随意運動の終点誤差分散最小モデルに対する双対性からのアプローチ

白 根 一 登*・井 村 順 一*

Duality Approach to Minimum-variance End-point Error Model of Voluntary Movement

Kazuto SHIRANE* and Jun-ichi IMURA*

In this paper, a dual problem of the motor control model based on the signal-dependent noise hypothesis is addressed. First, the motor control model including signal-dependent noise is reduced to an optimal control problem whose cost function contains a time-varying weight. Then an estimation problem under the time-varying output noise model is introduced as the dual problem of the motor control model mentioned above, and it is proven that this time-varying noise can be interpreted as a signal-dependent output noise. Finally it is shown by experimental results that the model of the estimation based on the signal-dependent noise does not qualitatively contradict to the estimation performed by human beings on some situations.

Key Words: duality, voluntary movement, minimum-variance end-point error model

1. はじめに

人間が身体運動を行なう場合、たとえばある目標点を指さす、という運動を行なう場合を考える。このとき、脳から発せられた運動指令が神経系を通じて各筋肉に伝えられて一連の動作が生成され、最終的に指先が目標点の近傍へと導かれることになる。この一連の流れの中では、脳は身体(筋肉)に対する制御器と考えることができる。

指さし動作のような単純な運動の場合、人間が示す運動の軌道はその躍度、あるいはトルクの変化を最小とすることが知られている^{1)~3)}。人間がこのような特徴的な運動を示すことの理由を、Harrisらは神経の信号伝達系における信号依存ノイズの存在を仮定することで説明した⁴⁾。すなわち、神経系が伝達する運動指令信号が大きくなるほどその指令信号には大きなノイズが印加されるものと仮定すれば、このノイズの影響によって生じる運動誤差(たとえば指さし動作における指先と目標点の偏差)を最小にするような軌道は結局躍度最小(またはトルク変化最小)軌道と一致する、ということを示したのである。

一方で、人間の脳は運動制御だけではなく、感覚器を通じて得られる情報から外界の状態を推定する推定器としての機能も持っている。たとえば、移動する物体を視覚を用いて観察した場合には物体の位置に関する情報のみが得られるもの

と考えられ、したがってたとえば物体の速度はこの情報から推定しなくてはならない。脳のこのような機能に関する研究も最近では活発に行なわれており、特にWeissらはある種の錯視が最適推定の結果として説明できることを示している⁷⁾。

本論文では、制御問題と推定問題の間の双対性という制御理論においてよく知られている原理を人間のもつ運動制御に対して適用するという、新しいアプローチを提案する。すなわち、Harrisらによって提案された信号依存ノイズのもとでの最適制御問題と双対関係をもつ推定問題を定式化し、もとの制御問題がもっていた「ノイズの信号依存性」という特徴が推定問題においてどのように現れるかということを確認する。さらに、導出された双対関係から得られた特徴が、簡単な実験結果から得られた現象と矛盾しないということを確認する。

以下、まずHarrisらの提案した信号依存ノイズのもとでの終点誤差分散最小モデルについて改めて検討し、これと等価な最適制御問題を定式化する。その上でこの最適制御問題と双対関係をもつ最適推定問題を求め、制御問題における信号依存ノイズの影響は推定問題においても同様の信号依存ノイズとして現れることを示す。さらに、人間に移動物体の映像を見せてその速度を推定させる実験を行ない、その結果から実際の人間の推定メカニズムにも信号依存ノイズが存在する可能性があることを確認する。

2. 終点誤差分散最小モデル

Harrisらは、人間の脳が発生する運動指令はノイズの影響を受けるものと考え、そのノイズの分散の大きさが運動指令信号の大きさに依存すると仮定することで躍度(トルク変化)最小軌道を説明できることを明らかにした。具体的には、

* 東京工業大学大学院情報理工学研究科 目黒区大岡山 2-12-1

* Graduate School of Information Science and Engineering,
Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 O-okayama, Meguro-ku, Tokyo

(Received April 3, 2006)

(Revised May 7, 2007)

