm}(\lambda_i) [1 \quad \lambda_i \quad \cdots \quad \lambda_i^{\nu_m-1}]] T^T, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

として得られる.

さて

$$ET := \begin{bmatrix} 1 & O_{1 \times (\nu_1-1)} & & \\ & 1 & O_{1 \times (\nu_2-1)} & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & O_{1 \times (\nu_m-1)} \end{bmatrix}$$

なる行列 E を考える. このとき

$$E \text{adj}(\lambda_i I_n - A) B = E T \text{adj}(\lambda_i I_n - A_c) B_c$$

であるので, (11) 式より

$$\begin{aligned} E \text{adj}(\lambda_i I_n - A) B &= E T T^{-1} [\theta_{c1}(\lambda_i)^T \cdots \theta_{cm}(\lambda_i)^T] \\ &= \begin{bmatrix} G_{11}(\lambda_i) & \cdots & G_{m1}(\lambda_i) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{1m}(\lambda_i) & \cdots & G_{mm}(\lambda_i) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる. それゆえ, $E \text{adj}(\lambda_i I_n - A) B$ は $T^{-1} \theta_c(\lambda_i)^T$ の第 $\nu_s + 1$ 行目を取り出して並べたものである. ただし, $s = 1, \dots, m-1$ である. 付録 D より, 行列 $E \text{adj}(\lambda_i I_n - A) B$ が正則であるので, $\theta_c(\lambda_i)$ は行フルランクとなる.

4.2 (10) 式を満足する自由パラメータの存在

(9) 式を満足する行列 K^{Pi} ($i = 1, \dots, n$) を

$$\begin{bmatrix} K^{P1i} \\ K^{P2i} \end{bmatrix} := K^{PiT}$$

として分割する. ただし, K^{P2i} は $m-1$ 次行ベクトルである. 任意の k_i ($i = 1, \dots, n$) に対して K^{P1i} ($i = 1, \dots, n$) を正則行列に与えたとき, (9) 式より

$$k_{im} K^{P2i} + [k_{i1} \cdots k_{i,m-1}] K^{P1i} = O_{1 \times (m-1)} \quad (13)$$

を満足する K^{P2i} ($i = 1, \dots, n$) は存在する. なお, $k_{im} = 0$ の場合 $k_i \neq O_{m \times 1}$ であるかぎり, (13) 式の k_{im} を他の $k_{ij} \neq 0$ ($j \neq m$) にすることで (13) 式に対応する K^{P1i} , K^{P2i} は存在する. このとき

$$\Theta(\lambda_i) := k_i^T \theta_c(\lambda_i), \quad i = 1, \dots, n$$

なる n 次行ベクトル $\Theta(\lambda_i)$ を考えると, (10) 式の等価な言い換えは, (13) 式および行列 K^{P1i} ($i = 1, \dots, n$) の正則性より

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} K^{P11} & \theta_c^1(\lambda_1) \\ O_{1 \times (m-1)} & \Theta(\lambda_1) \\ \vdots & \vdots \\ K^{P1n} & \theta_c^1(\lambda_n) \\ O_{1 \times (m-1)} & \Theta(\lambda_n) \end{bmatrix} &= nm \\ \Leftrightarrow \det [\Theta(\lambda_1)^T \cdots \Theta(\lambda_n)^T]^T &\neq 0 \end{aligned}$$

となる. ただし

$$\theta_c^1(\lambda_i) := [\theta_{c1}(\lambda_i)^T \cdots \theta_{c,m-1}(\lambda_i)^T]^T, \quad i = 1, \dots, n$$

である. よって

$$Y_{ij}(\lambda_i) := \sum_{l=1}^m k_{il} G_{lj}(\lambda_i), \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, m \quad (14)$$

とすれば

$$\begin{aligned} \Theta(\lambda_i) &= [Y_{i1}(\lambda_i) [1 \quad \lambda_i \quad \dots \quad \lambda_i^{\nu_1-1}] \quad \dots \\ &\quad Y_{im}(\lambda_i) [1 \quad \lambda_i \quad \dots \quad \lambda_i^{\nu_m-1}]]^T, \quad i=1, \dots, n \quad (15) \end{aligned}$$

として記述される。このとき、(14) 式より

$$[Y_{i1}(\lambda_i) \quad \dots \quad Y_{im}(\lambda_i)]^T = E \text{adj}(\lambda_i I_n - A) B k_i$$

である。 k_i は自由パラメータであり、行列 $E \text{adj}(\lambda_i I_n - A) B$ は正則であることから、行列 $[\Theta(\lambda_1)^T \quad \dots \quad \Theta(\lambda_n)^T]^T$ を正則にするもつと、 $Y_{ij}(\lambda_i)$ ($i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$) は自由に設定することができる。すなわち、 $[Y_{i1}(\lambda_i) \quad \dots \quad Y_{im}(\lambda_i)]^T$ は、自由パラメータ k_i の等価な言い換えとなっている。

