入力制約を有する不連続な非線形システムに対する 制御 Lyapunov 関数を用いた制御則の設計と制御検証実験

中 村 文 一*・加 藤 健 一*

中 村 奈 美*・西 谷 紘 一*

Controller Design for Discontinuous Nonlinear Systems
with Input Constraints and Its Application to a Robot Arm

Hisakazu NAKAMURA*, Kenichi KATO*,
Nami NAKAMURA* and Hirokazu NISHITANI*

Actual systems have input constraints due to the performances of actuators and the protections of control systems. For input constrained nonlinear systems, several controllers based on control Lyapunov functions are proposed. In this paper, we introduce Kidane's controller to discontinuous nonlinear systems with input constraints and prove that the asymptotic stability and the inverse optimality of controlled systems are guaranteed. We propose a combined controller which achieves both the maximum domain of attraction and the inverse optimality under the input constraint. Finally, we apply the controller to a single-link robot arm and confirm the effectiveness of the proposed method by computer simulation and experiments.

Key Words: nonlinear control, input constraint, control Lyapunov function, robot control, discontinuous system

1. はじめに

実際の制御系には、アクチュエータの性能の限界や制御対象の保護のため入力に制約が存在することが多い。入力制約を有する制御系に対して入力制約を無視した制御則を用いると、システムの性能劣化やワインドアップ現象を引き起こし、最悪の場合にはシステムの損壊の可能性すらあることが知られている。

入力制約問題は線形システムに対してこれまで盛んに研究が行なわれており、連続時間非線形システムに対しても制御 Lyapunov 関数を用いるアプローチにより研究が進められてきた^{1)~3)}。Lin ら^{1), 2)}は入力信号の 2-ノルムが 1 以下に制約されるシステムに対する制御則を示し、Malisoff ら³⁾は Lin らの制御則を k -ノルム ($1 < k \leq 2$) の場合へ拡張した。喜種ら⁴⁾はノルム制約を $k \geq 1$ まで拡張し、Lin や Malisoff らの結果を含む安定化制御則を示した。

さらに、入力制約を有する非線形システムに対して、制御 Lyapunov 関数を用いた逆最適制御則が提案されている⁵⁾。逆最適制御則は最適性とロバスト性(セクタ余裕)が得られる

が、安定化制御則⁴⁾よりも大きな制御入力を用いるため、入力制約が存在する場合には漸近安定化が保証される状態空間領域は小さくなるという問題が存在する。

一方、これまでの研究では連続な非線形性を持つ非線形システムに対して議論が行なわれてきたが、実際のメカニカルシステムでは Coulomb 摩擦のように不連続な非線形性が存在することも珍しくない。不連続なシステムに対しては、複数の制御 Lyapunov 関数を用いて安定化する手法が El-Farra ら¹³⁾により提案されているが、制御則のロバスト性や最適性が明らかにされていないなど、数多くの問題が残されている。

本論文ではまず喜種らの制御則^{4), 5)}を可測な非線形性を有するシステムに適用した場合における制御系の安定性および逆最適性を明らかにする。つぎに、逆最適制御則と制御 Lyapunov 関数の微分を最小化する制御則を接続することで、安定化可能領域全域での漸近安定性の保証と原点近傍におけるロバスト性を両立させた制御則を提案する。

さらに、Coulomb 摩擦が存在する 1 リンクのロボットアームを用いた実験により提案法の有効性を検証する。最後に、摩擦を有するメカニカルシステムに対して有効であると考えられているスライディングモード制御と提案手法を比較することにより、提案手法の有効性を明らかにする。

2. 準備

本章では、準備として論文で使用する記号の説明を行ない、

* 奈良先端科学技術大学院大学 生駒市高山町 8916-5

* Nara Institute of Science and Technology, 8916-5
Takayama-cho, Ikoma-shi
(Received November 13, 2006)
(Revised March 27, 2007)

制御 Lyapunov 関数やセクタ余裕など基本的な用語の定義を示す。本論文では、 $\mathbb{R}_{>0} := (0, \infty)$, $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$ とする。

【定義】 $y \in \mathbb{R}$ に対して、 $\delta(y)$ は次式で定義される。

$$\delta(y) := \begin{cases} 1 & (y = 0) \\ 0 & (y \neq 0) \end{cases} \quad (1)$$

□

【定義】 $y \in \mathbb{R}$ に対して、 $\text{sgn}(y)$ は次式で定義される。

$$\text{sgn}(y) := \begin{cases} -1 & (y < 0) \\ 0 & (y = 0) \\ 1 & (y > 0) \end{cases} \quad (2)$$