- (i) 神経伝達系を含む人間の身体のダイナミクスを1入力の離散時間型線形時不変システムによって記述し、脳からの運動指令信号をこのシステムの入力と考える。
- (ii) このシステムには入力ノイズが存在し、そのノイズの分散は入力が大きいくほど大きくなるものとする。
- (iii) 運動の目標点を設定し、終端時刻におけるシステムの状態と目標点との誤差を最小にする入力を設計する。

以上の手順によって得られる軌道が実際に人間が生成する軌道(躍度最小,あるいはトルク変化最小)とよく一致することが確かめられている。そこで本章では、この運動制御問題を改めて定式化し、その双対問題を導くための準備をする。以下、 $E[\bullet]$ は確率変数の期待値を示すものとし、 M' は行列 M の転置行列を表わすこととする。

まず、上記の(i)に従って $x_c \in \mathcal{R}^n$ を状態とし、 $u(t) \in \mathcal{R}$ を入力、 $d(t) \in \mathcal{R}$ を入力ノイズとする以下のような1入力の離散時間型線形時不変システムを考える。

$$x_c(t+1) = A_c x_c(t) + B_c(u(t) + d(t)) \quad (1)$$

ここで、 $A_c \in \mathcal{R}^{n \times n}$ 、 $B_c \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ とし、対 (A_c, B_c) は可制御であるとする。(1)式のシステムにおいて、入力 u は脳から発せられる運動指令信号を、入力ノイズ d は神経系の特性により指令信号に付加されるノイズをそれぞれ表わしており、 A_c および B_c は運動指令信号から身体(指先位置、各関節角度)までのダイナミクスを表わしている。

入力ノイズ項 $d(t)$ については、上記の(ii)に従って

$$\begin{aligned} E[d(t)] &= 0, E[d^2(t)] = \alpha u^2(t) \\ E[d(t)d(\tau)] &= 0 \quad (t \neq \tau) \end{aligned} \quad (2)$$

なる性質をもつ(ただし $\alpha > 0$ は定数)ものとする。システムの初期値は $x_c(0) = x_{c0}$ と与えられるものとする。

さらに、上記の(iii)に従って、システム(1)に対し、ある時刻 T における状態量 $x_c(T)$ と与えられた目標点 $x_d \in \mathcal{R}^n$ との誤差 $x_c(T) - x_d$ を最小にするような制御問題を考える。入力ノイズの影響により $x_c(T)$ は確率変数となるため、この制御問題は正定行列 $Q \in \mathcal{R}^{n \times n}$ と期待値作用素とを用いた以下の評価関数

$$J_c := E \left[\frac{1}{2} (x_c(T) - x_d)' Q (x_c(T) - x_d) \right] \quad (3)$$

を最小にする問題として考えることができる。以上より、(i)、(ii)、(iii)に沿って構成される制御問題は(1)式、(2)式、および(3)式を用いて

$$\min_{u(0), \dots, u(T-1)} J_c, \text{ s.t. (1), (2)} \quad (4)$$

と定式化できる。以上が終点誤差分散最小モデルの概略である。

注意 実際には、Harrisらの方法ではpost-movement period $R \in \mathcal{N}$ なる定数を考え、 $E[x(T)] = E[x(T+1)] = \dots = E[x(T+R)] = x_d$ という拘束のもとで

$J_1 := E \left[\sum_{k=T+1}^{T+R} (x(k) - x_d)' Q (x(k) - x_d) \right]$ を最小化する $u(0), \dots, u(T+R-1)$ を求める問題を考えている⁴⁾。しかし、この問題は拘束条件 $E[x(T)] = x_d$ のもとで $E[(x(T) - x_d)' \bar{Q} (x(T) - x_d)]$ を最小化する問題と等価であることが簡単に示せる(付録A)。したがって、この意味でpost-movement periodを考慮する必要はない。また、本論文では人間の運動制御に双対性の概念を適用する第一ステップとしてあくまで制御問題における信号依存ノイズがその双対問題においてどのように現れるかを追求することに焦点をしぼり、議論を簡単にするため拘束条件 $E[x(T)] = x_d$ は考慮せず、(4)式のように定式化を行なっている。