それゆえ、この条件と (15) 式の行列の構造が希望の閉ループ極と対応づけて明らかになったため、次小節では希望の閉ループ極の性質に対応して (10) 式が満足される自由パラメータについて考察する。

4.2.1 相異なる極を配置する場合

行列 $[\Theta(\lambda_1)^T \quad \dots \quad \Theta(\lambda_n)^T]^T T^{-T}$ が Vandermonde 行列と対角行列との積の構造をもつようにすることを考える。ある η_i ($i=1, \dots, n$) に対して

$$Y_{i1}(\lambda_i) = \eta_i (\neq 0), \quad Y_{ij}(\lambda_i) = \lambda_i^{\xi_j-1} \eta_i, \quad j=2, \dots, m$$

を満足する k_{ij} ($j=1, \dots, m$) を求めれば

$$\Theta(\lambda_i) = \eta_i [1 \quad \lambda_i \quad \dots \quad \lambda_i^{\xi_1-1} \quad \dots \quad \lambda_i^{\xi_m-1} \quad \dots \quad \lambda_i^{n-1}]^T T^T$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} \Theta(\lambda_1) \\ \vdots \\ \Theta(\lambda_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \eta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ & & \ddots & \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} T^T$$

となるので (10) 式が満足される。

4.2.2 m 重複極を配置する場合

いま

$$Y_{ij}(\lambda_i) \begin{cases} \neq 0 (\ell=1, \dots, \xi_j) \\ = 0 (\ell > \xi_j) \end{cases}, \quad j=1, \dots, m, \quad i=1, \dots, n$$

を満足する k_{ij} ($j=1, \dots, m, i=1, \dots, n$) を求めれば、行列 $[\Theta(\lambda_1)^T \quad \dots \quad \Theta(\lambda_n)^T]^T T^{-T}$ は、 ν_j ($j=1, \dots, m$) 次ブロック対角部分が Vandermonde 行列と対角行列との積の構造をもつブロック上三角行列となる。各ブロック対角ごとに共通の極 (m 重複極まで) が配置されることを許すものとすれば、 m 重複極の配置に対しても (10) 式が満足される。

4.3 パラメータ行列の構造とクラス

(12) 式および (14) 式より、自由パラメータ k_i ($i=1, \dots, n$) は

$$k_i = \frac{\bar{b}^{-1} g(\lambda_i) [Y_{i1}(\lambda_i) \quad \dots \quad Y_{im}(\lambda_i)]^T}{\det(\lambda_i I_n - A)} \quad (16)$$

なる構造をもつ (証明は付録 E を参照されたい.)。

以上より、問題 1 の解はつぎのように記述される。

[解] 行列 $\bar{N}$ が正則となるようなパラメータ行列 Π_k のクラスは、行列 $[\Theta(\lambda_1)^T \quad \dots \quad \Theta(\lambda_n)^T]^T$ を正則にするもつとで (16) 式により与えることができる。□

この結果より、自由パラメータを選定する際の制約が、行列 $[\Theta(\lambda_1)^T \quad \dots \quad \Theta(\lambda_n)^T]^T$ の正則性により記述されることが明らかとなった。この行列の構造は (15) 式からわかっており、希望する閉ループ極を要素にもつ Vandermonde 行列に類似しており、閉ループ極と対応づけて比較の見通しよくパラメータを決定できるものと考ええる。そこで、次章以降では 3 次の制御対象に対して、自由パラメータを解析的および数値的に求める。その際、行列 $\bar{N}$ を正則にしない自由パラメータが比較的容易に求められることが明らかにされる。

5. 3 次系への適用

状態変数の数 $n=3$ 、制御入力数 $m=2$ 、そして可制御指数 $\nu_1=2, \nu_2=1$ の場合における制御対象の係数行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix}, \quad B = [b_1 \quad b_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を考える。行列 $[\Theta(\lambda_1)^T \quad \Theta(\lambda_2)^T \quad \Theta(\lambda_3)^T]^T$ は (15) 式より

$$\begin{bmatrix} \Theta(\lambda_1) \\ \Theta(\lambda_2) \\ \Theta(\lambda_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}(\lambda_1) & \lambda_1 Y_{11}(\lambda_1) & Y_{12}(\lambda_1) \\ Y_{21}(\lambda_2) & \lambda_2 Y_{21}(\lambda_2) & Y_{22}(\lambda_2) \\ Y_{31}(\lambda_3) & \lambda_3 Y_{31}(\lambda_3) & Y_{32}(\lambda_3) \end{bmatrix}$$

である。仮定より、少なくとも

$$Y_{i1}(\lambda_i) \neq Y_{k1}(\lambda_k), \quad i \neq k$$

なので第 1 列目と第 2 列目は独立であり

$$(\alpha + \beta \lambda_i) Y_{i1}(\lambda_i) = Y_{i2}(\lambda_i), \quad i=1, 2, 3 \quad (17)$$