□

【定義】 $y \in \mathbb{R}$ に対して、 $\text{sat}(y)$ は次式で定義される。

$$\text{sat}(y) := \begin{cases} y & (|y| < 1) \\ \text{sgn}(y) & (|y| \geq 1) \end{cases} \quad (3)$$

□

【定義】 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、 k -ノルム $\|x\|_k$ は次式で定義される。

$$\|x\|_k := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^k \right)^{\frac{1}{k}} \quad (4)$$

□

【定義】 任意の $a > 0$ に対して $\{x \in X \subset \mathbb{R}^n | V(x) \leq a\}$ がコンパクトであるとき、関数 $V: X \rightarrow \mathbb{R}$ はプロパーであるという。

□

本論文では、制御対象として、以下のような入力アフィンの制御系を考える。

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (5)$$

ここで $x \in \mathbb{R}^n$ は状態変数、 $u \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ は入力である。また、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は Lebesgue 可測、 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ は連続であるとする。システム (5) に対して、(局所) 制御 Lyapunov 関数は以下のように定義される。

【定義】 ((局所) 制御 Lyapunov 関数) 原点近傍 $X \subset \mathbb{R}^n$ で定義され、すべての $x \in X \setminus \{0\}$ に対して

$$\inf_{u \in U} \{L_f V + L_g V \cdot u\} < 0 \quad (6)$$

を満たすプロパーで滑らかな正定関数 $V: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ をシステム (5) の局所制御 Lyapunov 関数という。さらに $V(x)$ が全領域 $\mathbb{R}^n$ で定義され、かつ、すべての $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して条件 (6) を満たすならば、 $V(x)$ をシステム (5) の制御 Lyapunov 関数であるという。

□

ここで、 $L_f V$, $L_g V$ はそれぞれ以下のように定義される $f(x)$, $g(x)$ に関する $V(x)$ の形式的な Lie 微分である。

$$L_f V := \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \quad (7)$$

$$L_g V := \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \quad (8)$$

入力制約がない場合 ($U \equiv \mathbb{R}^m$)、プロパーな正定関数 $V(x)$ が制御 Lyapunov 関数であるための必要十分条件は、

$$L_g V = 0 \implies L_f V < 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (9)$$

を満たすことである。

【定義】 (小入力特性) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$0 \neq \|u\| < \delta \implies \exists \|u\| < \varepsilon \text{ s.t. } L_f V + L_g V \cdot u < 0 \quad (10)$$

を満たす $\delta > 0$ が存在するとき、システム (5) の (局所) 制御 Lyapunov 関数 $V(x)$ は小入力特性 (small control property) を満たすという。

□

【定義】 (セクタ型非線形要素) 局所 Lipschitz で

$$\alpha u^T u < u^T \phi(u) < \beta u^T u, \quad u \neq 0 \quad (11)$$

$$\phi(0) = 0$$

を満たす $\phi(u) \in \mathbb{R}^m$ を $u \in \mathbb{R}^m$ に関する (α, β) のセクタ型非線形要素という。

□

本論文ではロバスト性の指標として以下のように定義されるセクタ余裕を用いる。

【定義】 (セクタ余裕) $u \in \mathbb{R}^m$ に関する (α, β) の任意のセクタ型非線形要素 $\phi(u)$ に対して、

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(u) \quad (12)$$

の原点が漸近安定になるならば、システム (5) は制御入力 u に対してセクタ余裕 (α, β) を持つという。

□

さて、本研究では微分方程式の解として以下で定義される Carathéodory の解を用いる。

【定義】 (Carathéodory の解) 微分方程式

$$\dot{x} = f(x) \quad (13)$$

を考える。ここで $x \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ であり、 I を $\mathbb{R}$ のある区間とする。関数 $\varphi(t)$ が絶対連続かつほとんどすべての $t \in I$ で $\frac{d}{dt}\varphi(t) = f(\varphi(t))$ を満たすとき、関数 $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ を区間 I におけるシステム (13) の Carathéodory の解という。

□

システム (5) に状態フィードバック則 $u = \gamma(x)$ を与えたときの閉ループ系の右辺を $\tilde{f}(x)$ とおく。

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\gamma(x) := \tilde{f}(x) \quad (14)$$