以下ではこれに対する双対問題を定式化することを目指す⁵⁾。(4)式の制御問題はその評価関数 J_c に期待値作用素を含んでいるため一般に解かれる最適制御問題とは異なる形式となっている。そのため(4)式が帰着される2次計画問題の双対問題を直接求めても、結果として得られる問題もとの問題との対応が不明瞭になってしまう。そこで、ここではまず(4)式の制御問題と等価で、かつ期待値作用素を含まない最適制御問題を定式化し、この新しい問題を2次計画問題へ帰着してから双対問題を改めて導出することで見通しよく議論を進めていくを試みる。

(1)式において、 $x_c(T)$ は

$$x_c(T) = A_c^T x_{c0} + \sum_{k=0}^{T-1} A_c^k B_c u(k) + \sum_{k=0}^{T-1} A_c^k B_c d(k) \quad (5)$$

となる。そこで x_{cT} を

$$x_{cT} := A_c^T x_{c0} + \sum_{k=0}^{T-1} A_c^k B_c u(k) \quad (6)$$

と定義して(5)式を(3)式に代入し、(2)式を用いて期待値作用素を整理すると、

$$\begin{aligned} J_c &= \frac{1}{2} (x_{cT} - x_d)' Q (x_{cT} - x_d) \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha \sum_{k=0}^{T-1} R(k) u^2(k) \end{aligned} \quad (7)$$

$$R(k) := B_c' A_c^k Q A_c^k B_c$$

となる。(6)式と(7)式より、以下の事実が導かれる。

[事実1] システム

$$x_e(t+1) = A_c x_e(t) + B_c u_e(t), x_e(0) = x_{c0} \quad (8)$$

に対し、

$$\begin{aligned} J_e &:= \frac{1}{2} (x_e(T) - x_d)' Q (x_e(T) - x_d) \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha \sum_{k=0}^{T-1} R(k) u_e^2(k) \end{aligned} \quad (9)$$

なる評価関数を最小化する以下の最適制御問題を考える。

$$\min_{u_e} J_e \text{ s.t. (8)} \quad (10)$$

このとき、(4) 式の制御問題と (10) 式の制御問題は等価である。

(証明)

$$x_e(T) = A_c^T x_{c0} + \sum_{k=0}^{T-1} A_c^k B_c u(k) = x_{cT} \quad (11)$$

となることから導かれる。■

事実 1 により、(4) 式の制御問題と等価で、かつ評価関数に期待値作用素を含まない最適制御問題が導かれた。ここで得られた (10) 式の最適制御問題の評価関数 (9) 式はいわゆる終端重みの項 $(x_e(T) - x_d)' Q (x_e(T) - x_d)$ と時変の入力重みの項 $R(k) u_e^2(k)$ から構成されている。(4) 式の制御問題の評価関数 (3) 式が終端重みのみから構成されていたことを考えれば、(2) 式の入力ノイズの特性は時変の入力重み $R(k)$ として現れたものとみることができよう。

(10) 式の最適制御問題を 2 次計画問題へ帰着するために、まず、 U , G_c , $\bar{Q}$, H_c をそれぞれつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} U &= \begin{bmatrix} u_e(0) & u_e(1) & \cdots & u_e(T-1) \end{bmatrix}' \\ G_c &= \begin{bmatrix} A_c^{T-1} B_c & A_c^{T-2} B_c & \cdots & B_c \end{bmatrix} \\ \bar{Q} &= \begin{bmatrix} Q & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q \end{bmatrix} \\ H_c &= \begin{bmatrix} A_c^{T-1} B_c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_c^{T-2} B_c & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

これらの記号を用いると、(10) 式の最適制御問題は以下の 2 次計画問題として表わすことができる。

$$\begin{aligned} \min_U \quad & \left\{ \frac{1}{2} U' (G_c' Q G_c + \alpha H_c' \bar{Q} H_c) U \right. \\ & \left. - U' G_c' Q (x_d - A_c^T x_{c0}) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

この問題の解 U^* は以下のように解析的に与えることができる。

$$U^* = (G_c' Q G_c + \alpha H_c' \bar{Q} H_c)^{-1} G_c' Q (x_d - A_c^T x_{c0}) \quad (14)$$