を満たす少なくとも一方が零でない α, β が存在すると、この行列は正則にはならない。本章では、(14) 式より自由パラメータを含む $Y_{ij}(\lambda_i)$ ($j=1, 2, i=1, 2, 3$) の構造を具体的に求めて、この行列を正則にしない自由パラメータについて考察する。

いま、 $b_{12}^i := k_{i1} + k_{i2} b_{12}$ ($i=1, 2, 3$) とすると、(14) 式より $Y_{ij}(\lambda_i)$ ($j=1, 2, i=1, 2, 3$) は

$$Y_{i1}(\lambda_i) = b_{12}^i g_{22}(\lambda_i) - k_{i2} g_{12}(\lambda_i)$$

$$Y_{i2}(\lambda_i) = k_{i2} g_{11}(\lambda_i) - b_{12}^i g_{21}(\lambda_i)$$

である。ただし

$$g_{11}(\lambda_i) = \lambda_i^2 + a_{12} \lambda_i + a_{11}, \quad g_{12}(\lambda_i) = a_{13},$$

$$g_{21}(\lambda_i) = a_{22} \lambda_i + a_{21}, \quad g_{22}(\lambda_i) = \lambda_i + a_{23}$$

である。このとき

$$(\alpha + \beta \lambda_i) Y_{i1}(\lambda_i) - Y_{i2}(\lambda_i) = b_{12}^i \{(\alpha + \beta \lambda_i)(\lambda_i + a_{23})$$

$$+ a_{22}\lambda_i + a_{21}\} - k_{i2} \{ \lambda_i^2 + (a_{12} + a_{13}\beta) \lambda_i + a_{11} + \alpha a_{13} \}$$

であるが

$$\bullet (\alpha + \beta \lambda_i) (\lambda_i + a_{23}) + a_{22}\lambda_i + a_{21} = 0 \quad (\exists i) \text{ の場合}$$

$$\begin{aligned} & \{ \lambda_i^2 + (a_{12} + a_{13}\beta) \lambda_i + a_{11} + \alpha a_{13} \} (\lambda_i + a_{23}) \\ & = \det(\lambda_i I_3 - A) \neq 0 \end{aligned}$$

なので, $\lambda_i \neq -a_{23}$ かつ $\lambda_i^2 + a_{12}\lambda_i + a_{11} + a_{13}(\alpha + \beta\lambda_i) \neq 0$ より $k_{i2} = 0$ と設定するかぎり $(\alpha + \beta\lambda_i)Y_{i1}(\lambda_i) - Y_{i2}(\lambda_i) = 0$ である. よって, 任意の k_{i1} および $k_{i2} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) にて, 行列 $[\Theta(\lambda_1)^T \quad \Theta(\lambda_2)^T \quad \Theta(\lambda_3)^T]^T$ (すなわち行列 $\bar{N}$) は正則ではない.

$$\bullet (\alpha + \beta \lambda_i) (\lambda_i + a_{23}) + a_{22}\lambda_i + a_{21} \neq 0 \quad (\forall i) \text{ の場合}$$

$$b_{i2} = \frac{\lambda_i^2 + a_{12}\lambda_i + a_{11} + a_{13}(\alpha + \beta\lambda_i)}{(\alpha + \beta\lambda_i)(\lambda_i + a_{23}) + a_{22}\lambda_i + a_{21}} k_{i2}, \quad i = 1, 2, 3$$

とする b_{i2} ($i = 1, 2, 3$) が選定されれば, (17) 式を満たす α, β が存在する. しかし, k_{ij} ($j = 1, 2, i = 1, 2, 3$) のうち三つは値が拘束されてしまうので, ここでは $\lambda_1 \neq \lambda_2$ を仮定し, b_{i2} ($i = 1, 2$) を $Y_{i1}(\lambda_i) \neq 0$ ($i = 1, 2$) が満足されるもとで適当に与えたとき, 行列 $[\Theta(\lambda_1)^T \quad \Theta(\lambda_2)^T \quad \Theta(\lambda_3)^T]^T$ が正則にならないような b_{i2}^3 を求めてみよう. いま, $X_i := Y_{i2}(\lambda_i)Y_{i1}(\lambda_i)^{-1}$ ($i = 1, 2, 3$) とすると, $i = 1, 2$ での (17) 式より

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

から

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

である. ゆえに, この α, β を用いて (17) 式より

$$X_3 = [1 \quad \lambda_3] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)X_1 + (\lambda_3 - \lambda_1)X_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

であるので, 行列 $[\Theta(\lambda_1)^T \quad \Theta(\lambda_2)^T \quad \Theta(\lambda_3)^T]^T$ が正則にならないような b_{i2}^3 は, この X_3 の値を用いて

$$b_{i2}^3 = \frac{\lambda_3^2 + a_{12}\lambda_3 + a_{11} + a_{13}X_3}{X_3(\lambda_3 + a_{23}) + a_{22}\lambda_3 + a_{21}} k_{32} \quad (18)$$

により得られる. k_{32} を適当に与えれば, この行列を正則にしない b_{i2}^3 は唯一なので, 逆にいえばこれ以外の b_{i2}^3 を指定することにより行列 $\bar{N}$ の正則性が保証されることとなる. このことは, (15) 式のような行列の構造が明らかになったために容易に得られた事実であるといえる.