$f(x)$ が連続でないため、一般には閉ループ解が Carathéodory の解を持つとはいえないが、本研究では閉ループ系は原点を除いて Carathéodory の解が存在すると仮定する。システムがこの仮定を満たしているかどうかは、制御則を設計した後で簡単に確認することができる。本論文では、以後 Carathéodory の解のことを単に解と記述する。

(注意 1) ほとんどいたるところで Lyapunov 関数の微分が負となるようなシステム (14) に対して、解が存在しなくとも原点は正不変集合となるため (原点にとどまる以外ありえない)、安定性に関しては問題は生じないことに注意する (ただし、5.6 節で述べるように解の存在性は制御性能に深い関係がある)。

3. 準普遍制御則と逆最適制御則

実際には入力制約は単なるノルム制約ではなく、状態 x に依存して変化する入力制約であることも多い。従来研究は正規化を行なうことによりノルム 1 制約にしたものを取り扱っている。本章では、文献 4), 5) で提案されている制御則を、状態 x に依存した入力制約を陽に記述した表記に改めて紹介する。さらに、 f が可測な場合においても閉ループ系に解が存在する場合には問題が特に生じないことを明らかにする。

システム (5) に対する入力制約 U として、本論文では状態 x に依存して変化する次式のノルム制約 U_k^C を考える。

$$U_k^C := \{u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\|_k \leq C(x)\}, \quad 1 < k < \infty \quad (15)$$

ここで $x \in \mathbb{R}^n$ は状態変数ベクトル、 $u \in U_k^C \subseteq \mathbb{R}^m$ は入力ベクトル、 U_k^C は半径 $C(x)$ の Minkowski Ball であり、 $C(x) > 0$ は $\mathbb{R}^n$ で連続な関数であるとする。本論文では、文献 4), 5) と異なり、入力制約は境界を含む閉集合とすることに注意する。ここで $\tilde{u} = u/C(x)$ とおくと、 $\tilde{u}$ の入力制約は $\|\tilde{u}\|_k \leq 1$ と記述できることから、文献 4), 5) より容易に以下の結果が得られる。

《定理 1》(漸近安定化可能領域⁴⁾) 入力制約 (15) 付きシステム (5) を考える。 $V(x)$ はシステムの局所制御 Lyapunov 関数、 $a > 0$ はすべての $x \in W = \{x \mid V(x) < a\}$ に対して、

$$\min_{u \in U_k^C} \{L_f V + L_g V \cdot u\} < 0 \quad (16)$$

を満たす最大の定数とすると、 W は漸近安定化可能領域である。もし $a = \infty$ であれば $V(x)$ は制御 Lyapunov 関数であり、漸近安定化可能領域は全領域 $\mathbb{R}^n$ となる。 $\square$

《定理 2》 入力制約 (15) を持つシステム (5) を考える。 $V(x)$ をシステムの局所制御 Lyapunov 関数とすると、

$$u_{1,i} = \begin{cases} -C(x) \frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}}}{\|L_g V\|^{\frac{1}{k-1}}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V) & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (17)$$

を用いて入力 $u = u_1(x)$ はほとんどいたるところで微分 $\dot{V}(x, u)$ を最小化する。 $\square$

入力 (17) を使用したとき、 $\dot{V}(x, u)$ は最小値

$$\min_{u \in U_k^C} \dot{V}(x, u) = L_f V - C(x) \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}} \quad (18)$$

をとる。このことから、 $L_g V \neq 0$ のとき関数 $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$P(x) = \frac{L_f V}{C(x) \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}} \quad (19)$$

と定義すると、漸近安定化可能領域 W 内における P の性質を示す以下の補題が成立する。

[補題 1] 入力制約 (15) 付きシステム (5) を考える。 $V(x)$ はシステムの局所制御 Lyapunov 関数、 W は定理 1 の漸近安定化可能領域、 $P(x)$ は (19) 式で定義される関数とすると、

$$P(x) < 1, \quad \forall x \in \{x \in W \mid L_g V(x) \neq 0\} \quad (20)$$

が成立する。 $\square$

[補題 2] 入力制約 (15) 付きシステム (5) を考える。 $V(x)$ はシステムの局所制御 Lyapunov 関数、 $a_r \in (0, a)$ はすべての $x \in W_r = \{x \mid V(x) < a_r\}$ に対して、

$$\min_{u \in U_k^C} \left\{ L_f V + \frac{k-1}{k} L_g V \cdot u \right\} < 0 \quad (21)$$

を満たす最大の定数とすると、 W_r は漸近安定化可能領域である。また、 $P(x)$ は (19) 式で定義される関数とすると、

$$P(x) < \frac{k-1}{k}, \quad \forall x \in \{x \in W_r \mid L_g V(x) \neq 0\} \quad (22)$$