次章では、(13) 式の 2 次計画問題と双対関係をもつ最適化問題を考え、その問題に帰着される何らかの推定問題がどのような構造をもつかについて考察する。

3. 運動生成問題の双対問題

前章では、(4) 式の制御問題が (10) 式の最適制御問題と等価であることを導き、最終的に (13) 式の 2 次計画問題とし

て定式化できることを示した。本章では、これらの制御問題と等価な推定問題を導き、その構造について考察することを目的とする。特に、前章で考えた制御問題における特徴である信号依存ノイズ (2) 式、および時変重み (9) 式が、双対問題においてどのように現れるかという点に注目する。

まず、 $A := A'_c$, $C := B'_c$, $G := G'_c$, $H := H'_c$, $\hat{\xi}(t) \in \mathcal{R}^n$, $\hat{w}(t) \in \mathcal{R}$, $\hat{W} := [\hat{w}(T) \cdots \hat{w}(1)]'$ と定義しておく。このとき、これらの記号を用いた以下の最適化問題が、前章で考えた最適制御問題が帰着される最適化問題の双対問題となっていることに注目する。

[補題 1] J を

$$J := \frac{1}{2} \left\{ \hat{\xi}_T' Q^{-1} \hat{\xi}_T + \sum_{k=1}^T \frac{\hat{w}^2(k)}{\alpha C A^{T-k} Q A'^{T-k} C'} \right\} \quad (15)$$

と定義する。このとき、つぎの最適化問題の双対問題は、(10) 式の最適化問題と等価である。

$$\min_{\hat{\xi}_T, \hat{w}(1), \hat{w}(2), \dots, \hat{w}(T)} J \quad (16)$$

$$\text{s.t. } \hat{\xi}(t-1) = A \hat{\xi}(t) \quad (17)$$

$$C \hat{\xi}(t) + \hat{w}(t) = C A^{T-t} Q (x_d - A_c^T x_{c0}) \quad (18)$$

$$\hat{\xi}(T) = \hat{\xi}_T \quad (19)$$

(証明) J は $\hat{W}$ と H を用いて

$$J = \frac{1}{2} \left\{ \hat{\xi}_T' Q^{-1} \hat{\xi}_T + \hat{W}' (\alpha H \bar{Q} H')^{-1} \hat{W} \right\} \quad (20)$$

と表わすことができ、また (17)-(19) 式は G を用いて

$$G \hat{\xi}_T + \hat{W} = G Q (x_d - A_c^T x_{c0}) \quad (21)$$

とすることができる。よって (16)-(19) 式の最適化問題は、

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\xi}_T, \hat{W}} \quad & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_T' & \hat{W}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & (\alpha H \bar{Q} H')^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_T \\ \hat{W} \end{bmatrix} \\ \text{s.t. } \quad & \begin{bmatrix} G & I_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_T \\ \hat{W} \end{bmatrix} = G Q (x_d - A_c^T x_{c0}) \end{aligned} \quad (22)$$

と表わすことができる。ここで、(22) 式の最適化問題のラグランジュの双対問題を考えると、これはラグランジュ変数 $\lambda \in \mathcal{R}^T$ を用いて

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & - \left\{ \frac{1}{2} \lambda' (G Q G' + \alpha H \bar{Q} H') \lambda \right. \\ & \left. - \lambda' G Q (x_d - A_c^T x_{c0}) \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

となる。また、

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi}_T \\ \hat{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \alpha H \bar{Q} H' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G' \\ I_T \end{bmatrix} \lambda \quad (24)$$

である。(23) 式と (13) 式はあきらかに等価な問題であり、し

たがって (10) 式とも等価であることがわかる。■

なお, (16)-(19) 式の最適化問題は解析的に解くことができ, その解 $\hat{\xi}_T^*$ および $\hat{W}^*$ は

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_T^* &= \\ &QG'(GQG' + \alpha H\bar{Q}H')^{-1}GQ(x_d - A_c^T x_{c0}) \\ \hat{W}^* &= \\ &\alpha H\bar{Q}H'(GQG' + \alpha H\bar{Q}H')^{-1}GQ(x_d - A_c^T x_{c0})\end{aligned}\quad (25)$$