したがって, 行列 $\bar{N}$ を正則にする自由パラメータは

$$(1) \quad k_1, k_2 \text{ は}$$

$$Y_{i1}(\lambda_i) = (k_{i1} + k_{i2}b_{i2}) (\lambda_i + a_{23}) - k_{i2}a_{13} \neq 0, \quad i = 1, 2$$

が満足されるもとで自由に与えることができる.

$$(2) \quad k_3 \text{ は}$$

$$k_3 = \begin{bmatrix} b_{12}^3 + \gamma \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_{12} \\ 1 \end{bmatrix} k_{32}$$

において, γ は 0 以外のもので自由に与えることができる. ただし, b_{12}^3 は (18) 式により与えられるものである. 次章では, 数値例にて上記のクラスを確認するとともに, この結果を用いて極零点配置問題を解く.

6. 極零点配置問題への応用

5章の制御対象の係数行列 A, B の要素の値を

$$a_{11} = 2, a_{12} = a_{23} = 3, a_{13} = a_{21} = 1, a_{22} = b_{12} = 0$$

とする. このとき, 可制御指数 $\nu_1 = 2, \nu_2 = 1$ であり, また

$$\lambda(A) = \{ -6.753 \times 10^{-1}, -2.6624 \pm j5.623 \times 10^{-1} \}$$

である. この制御対象に対して, 極および零点を配置するフィードバックゲイン行列を設計する.

6.1 パラメータ行列のクラス

希望の閉ループ極 λ_i ($i = 1, 2, 3$) を

$$\lambda_1 = -10, \lambda_2 = -20, \lambda_3 = -30$$

とすると, 5章の結果より, パラメータ行列 Π_k のクラスは

$$Y_{11}(\lambda_1) = -7k_{11} - k_{12} \neq 0, Y_{21}(\lambda_2) = -17k_{21} - k_{22} \neq 0$$

が満足されるもとで k_1, k_2 は任意に与えることができ, k_3 は

$$k_3 = \begin{bmatrix} b_{12}^3 + \gamma \\ k_{32} \end{bmatrix}$$

において $\gamma \neq 0$ が満足されるもとで任意に与えることができる.

さて, 行列 $\bar{N}$ の正則性を確かめるため, たとえば

$$k_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, k_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}, k_{32} = 3$$

とすると, k_3 は

$$k_3 = \begin{bmatrix} 1.062 \times 10 + \gamma \\ 3 \end{bmatrix}$$

となる. $\gamma = 0$ のとき $\text{rank} [\Theta(\lambda_1)^T \quad \Theta(\lambda_2)^T \quad \Theta(\lambda_3)^T]^T = 2$ となっており, また $\text{rank} \bar{N} = 2$ でもある. それゆえ

$$\Pi_k = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1.062 \times 10 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

は, 提案するフィードバックゲイン行列の構造では極配置が可能とならないパラメータ行列の一つであることが確認される. また, たとえば $\gamma = 1$ とすれば, パラメータ行列は

$$\Pi_k = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1.162 \times 10 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

であり, このとき $\text{rank} [\Theta(\lambda_1)^T \quad \Theta(\lambda_2)^T \quad \Theta(\lambda_3)^T]^T = 3$ および $\text{rank} \bar{N} = 3$ であるので, 極配置が可能となる.

6.2 零点を配置するためのパラメータ行列の設計

本節では, 6.1 節のパラメータ行列のクラスに基づき, 零

点を配置するためのパラメータ行列を設計する。状態フィードバック制御則

$$u(t) = -Kx(t) + \Pi_k r(t), \quad K = \Pi_k \bar{N}^{-1}$$

を (1) 式に施した後の状態方程式は (3) 式より

$$\dot{x}(t) = (A - B\Pi_k \bar{N}^{-1})x(t) + B\Pi_k r(t)$$

である。ただし、 $x(t)$ は 3 次元状態変数、 $r(t)$ は 3 次元の新しい制御入力である。いま、出力方程式を

$$y(t) = Cx(t), \quad C = [8 \quad 2 \quad 6]$$

としよう。ただし、 $y(t)$ は 1 次元の制御量である。このとき、システム行列 $S(s)$ は

$$S(s) = \begin{bmatrix} A - B\Pi_k \bar{N}^{-1} - sI_3 & B\Pi_k \\ C & O_{1 \times 3} \end{bmatrix}$$