が成立する。 $\square$

ここで $k > 1$ より、明らかに $W_r \subset W$ であり、入力制約 (15) に対して以下の定理を得ることができる。

《定理 3》 入力制約 (15) 付きシステム (5) を考える。 $V(x)$ はシステムの局所制御 Lyapunov 関数、 W_r は補題 2 の漸近安定化可能領域、 $P(x)$ は (19) 式で定義される関数、 G は任意の正数とする。

ここで、

$$u_{2,i} = -C(x) b_2(x) |L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (23)$$

$$b_2(x) = \begin{cases} \frac{\frac{k}{k-1}(P + |P|) + G \|L_g V\|^{\frac{1}{k-1}}}{(2 + G \|L_g V\|^{\frac{1}{k-1}}) \|L_g V\|^{\frac{1}{k-1}}} & (L_g V \neq 0) \\ \frac{G}{2} & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (24)$$

により定義される関数 u_2 を用いると、入力 $u = u_2$ は領域 W_r で原点を漸近安定化する。また、初期値 $x(0) = 0$ に対し、閉ループシステムの解 $x(t) = 0$ が存在するとき、評価関数

$$J = \int_0^\infty \left\{ l(x) + \frac{\|u\|_k^k}{k b_2(x)^{k-1} C(x)^{k-1}} \right\} dt \quad (25)$$

$$l(x) = \frac{(k-1)b_2(x)}{k} \|L_g V\|^{\frac{k}{k-1}} - L_f V$$

を最小化する。またこの制御則はセクタ余裕 $((k-1)/k, \infty)$ を持つ。 $\square$

本論文では制御則を設計した後の閉ループ系の解の存在性を仮定しているため、ほとんどいたるところで解の時間微分は存在する。これより、文献 9) で紹介されている手法を用いれば喜種らの証明^{4), 5)}が適用できるため、本論文では証明は割愛する。

4. 制御則の接続

前章の結果により, 入力制約 (15) を持つシステムの漸近安定性は領域 W 内で保証でき, 最適性およびセクタ余裕によるロバスト性は領域 $W_r \subset W$ 内で保証できる. このように, 最適性, およびセクタ余裕は W の部分集合 W_r 内でしか保証できない. 本論文では, 文献 4), 5) と異なり, 入力制約は境界を含む. 本章ではこの境界を利用して原点近傍でセクタ余裕によるロバスト性を持ち, 漸近安定化可能領域を最大限に確保する制御則を提案する.

領域 W_r で制御則 (23) を用い, W から W_r を除いた領域 $W \setminus W_r$ で制御則 (17) を用いるように 2 つの制御則を接続する.

$$u_i(x) = \begin{cases} u_1 & (\frac{k-1}{k} \leq P(x) < 1) \\ u_2 & (P(x) < \frac{k-1}{k}) \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (26)$$

このとき, 以下の定理が得られる.

《定理 4》 入力制約 (15) 付きシステム (5) を考える. $V(x)$ はシステムの局所制御 Lyapunov 関数とする. このとき, 制御則 (26) はシステム (5) を領域 W 内で漸近安定化し, 領域 W_r 内でセクタ余裕 $((k-1)/k, \infty)$ を持つ.

さらに, f は連続かつ V は小入力特性を持つとき, 制御則 (26) は連続かつシステム (5) を領域 W 内で漸近安定化し, 領域 W_r 内で (25) 式の評価関数を最小化する. $\square$

証明は容易であるため割愛するが, 入力制約の境界まで利用することで, セクタ余裕によるロバスト性を原点近傍で持ちつつ, 漸近安定化可能領域を最大限に確保する制御則を設計することができる.

制御則は設計できたので, 制御則 (26) をシステム (5) に代入した閉ループシステムに対して解が存在するかどうかを確認すれば, 制御則が有効に作用するかどうかは容易に判断できる.

(注意 2) 入力制約の境界の有無は漸近安定化可能領域に影響しないことに注意する.

5. 検証実験

本章では 1 リンクマニピュレータの位置決め制御について, 4 章で提案した制御則 (26) を用いてその有効性を検証する.

5.1 実験装置

本論文では, 三菱重工製 PA-10 (Fig. 1) の 1 リンクの角度制御問題を考える (Fig. 2). PA-10 は ARNET により PC (Windows XP, Pentium 4 3.0GHz) と接続され, サンプルングタイムは約 10[msec] である.