となる。

補題 1 で議論した最適化問題の拘束条件 (17)-(19) 式は, 出力を y とし, 出力ノイズ項 w をもつ逆時間で動作するつぎのようなシステム

$$\begin{aligned}\xi(t-1) &= A\xi(t) \\ y(t) &= C\xi(t) + w(t)\end{aligned}\quad (26)$$

とみることができる。ただし $\xi(T) = \xi_T$, $\xi \in \mathcal{R}^n$, $w, y \in \mathcal{R}$ である。そこで, 以下では (15) 式の評価関数に対する解釈を与えるため, まずつぎの問題を考える。

[問題 1] (26) 式のシステムにおいて, 初期値 ξ_T は確率変数であるとし, その確率密度関数は

$$P_\xi(\xi_T) = \frac{1}{2\pi|Q|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_T'Q^{-1}\xi_T\right) \quad (27)$$

と与えられるものとする。また, $w(t)$ も確率変数であるとし, その確率密度関数は

$$\begin{aligned}P_{wt}(w(t)) &= \frac{1}{2\pi\sigma_t} \exp\left(-\frac{w^2(t)}{2\sigma_t^2}\right) \\ \sigma_t &= \sqrt{CA^{T-t}QA^{T-t}C'}\end{aligned}\quad (28)$$

と与えられるものとする。このとき, 与えられた出力列 $y(T), \dots, y(1)$ に対して ξ_T の条件つき確率密度関数 $P_{\xi|Y}(\xi_T|y(T), \dots, y(1))$ を最大にする ξ_T を求めよ。

Y, W を

$$\begin{aligned}Y &:= \begin{bmatrix} y(T) & \cdots & y(1) \end{bmatrix}' \\ W &:= \begin{bmatrix} w(T) & \cdots & w(1) \end{bmatrix}'\end{aligned}\quad (29)$$

と定義すると, 問題 1 の解は以下の最適化問題の解として得られることがわかる (付録 B)。

$$\begin{aligned}\min_{\hat{\xi}_T, \hat{W}} & \frac{1}{2}\hat{\xi}_T'Q^{-1}\hat{\xi}_T + \frac{1}{2}\hat{W}'(H\bar{Q}H')^{-1}\hat{W} \\ \text{s.t. } & Y = G\hat{\xi}_T + \hat{W}\end{aligned}\quad (30)$$

最適化問題 (30) の評価関数が (15) 式と一致していることに注意すると, つぎの定理が成り立つ。

《定理 1》 問題 1 において, 出力 $y(t)$ が

$$y(t) = CA^{T-t}Q(x_d - A_c^T x_{c0}) \quad (31)$$

と与えられたとする。このとき, 最適推定問題 (30) は (16)-(19) 式の最適化問題と等価となる。

(証明) (30) 式に $Y = GQ(x_d - A_c^T x_{c0})$ を代入することで示される。■

定理 1 により, (10) 式の最適制御問題に双対関係の意味で対応する最適推定問題は, (26) 式のシステムにおいて出力が (31) 式のように与えられた場合の最適推定問題であることが確かめられた。(31) 式による出力列の仮定は, 制御問題における初期値と目標点が推定問題において出力列に対応することを示しており, ここまで述べたようにまず最適制御問題を定式化してからその双対問題となる推定問題を考える場合には, 観測される出力が (31) 式で表わされる場合のみを考えればよいことに注意されたい。

一方, まず最初に問題 1, すなわち (30) を考え, その双対問題となる最適制御問題を求めるとつぎのようになる。

《定理 2》 問題 1 において, 出力 $y(t)$ が $y(t) = y_d(t)$ と与えられたとする。このとき, 最適推定問題 (30) は (8) 式のシステムに対して $x_d - A^T x_0 = 0$ なる条件のもとで

$$\begin{aligned}\tilde{J}_e &:= \frac{1}{2}(x_e(T) - x_d)'Q(x_e(T) - x_d) \\ &+ \frac{1}{2}\alpha \sum_{k=0}^{T-1} R(k)(u_e(k) - u_d(k))^2\end{aligned}\quad (32)$$