である。行列 $\bar{N}^{-1}$ は正則であるように設計される（詳細は 6.3 節で議論される）ものとする。問題は配置したい零点を z_d として

$$\text{rank}S(z_d) = \text{rank} \begin{bmatrix} A - z_d I_3 & B\Pi_k \\ C & O_{1 \times 3} \end{bmatrix} < 4$$

となるような Π_k を求めることとなる。ところで、行列 Π_k が行フルランクであれば

$$\text{rank}S(z_d) = \text{rank} \begin{bmatrix} A - z_d I_3 & B \\ C & O_{1 \times 2} \end{bmatrix}$$

となってしまうので、よく知られている「状態フィードバックでは零点配置は不可能」といった結果が表れる。そこで、少なくとも Π_k の階数が 1 となるような設定を行なわないかぎり零点配置は可能とならないので

$$\Pi_k = [k_q \quad k_q \quad k_q], \quad k_q = [k_{q1} \quad k_{q2}]^T, \quad k_{q1} = qk_{q2}$$

として

$$\text{rank}S(z_d) = \text{rank} \begin{bmatrix} A - z_d I_3 & Bk_q \\ C & 0 \end{bmatrix} < 4$$

となるような k_q を求める問題を考える。

いま

$$\begin{aligned} \text{Cad}j(sI_3 - A)Bk_q &= (2k_{q1} + 6k_{q2})s^2 \\ &+ (14k_{q1} + 16k_{q2})s + 18k_{q1} + 4k_{q2} \end{aligned}$$

となるので、自由パラメータにより一つの零点のみ任意に配置可能である。希望の零点を $z_d = -25$ とし、他の零点を z_o とすると

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 14 & 16 \\ 18 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{q1} \\ k_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -(z_d + z_o) \\ z_d z_o \end{bmatrix} w, \quad \forall w \neq 0$$

を満足する k_{q1}, k_{q2}, z_o は

$$k_{q1} = 2.795w, \quad k_{q2} = -7.650 \times 10^{-1}w, \quad z_o = -1.89$$

として得られる。このとき $\text{rank}S(z_d) = 3$, $\text{rank}S(z_o) = 3$ であるので、希望の零点 z_d および他の零点 z_o が配置されている。

6.3 極および零点を配置するためのフィードバックゲイン行列の設計

さて、得られた自由パラメータが、6.1 節にて議論したクラスに属するかを確認する。

$$w \neq (-1.9565 \times 10)^{-1}, (-5.0575 \times 10)^{-1}$$

とすれば

$$Y_{11}(\lambda_1) \neq 0, \quad Y_{21}(\lambda_2) \neq 0$$

を満たすので、ここでは $w = 1$ とする。このとき、 $b_{12}^3 = -3.706k_{32}$ として求められるので、 $k_3 = [-3.706 \quad 1]^T k_{32}$ とはならない k_3 であれば行列 $\bar{N}$ は正則となる。いま、 $k_{q1}k_{q2}^{-1} = -3.654 (\neq -3.706)$ であるので、行列 $\bar{N}$ は正則となる。それゆえ、パラメータ行列

$$\Pi_k = \begin{bmatrix} 2.795 & 0 \\ 0 & -7.650 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

は 6.1 節にて議論したクラスに属するので、フィードバックゲイン行列は

$$\begin{aligned} K &= \Pi_k \bar{N}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1.038 \times 10^3 & -4.054 \times 10^2 & -1.678 \times 10^3 \\ -2.841 \times 10^2 & 1.109 \times 10^2 & 4.594 \times 10^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

として得られる。このとき、伝達関数行列

$$G(s) = C(sI_3 - A + BK)^{-1}B\Pi_k$$

の各列成分の零点はともに

$$z_d = -25, \quad z_o = -1.89$$

であり、閉ループ極は

$$\lambda(A - BK) = \{-10, -20, -30\}$$

であり、希望の極および零点が配置されていることが確認される。

7. おわりに

本稿では、多入力系の極配置を行なうためのフィードバックゲイン行列を設計する方法を提案した。従来法とは異なる問題の定式化を行なうことで、フィードバックゲイン行列の存在性を保証する自由パラメータのクラスが、設計に関して比較的に見通しの良い形で得られたことが本稿の特徴であり、理論的に興味深いばかりでなく、自由度を極配置以外の設計目的で用いる応用上の視点からも有用であると考えられる。このことを検証するために、提案する方法を極零点配置問題に適用した。その結果、得られた自由パラメータのクラスを利用することで、極配置を可能としかつ零点も配置するためのパラメータ行列が容易に設計されることを示した。