Fig. 2 のようにモデル化した PA-10 の運動方程式は次式で得られる.

$$J\ddot{\theta} = -D\dot{\theta} + rg \sin(\theta) - f \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) - F\delta(\dot{\theta}) \operatorname{sgn}(\tau) + \tau \quad (27)$$

Fig. 1 PA-10

Fig. 2 Model of PA-10

Table 1 Meanings of Parameters

m	質量
D	粘性係数
g	重力加速度
f	Coulomb 摩擦係数
F	静止摩擦係数
I	慣性モーメント
a	リンクとの重心距離

Table 2 Parameter Values of PA-10

$J = I + ma^2$ [kg·m ²]	$r = ma$ [kg·m]	D [N·m·sec]	F [N·m]	f [N·m]
3.2870	2.3126	18.6916	24.2500	18.8785

ここで, パラメータ D, g, f, F, m, I, a の物理的意味を Table 1 に, またそれらのパラメータ同定試験の結果を Table 2 に示す. 運動方程式は静止摩擦 F , Coulomb 摩擦 f を含む不連続システムである.

5.2 制御系

本論文では, PA-10 の 1 リンクの角度 θ を目標角度 θ_d に安定化する問題を考える. このとき, 運動方程式 (27) より状態方程式は以下のように表わされる.

$$\Sigma_p : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = h(x) + u/J \end{cases} \quad (28)$$

ここで $x_1 = \theta - \theta_d$ [rad], $x_2 = \dot{\theta}$ [rad/sec], $u = \tau$, $h(x) = (-Dx_2 + rg \sin(x_1) - f \operatorname{sgn}(x_2) - F\delta(x_2) \operatorname{sgn}(u))/J$ である. また, システム (28) に $u = 0$ を代入したシステムをシステム (28) の自励系と呼ぶ.

本論文では, PA-10 の回転数-トルク曲線を単調減少関数である以下の制約で設定した.

$$|u| \leq C(x) = 80e^{-x_2^2} \quad (29)$$

制御問題は (28) の原点を入力制約 (29) の下で漸近安定化する制御則を設計することである.

5.3 実験システムの局所制御 Lyapunov 関数

制御則 (26) は局所制御 Lyapunov 関数が存在する仮定のもとで Lie 微分 $L_f V, L_g V$ を用いて一般的な構造で表記されていた. ここでは実験システムの局所制御 Lyapunov 関数を導出することにより $L_f V, L_g V$ を求め, 制御則 (26) を状態フィードバックの形で記述する.

システム (28) に対して以下のように容易に局所制御

Table 3 Effect of parameter k

k	ロバスト性	ロバスト性保証領域
増加	減少	拡大
減少	増加	縮小

Lyapunov 関数を設計することができる.

$$V(x_1, x_2) = \left(\frac{D}{J}x_1 + x_2\right)^2 + x_2^2 \quad (30)$$

つぎに局所制御 Lyapunov 関数 (30) を用いて, Lie 微分を計算する.

$$L_f V = \frac{2(2h(x)J^2x_2 + D^2x_1x_2 + DJ(h(x)x_1 + x_2^2))}{J^2}$$

$$L_g V = \frac{2Dx_1 + 4Jx_2}{J^2} \quad (31)$$

ただし, $L_f V$ 中に含まれる $\text{sgn}(u)$ は, 本論文で取り扱う制御則は $L_g V$ と同様の方向ベクトルを持つことから

$$\text{sgn}(\tau) = \text{sgn}(L_g V) \quad (32)$$

としている. (31) を (17), (23), (26) に代入すれば, 状態 x に関する状態フィードバック制御則が得られる. 本実験は, 1 入力システムに対する実験であるため, ノルム制約の定数 k は任意に選べる (どれも等価であるため). したがって, 制御則中の G と k が設計パラメータとなる. パラメータ G については, (24) 式より速応性を調整する効果があり, またパラメータ k については **Table 3** にまとめた効果がある. ここでロバスト性保証領域とは逆最適制御則によりロバスト性および最適性が保証される領域であり, 吸引領域は定理 2 の安定化制御則により最大限に確保されていることに注意しよう. さらに, 任意の G, k に対して制御則 (26) は $x_2 = 0$ でのみ不連続となり, $x_2 = 0$ が可測な時間継続するのは $x = [0, 0]^T$ を除いて存在しない. したがって, $x = [0, 0]^T$ を除いて解は存在するため, 制御則は有効であることが確認できる.