を最小化する $u_e(0), \dots, u_e(T-1)$ を求める最適制御問題と等価となる。ただし, $u_d(k)$ は与えられた出力 $y_d(T-k)$ から

$$u_d(k) = \left(\alpha CA^{T-k-1}QA^{T-k-1}C'\right)^{-1}y_d(T-k) \quad (33)$$

と定められる。

(証明) (8) 式の状態方程式を (32) 式に代入して得られる最適化問題と, (30) 式の最適化問題の (ラグランジュの意味での) 双対問題を比較することで示せる。■

定理 2 で示された最適制御問題は, 最適制御問題 (10) 式の評価関数 J_e を $u_d(k)$ を用いて拡張したものになっており, 終端点 $x_e(T)$ を目標点 x_d に近づけるとともに入力列 $u(0), \dots, u(T-1)$ を (0 ではなく) 目標入力列 $u_d(0), \dots, u_d(T-1)$ に近づけることを考慮している。このように最適推定問題の双対問題となる最適制御問題に目標入力列が現れることは, (信号依存ノイズを考慮しない) 通常の線形システムではすでに知られている事実である⁶⁾。

問題 1 で考えた最適推定問題において, 注目すべき点は (28) 式で表わされるノイズ項 $w(t)$ の確率分布関数である。この分布関数は分散 σ_t^2 のガウス分布を表わしているが, この分散は時刻 t に依存する, すなわち $w(t)$ は時変の分散をもつノイズとなっている。(9) 式と (28) 式を比較すると, この時変の分散は (9) 式の $R(k)$ が双対問題の中に現れたものと考えられることができる。

(9) 式の $R(k)$ は, もともとの制御問題 (4) における信号依存ノイズ (2) 式の影響として現れたものであった。では, そ

の双対版である (28) 式の時変分散に対しても同様に何らかの物理的な解釈を与えることが可能であろうか. このことについて考えるために, まずつぎの事実注目する.

[事実 2] (26) 式のシステムにおいて, ξ_T を $E[\xi_T] = 0$, $E[\xi_T \xi_T'] = Q$ を満たす確率変数とし, $w(t)$ を

$$E[w(t)] = 0, E[w^2(t)|\xi(t)] = (C\xi(t))^2 \quad (34)$$

を満たす確率変数であるとする. また, $E[w(t)w(\tau)] = 0$ ($\forall \tau \neq t$), $E[\xi_T w(t)] = 0$ ($\forall t$) とする. このとき, $E[w(t)^2] = CA^{T-t}QA^{T-t}C'$ となる.

(証明)

$$\begin{aligned} E[w^2(t)] &= E[E[w^2(t)|\xi(t)]] \\ &= E[(C\xi(t))^2] = CA^{T-t}QA^{T-t}C' \end{aligned} \quad (35)$$

■

すなわち, (26) 式のシステムにおいて初期値 ξ_T の共分散行列が Q と与えられ, かつノイズ $w(t)$ の分散が (34) 式のように $C\xi(t)$ に依存するものと考えれば, 結局 $w(t)$ の分散は (28) 式で考えた時変の分散と一致するのである.

ただし, 事実 2 で考えた (34) 式のノイズは ξ_T と依存関係があり, したがって (28) 式でいた確率密度関数の仮定 (ξ_T と依存関係をもたない) を満たさないことに注意しなければならない. このため (34) 式のノイズのもとでの最適推定問題を問題 1 と同様に定式化して (30) 式の最適化問題を導くことはできない. そこで, 初期値 ξ_T とノイズ $w(t)$ の確率密度関数について仮定をおかないつぎのような問題を考える.

[問題 2] (26) 式のシステムにおいて, ξ_T を $E[\xi_T] = 0$, $E[\xi_T \xi_T'] = Q$ を満たす確率変数とし, $w(t)$ を $E[w(t)] = 0$, $E[w^2(t)] = \alpha CA^{T-t}QA^{T-t}C'$, $E[w(t)w(\tau)] = 0$ ($\forall \tau \neq t$) を満たす確率変数であるとする. また, $E[\xi_T w(t)] = 0$ ($\forall t$) とする. このとき, $\hat{\xi}_T^L := FY$ として, $E[(\hat{\xi}_T^L - \xi_T)^2]$ を最小にする $F \in \mathcal{R}^{n \times T}$ を求めよ.