参 考 文 献

- 1) T. Fujii: A New Approach to the LQ Design from the Viewpoint of the Inverse Regulator Problem, IEEE Transactions on Automatic Control, **32**-11, 995/1004 (1987)
- 2) 疋田, 小山, 三浦: 極配置問題におけるフィードバックゲインの自由度と低ゲインの導出, 計測自動制御学会論文集, **11**-5, 556/560 (1975)
- 3) 木村英紀: 多変数系と極配置, システムと制御, **27**-5, 313/319 (1983)
- 4) 藤原良一: 状態フィードバックによる極配置法の電力系統への応用-弱干渉系における共振現象の安定化, システムと制御, **27**-5, 320/327 (1983)
- 5) 疋田弘光: 過渡応答特性を考慮した多変数線形追従システムの設計, 計測自動制御学会論文集, **13**-3, 243/248 (1977)
- 6) B.C. Moore: On the Flexibility Offered by State Feedback in Multivariable Systems Beyond Closed Loop Eigenvalue Assignment, IEEE Transactions on Automatic Control, **21**-10, 689/692 (1976)
- 7) H. Kimura: Pole Assignment by Gain Output Feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, **20**-4, 509/516 (1975)
- 8) M.M. Hassan and M.H. Aman: Recursive Eigenstructure Assignment in Linear Systems, International Journal of Control, **45**-1, 293/310 (1987)
- 9) M.M. Fahmy and J. O'Reilly: Parametric Eigenstructure Assignment by Output-Feedback Control: The Case of Multiple Eigenvalues, International Journal of Control, **48**-4, 1519/1535 (1988)
- 10) B. Labibi, B. Lohmann, A.K. Sedigh and P.J. Maralani: Robust Decentralized Stabilization of Large-Scale Systems via Eigenstructure Assignment, International Journal of System Science, **34**-6, 389/393 (2003)
- 11) M.A. Zohdy, K. Gu, H.S. Tantawy and M.S. Fadali: Robust Eigenstructure Assignment for Multi-Input Systems, International Journal of Control, **54**-5, 1273/1280 (1991)
- 12) G.R. Duan and R.J. Patton: Eigenstructure Assignment in Descriptor Systems via Proportional Plus Derivative State Feedback, International Journal of Control, **68**-5, 1147/1162 (1997)
- 13) G.R. Duan and R.J. Patton: Robust Pole Assignment in Descriptor Systems via Proportional Plus Derivative State Feedback, International Journal of Control, **72**-13, 1193/1203 (1999)
- 14) G.P. Liu and R.J. Patton: Robust Control Design Based on Parametric Eigenvalue Assignment, International Journal of System Science, **29**-1, 65/74 (1998)
- 15) G.P. Liu and R.J. Patton: Robust Eigenstructure Assignment for Descriptor Systems, International Journal of System Science, **29**-1, 75/84 (1998)
- 16) G.P. Liu, G.R. Duan and R.J. Patton: Mixed Time- and Frequency-Domain Robust Eigenstructure Assignment, International Journal of System Science, **31**-1, 63/71 (2000)
- 17) T. Hu and J. Lam: Improvement of Parametric Stability Margin Under Pole Assignment, IEEE Transactions on Automatic Control, **44**-10, 1938/1942 (1999)
- 18) A. Benzaouia, F. Mesquine, M. Naib and A. Hmamed: Robust Pole Assignment in Complex Plane Regions for Linear Uncertain Constrained Control Systems, International Journal of System Science, **32**-1, 83/89 (2001)
- 19) A. Varga: Robust and Minimum Norm Pole Assignment with Periodic State Feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, **45**-5, 1017/1022 (2000)
- 20) P. Apkarian, H.D. Tuan and J. Bernussou: Continuous-

Time Analysis, Eigenstructure Assignment and H_2 Synthesis with Enhanced Linear Matrix Inequalities(LMI) Characterizations, IEEE Transactions on Automatic Control, **46**-12, 1941/1946 (2001)

- 21) G.R. Duan and G.P. Liu: Complete Parametric Approach for Eigenstructure Assignment in a Class of Second-Order Linear Systems, Automatica, **38**-4, 725/729 (2002)
- 22) F. Fallside and H. Seraji: Design of Multivariable Systems Using Unity-Rank Feedback, International Journal of Control, **17**-2, 351/364 (1973)
- 23) 小郷, 美多: システム制御理論入門, 93/136, 実教出版 (1994)
- 24) F. Zhang: Matrix Theory Basic Results and Techniques, 46/48, Springer (1999)
- 25) G. Basile and G. Marro: Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory, 126/129, Prentice-Hall (1992)