(注意 3) $x(0) = [0, 0]^T$ に対して $x(t) = [0, 0]^T$ が解となるための必要十分条件は, 目標値 θ_d がシステム (28) の自励系の平衡点であることに注意する.

5.4 実験結果

制御則 (26) の有効性を確認するため, $k = 3.0, C(x) = 80e^{-x_2^2}[\text{N} \cdot \text{m}], G = 4.0$ のもと, 初期値 $\theta(0) = -0.785[\text{rad}]$ から目標値 $\theta_d = 0[\text{rad}]$ への位置決め制御実験を実機で行ない, コンピュータシミュレーション結果と比較する. このとき, 初期値は $x(0) = [0.785, 0.000]^T$ となることに注意する.

制御則 (26) を用いて得られたシミュレーション結果を **Fig. 3**, PA-10 を用いた実験結果を **Fig. 4** に示す. シミュレーション, 実験ともに状態は目標値に収束し, 入力制約も満たされていることが確認できる. さらに, 制御開始直後である $0[\text{sec}]$ 付近では入力制約の限界を効果的に使っていることが確認できる.

5.5 スライディングモード制御との比較

Coulomb 摩擦を含む機械システムに対して高速位置決め制

Fig. 3 Simulation results (proposed method)

Fig. 4 Experimental results (proposed method)

御を行なうために, スライディングモード制御⁶⁾が有効であることが知られている. (28) を漸近安定化するためのシンプルなスライディングモード制御則は次式で得られる⁶⁾.

Fig. 5 Simulation results (sliding mode control)

Fig. 6 Experimental results (sliding mode control)

$$\begin{aligned}
 u &= -(\varrho(x) + \beta_0) \operatorname{sgn}(s) \\
 s &= ax_1 + x_2, \quad \beta_0 = 11 \\
 \varrho(x) &:= |(ax_2 + h(x))J|, \quad a = 8
 \end{aligned} \quad (33)$$

前節と同様に初期値 $\theta(0) = -0.785$, 目標値 $\theta_d = 0$ として設定し, スライディングモード制御則を用いて得られたシミュ

レーション結果を Fig. 5, 実験結果を Fig. 6 に示す. 制御則中のパラメータ $a = 8$ としたのは, シミュレーションにおける状態の収束時間が提案手法とおおよそ同じになるように設計した結果である. また, β_0 の値は過大とも思えるが, 良好な実験結果を得るためにチューニングを繰り返した結果であり, モデル化誤差が大きかったためではないかと考えられる.

まず, シミュレーション結果から比較を行なう. Fig. 5 はスライディングモード制御則を用いた場合のシステムの状態を表わしている. x_1, x_2 は滑らかに目標値へ収束しているが, 入力 u は 0 を中心に $\pm$ にチャタリングを発生していることがわかる. これは制御則 (33) 中の $\varrho(x) + \beta_0$ が sgn 関数により原点付近でも絶えず印加されていることに起因している. 一方, 制御則 (26) によるシミュレーション結果は先に示した Fig. 3 であるが, 入力について途中で 0 から $+$ 方向にチャタリングを起こしているものの, 状態が安定するにつれチャタリングは発生しなくなっている.

つぎに, 実機を用いた実験結果の比較を行なう. 状態変化について Fig. 4 と Fig. 6 を比較すると, 制御則 (26) を用いた際の状態 x_1, x_2 はスライディングモード制御則に比べ滑らかな挙動を示している. スライディングモード制御則においては sgn 関数を飽和関数 sat に改変した場合についても実験を行なったが, 定常偏差を残す結果となった.

入力変化について Fig. 4 と Fig. 6 を比較すると, シミュレーション結果と同様に提案手法は $+$ 方向のみのスライディングモード制御のほぼ半分のチャタリングの振幅となっている. これは, スライディングモード制御が常にスライディング面に拘束させるように動作するのに対し, 提案手法では摩擦力が制御 Lyapunov 関数を減少させるように働く際には摩擦力を生かした制御則となっていることが最大の要因であると考えられる.

Table 4 に状態が十分収束したと考えられる $7.0 < t < 8.0$ での平均誤差と誤差分散をそれぞれ示す. これより, 制御則 (26) はスライディングモード制御則 (33) に比べ 1 桁以上小さい誤差を示しており, 簡単なパラメータチューニングで非常に高精度な制御性能が得られることがわかる. この分散の大きさの差が, スライディングモード制御はアクチュエータ動作に非常に大きな騒音を伴うのに対して提案手法ではほとんど騒音が出ないことにつながっていると考えられる.