《 付 録 》

A. (6) 式および (7) 式の導出

文献 23) より, Faddeev の公式は

$$\begin{aligned} \text{adj}(\lambda_i I_n - A) &= \lambda_i^{n-1} I_n + (A + \alpha_1 I_n) \lambda_i^{n-2} \\ &\quad + (A^2 + \alpha_1 A + \alpha_2 I_n) \lambda_i^{n-3} \\ &\quad + \cdots + A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-2} A + \alpha_{n-1} I_n \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} d(\lambda_i) (A - \lambda_i I_n)^{-1} b_j &= \text{adj}(\lambda_i I_n - A) b_j \\ &= [b_j \quad Ab_j \quad \cdots A^{n-1} b_j] \begin{bmatrix} \phi_{n-1}(\lambda_i) \\ \phi_{n-2}(\lambda_i) \\ \vdots \\ \phi_1(\lambda_i) \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [\bar{U}_{cj} \quad U_{cj}^c] \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{cj}(\lambda_i) \\ \Phi_{cj}^c(\lambda_i) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

より (6) 式が得られる。また

$$\begin{aligned} d(\lambda_i) N_i k_i &= d(\lambda_i) (A - \lambda_i I_n)^{-1} B k_i \\ &= \sum_{j=1}^m \text{adj}(\lambda_i I_n - A) b_j k_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^m [\bar{U}_{cj} \quad U_{cj}^c] \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{cj}(\lambda_i) \\ \Phi_{cj}^c(\lambda_i) \end{bmatrix} k_{ij} \\ &= [\bar{U}_{c1} \quad \cdots \quad \bar{U}_{cm}] \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{c1}(\lambda_i) k_{i1} \\ \vdots \\ \bar{\Phi}_{cm}(\lambda_i) k_{im} \end{bmatrix} \\ &\quad + [U_{c1}^c \quad \cdots \quad U_{cm}^c] \begin{bmatrix} \Phi_{c1}^c(\lambda_i) k_{i1} \\ \vdots \\ \Phi_{cm}^c(\lambda_i) k_{im} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるので

$$\bar{N}D = [d(\lambda_1) N_1 k_1 \quad \cdots \quad d(\lambda_n) N_n k_n]$$

$$\begin{aligned}
&= [\bar{U}_{c1} \cdots \bar{U}_{cm}] \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{c1}(\lambda_1)k_{11} & \cdots & \bar{\Phi}_{c1}(\lambda_n)k_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{\Phi}_{cm}(\lambda_1)k_{1m} & \cdots & \bar{\Phi}_{cm}(\lambda_n)k_{nm} \end{bmatrix} \\
&+ [U_{c1}^c \cdots U_{cm}^c] \begin{bmatrix} \Phi_{c1}^c(\lambda_1)k_{11} & \cdots & \Phi_{c1}^c(\lambda_n)k_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_{cm}^c(\lambda_1)k_{1m} & \cdots & \Phi_{cm}^c(\lambda_n)k_{nm} \end{bmatrix} \\
&= \bar{U}_c \bar{\Sigma} + U_c^c \Sigma^c
\end{aligned}$$

より (7) 式が得られる.

B. (10) 式の導出

行列 T_k による行変換により

$$\bar{K}^T T_k^T = \begin{bmatrix} k_1^T & & \\ & \ddots & \\ & & k_m^T \end{bmatrix}$$

である. 行列 T_k が $T_k^T = T_k, T_k^T T_k = I_{nm}$ を満足するものであることは容易に確認される. よって, (9) 式より

$$T_k (\bar{K}^T)^P = \begin{bmatrix} K^{P1T} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{PnT} \end{bmatrix}$$

が得られる. 一方

$$\begin{aligned}
&T_k [\bar{\Phi}^T \quad \Phi^{cT}] \begin{bmatrix} \bar{U}_c^T \\ U_{c1}^{cT} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{c1}(\lambda_1)^T \bar{U}_{c1}^T + \Phi_{c1}^c(\lambda_1)^T U_{c1}^{cT} \\ \vdots \\ \bar{\Phi}_{cm}(\lambda_1)^T \bar{U}_{cm}^T + \Phi_{cm}^c(\lambda_1)^T U_{cm}^{cT} \\ \vdots \\ \bar{\Phi}_{c1}(\lambda_n)^T \bar{U}_{c1}^T + \Phi_{c1}^c(\lambda_n)^T U_{c1}^{cT} \\ \vdots \\ \bar{\Phi}_{cm}(\lambda_n)^T \bar{U}_{cm}^T + \Phi_{cm}^c(\lambda_n)^T U_{cm}^{cT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_c(\lambda_1) \\ \vdots \\ \theta_c(\lambda_n) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

が得られる. それゆえ, (8) 式との等価性から (10) 式が得られる.

C. 可制御標準形の構造²³⁾

行列 A_c, B_c の構造は

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{c11} & \cdots & A_{c1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{cm1} & \cdots & A_{cmm} \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} B_{c1} \\ \vdots \\ B_{cm} \end{bmatrix}$$

である. ただし

$$\begin{aligned}
A_{cjj} &:= \begin{bmatrix} O_{(\nu_j-1) \times 1} & & I_{\nu_j-1} \\ -a_{j,\xi_{j-1}+1} & -a_{j,\xi_{j-1}+2} & \cdots & -a_{j,\xi_j} \end{bmatrix} \\
A_{cjl} &:= \begin{bmatrix} & O_{(\nu_j-1) \times \nu_l} \\ -a_{j,\xi_{l-1}+1} & \cdots & -a_{j,\xi_l} \end{bmatrix} \\
B_{cej} &:= \begin{bmatrix} & O_{(\nu_j-1) \times m} \\ O_{1 \times (j-1)} & 1 & b_{j,j+1} & \cdots & b_{jm} \end{bmatrix} \\
\xi_l &:= \sum_{q=1}^l \nu_q, \quad \xi_0 := 0, \quad j, l = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

とする.

D. 行列 $E \text{adj}(\lambda_i I_n - A) B$ の正則性

$$\begin{aligned}
&\det E \text{adj}(\lambda_i I_n - A) B \\
&= \det E T \text{adj}(\lambda_i I_n - A_c) B_c \\
&= \det \det(\lambda_i I_n - A) E T (\lambda_i I_n - A_c)^{-1} B_c \\
&= \{\det(\lambda_i I_n - A)\}^m \det E T (\lambda_i I_n - A_c)^{-1} B_c \\
&= \{\det(\lambda_i I_n - A)\}^{m-1} (-1)^n \det \begin{bmatrix} A_c - \lambda_i I_n & B_c \\ ET & O_{m \times m} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

である. ここで, $\det \bar{b} = 1$ より

$$\det \begin{bmatrix} A_c - \lambda_i I_n & B_c \\ ET & O_{m \times m} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_c - \lambda_i I_n & [\tilde{b}_1 \cdots \tilde{b}_m] \\ ET & O_{m \times m} \end{bmatrix}$$

であるが, $\tilde{b}_j (j = 1, \dots, m)$ により $A_c - \lambda_i I_n$ に対して行列式の値を変えない列変換を施した後, 適当な行の入れ換えを行なうことにより

$$\det \begin{bmatrix} A_c - \lambda_i I_n & B_c \\ ET & O_{m \times m} \end{bmatrix} = (-1)^m \det \begin{bmatrix} W_1 & & \\ & \ddots & \\ & & W_m \end{bmatrix}$$

となる. ただし

$$W_j := \begin{bmatrix} O_{(\nu_j-1) \times 1} & I_{\nu_j-1} \\ 1 & O_{1 \times (\nu_j-1)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, m$$

とする. $\det W_j$ は

$$\begin{aligned}
\det W_j &= (-1)^{\nu_j-1} \det \begin{bmatrix} I_{\nu_j-1} & O_{(\nu_j-1) \times 1} \\ O_{1 \times (\nu_j-1)} & 1 \end{bmatrix} \\
&= (-1)^{\nu_j-1}, \quad j = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
&\det \begin{bmatrix} A_c - \lambda_i I_n & B_c \\ ET & O_{m \times m} \end{bmatrix} \\
&= (-1)^m \prod_{j=1}^m (-1)^{\nu_j-1} = (-1)^n
\end{aligned}$$

となる. それゆえ, 2 章の仮定 2 から行列 $E \text{adj}(\lambda_i I_n - A) B$ は正則である.

E. (16) 式の導出

(12) 式より

$$g(\lambda_i) E \text{adj}(\lambda_i I_n - A) B = \bar{b} \det(\lambda_i I_n - A) I_m$$

であるので, (14) 式より

$$\begin{aligned}
&E \text{adj}(\lambda_i I_n - A) B k_i = g(\lambda_i)^{-1} \bar{b} \det(\lambda_i I_n - A) k_i \\
&= [Y_{i1}(\lambda_i) \cdots Y_{im}(\lambda_i)]^T
\end{aligned}$$

となる. それゆえ, 2 章の仮定 2 から (16) 式が得られる.

[著者紹介]

不破 勝彦 (正会員)

2000年名古屋工業大学大学院工学研究科博士後期課程修了。同年、名古屋工業大学電気情報工学科助手。2007年名古屋工業大学大学院つくり領域助教。制御系設計法の開発に従事。

成 清 辰 生 (正会員)

1978年名古屋大学応用物理学科卒業。83年名古屋大学大学院情報工学専攻単位取得退学。同年通産省工業技術院九州工業技術試験所入所。90年豊田工業大学助教授。98年同教授。93年理化学研究所バイオメテック・コントロール研究センターフロンティア研究員(非常勤)併任。制御工学、ロボット工学の研究と教育に従事。工学博士。

神 藤 久 (正会員)

1970年京都大学大学院電気工学専攻修士課程修了。74年名古屋工業大学共通講座教室助手。88年同大学電気情報工学科助教授。98年同大学電気情報工学科教授。デジタル制御、多次元デジタル信号処理、電力制御、大規模システム理論などに関する研究に従事。工学博士。