スライディングモード制御則においては, 入力制約がうまく満たされるようにパラメータチューニングを行なった. しかし, シミュレーション結果で入力制約が満たされていることが確認できたにもかかわらず (Fig. 5), 実験実験では入力制約は守られていない (Fig. 6). また, これに対し, 制御則 (26) においてはロバスト性を調整するために $k/(k-1)$ を, 即応性を調整するために G を操作するだけで容易に Fig. 4 のような結果を得ることができた.

比較実験はあくまでシンプルなスライディングモード制御則を用いて行なっており, スライディングモード制御則とし

Table 4 Averages and variances of residuals (proposed method (*Exp1*), sliding mode control (*Exp2*))

	$E(x_1)$	$\sigma^2(x_1)$	$E(x_2)$	$\sigma^2(x_2)$
<i>Exp1</i>	-9.06×10^{-4}	5.52×10^{-9}	-1.14×10^{-4}	4.06×10^{-5}
<i>Exp2</i>	-3.66×10^{-3}	9.46×10^{-7}	2.19×10^{-2}	4.17×10^{-4}

でのチューニングはあくまでパラメータ調整にとどめている。しかし、制御則のチューニングまで行なうということはより設計が難しいということであり、本実験によりスライディングモード制御則におけるロバスト性を考慮したパラメータチューニングの難しさと、チューニングが簡単な制御則 (26) の有効性および実用性が確認できたといえる。

5.6 非平衡点における制御

これまでの実験・シミュレーションでは目標値を $\theta_d = 0[\text{rad}]$ と設定した。 $\theta_d = 0[\text{rad}]$ のとき、目標値はシステム (28) の自励系の平衡点であるが、 $\theta_d \neq 0[\text{rad}]$ のとき目標値は一般に非平衡点になる。3章の議論により、提案した制御則は目標値が非平衡点でも安定性に関しては理論上問題がない。しかし、目標値が非平衡点である場合、制御則 (26) を代入したシステム (28) は目標値において解を持たないため、制御則の最適性はいえない。Fig. 7 に目標値を $\theta_d = \pi/8[\text{rad}]$ と設定した場合における実験結果を示す。状態は良好に目標値に収束しているが、状態の収束後に入力に大きなチャタリングが発生していることが確認できる。この大きなチャタリングが原因で、目標値 $\theta_d = \pi/2[\text{rad}]$ のように大きいときには良い実験結果が得られなかった。

一方、非平衡点を目標点とするとき、重力項 $rg \sin(x_1 + \theta_d)$ ($= rg \sin(\theta)$) をフィードフォワード的に補償してから制御則を設計する方法も考えられる。この場合、制御問題は次式で定義される仮想入力 $\tilde{u} \in \mathbb{R}$ を用いてシステム (28) を漸近安定化させる問題となる。

$$\tilde{u} := u + rg \sin(x_1 + \theta_d) \quad (34)$$

ここで、 $C(x) > rg|\sin(x_1 + \theta_d)|$ の場合だけを考えれば、十分条件として入力制約 $|\tilde{u}| \leq C(x) - rg|\sin(x_1 + \theta_d)|$ が得られる。紙面の都合で詳細は省略するが、制御則 (26) と同様に $\tilde{u}$ に対する制御則を設計することができ、評価関数

$$J = \int_0^\infty \left\{ l(x) + \frac{\|\tilde{u}\|_k^k}{kb_2(x)^{k-1} \{C(x) - rg|\sin(x_1 + \theta_d)|\}^{k-1}} \right\} dt \quad (35)$$

を最小化する最適制御則となる。ところが、この制御則を用いる場合にはセクタ余裕がなくなるという問題点が発生する。

Fig. 8 に重力項をフィードフォワード的に付加した制御則を用い、目標値を $\theta_d = \pi/2[\text{rad}]$ としたときの実験結果を示す。この方法の場合、目標値 θ_d が $\pi/2[\text{rad}]$ でも良好に制御が行なえることが確認できた。重力項をフィードフォワードしても定常偏差が出ない理由は摩擦保証項に関するロバスト性が重力項に関するロバスト性も与えているためであると考えら

Fig. 7 Experimental results for $\theta_d = \pi/8[\text{rad}]$ (proposed method) **Fig. 8** Experimental results for $\theta_d = \pi/2[\text{rad}]$ (gravity feed-forward)

れる。Fig. 8 の入力において、ところどころ大きなスパイクが確認できるが、これは摩擦項に起因する制御則の不連続性によるものであり、提案手法では解消が難しいものと考えられる。

Fig. 7 および Fig. 8 より、セクタ余裕を犠牲にしても最適

性が保証できる重力項をフィードフォワード的に付加した制御則のほうが入力の変動、状態の収束性ともに良好であることがわかった。本節では簡単に実験結果のみを紹介したが、フィードフォワード項によって最適性を保証することについてはさらなる議論が必要であると考えられる。これは今後の研究課題である。

6. おわりに

本論文では、逆最適制御則と制御 Lyapunov 関数の微分を最小化する制御則の2つの制御則を接続することで、安定化可能領域全域での漸近安定性の保証と原点近傍におけるロバスト性を両立させた制御則を構成した。さらに、この制御則を1リンクのロボットアームに適用し、従来より非線形システムに対して用いられているスライディングモード制御と比較することでその有効性を検証した。

本論文により、喜種らにより提案された制御則^{4),5)}は、厳密に前提条件を満たさないようなシステムに対しても適用でき、良好な制御性能を示すことが明らかになった。また、本論文で提案した2つの制御側を接続する手法は制御則設計の容易さ、高精度な制御性能の実現性、パラメータチューニングの容易さ、モデル化誤差等に対するロバスト性などの面において実用的であることが確認できた。

非平衡点を目標値とする制御では、最適性が保証できるように重力項をフィードフォワード的に付加したもののほうが制御性能が良好であった。ただし、この場合セクタ余裕が失われているため、ロバスト性が保証できない制御則になってしまっている。重力項に対するロバスト性を保証する最適制御則の構築に関しては今後の課題である。

参考文献

- 1) Y. Lin and E.D. Sontag: A Universal Formula for Stabilization with Bounded Controls, *Systems & Control Letters*, **16**, 393/397 (1991)
- 2) Y. Lin and E.D. Sontag: Control-Lyapunov Universal Formulae for Restricted Inputs, *Control Theory and Advanced Technology*, **10**, 1981/2004 (1995)
- 3) M. Malisoff and E.D. Sontag: Universal Formulas for Feedback Stabilization with respect to Minkowski balls, *Systems & Control Letters*, **40**, 247/260 (2000)
- 4) 喜種, 中村, 山下, 西谷: 入力制約付き非線形システムに対する制御則設計, 計測自動制御学会論文集, **41**-3, 250/258 (2005)
- 5) 喜種, 中村, 山下, 西谷: 入力制約付き非線形システムに対する逆最適制御, 計測自動制御学会論文集, **42**-1, 26/34 (2006)
- 6) H.K. Khalil: Nonlinear Systems, 3rd edition, Prentice Hall (2002)
- 7) A.F. Filippov: Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides, Kluwer (1988)
- 8) R. Freeman and L. Praly: Integrator Backstepping for Bounded Controls and Control Rates, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**-2, 258/262 (1998)
- 9) E.D. Sontag: Mathematical Control Theory, Springer (1998)
- 10) F. Mazenc and A. Iggidr: Backstepping with Bounded Feedbacks, *Systems & Control Letters*, **51**, 235/245 (2004)
- 11) 美多, 大須賀: ロボット制御工学入門, コロナ社 (1989)

- 12) R.I. Leine and H. Nijmeijer: Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems, Springer (2004)
- 13) N.H. El-Farra, P. Mhaskar and P.D. Christofides: Output Feedback Control of Switched Nonlinear Systems Using Multiple Lyapunov functions, *Systems & Control Letters*, **54**, 1163/1182 (2005)

[著者紹介]

中村 文一 (正会員)

2000年東京工業大学理工学研究科修士課程修了。2003年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士課程修了。同年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科助手、現在に至る。博士(工学)。非線形制御、ロボット制御などの研究に従事。システム制御情報学会、日本ロボット学会、IEEEなどの会員。

加藤 健一 (学生会員)

2005年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士前期課程修了。現在奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士後期課程在学中。

中村 奈美 (正会員)

2006年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士課程修了。2007年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科研究員、現在に至る。非線形制御理論、非線形システム理論などの研究に従事。博士(工学)。IEEEの会員。

西谷 紘一 (正会員)

1974年京都大学大学院工学研究科博士課程単位取得退学。同年大阪大学基礎工学部助手。講師、助教授、教授を経て93年から奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科教授、現在に至る。プロセス制御、プロセスシステム工学に関する研究を行ってきた。工学博士。システム制御情報学会、化学工学会、AIChEなどの会員。