問題 2 の解 F^* は,

$$FY - \xi_T = (FG - I)\xi_T + FW \quad (36)$$

なので, I を単位行列として

$$\begin{aligned} &E[(FY - \xi_T)(FY - \xi_T)'] \\ &= (FG - I)Q(FG - I)' + \alpha FHQH'F' \\ &= (F - QG'M^{-1})M(F - QG'M^{-1})' + P \quad (37) \\ &M := (GQG' + \alpha H\bar{Q}H') \\ &P := Q - QG'M^{-1}GQ \end{aligned}$$

となることから,

$$F^* = QG'(GQG' + \alpha H\bar{Q}H')^{-1} \quad (38)$$

となる. また $\hat{\xi}_T^{L*} = F^*Y$ は

$$\hat{\xi}_T^{L*} = QG'(GQG' + \alpha H\bar{Q}H')^{-1}Y \quad (39)$$

となる.

問題 2 は問題 1 と異なり, 初期値 ξ_T とノイズ $w(t)$ の確率密度関数が与えられていない. このため最適推定問題を (30) のような最適化問題へ帰着することができないが, そのかわり問題 2 では推定則を $\hat{\xi}_T^L = FY$ と線形推定に限定することで ξ_T の最適推定 $\hat{\xi}_T^L$ を求めている. このようにして得られた最適な線形推定則は初期値 ξ_T とノイズ $w(t)$ の独立性とガウス性 (すなわち本論文では (27) 式および (28) 式) を仮定した場合の最適推定問題 (問題 1) と解が一致することが知られており, これは本論文の場合ではつぎの定理として表現される.

《定理 3》 (26) 式のシステムにおいて, ξ_T を $E[\xi_T] = 0$, $E[\xi_T \xi_T'] = Q$ を満たす確率変数とし, $w(t)$ は (34) 式の仮定を満たす確率変数であるとする. また, $E[w(t)w(\tau)] = 0$ ($\forall \tau \neq t$), $E[\xi_T w(t)] = 0$ ($\forall t$) とする. このとき, 出力が $y(t) = CA^{T-t}Q(x_d - A_c^T x_{c0})$ と与えられた場合, 問題 2 の解 F^* によって導かれる ξ_T の最適な線形推定 $\hat{\xi}_T^{L*}$ は (16)-(19) 式の最適化問題の解と一致する.

(証明) 事実 2 と問題 2 の解 (39) 式から導かれる. ■

以上本章では, 前章で考えた最適制御問題の双対問題となる最適推定問題を導出し, その問題と等価となる問題として信号依存ノイズの影響化での最適推定問題を導いた. 本章の議論で特に注目すべき点は, 前章の制御問題で考えた信号依存入力ノイズの影響が, その双対問題においては信号依存出力ノイズとして現れることである. 次章では, 人間のもつ推定則にこのようなノイズが存在するかどうかを実験によって検証する.

4. 実 験

前章までの議論により, 信号依存入力ノイズのもとでの終端誤差の最小化をはかる制御問題 (4) は定理 3 で考えた信号依存出力ノイズのもとでの最適推定問題と双対関係をもつことが示された. このような信号依存出力ノイズが実際に人間のもつ推定メカニズムの中に存在するかどうか, ということは興味深い疑問である. 本章では実際に人間に推定をさせる実験を行ない, その結果が示す傾向がいくつかの仮定のもとでは定理 3 で考えたノイズの性質 (34) 式と矛盾しないことを示す.

本研究では, 人間のもつ推定則のひとつの例として, 移動物体の速度を視覚情報から推定する問題を考える. 人間が移動物体を観察する場合, 得られる情報は視覚情報, すなわち物体の位置に関する情報のみであり, したがって物体の速度はなんらかの方法で推定しなくてはならない.

このような推定については Weiss らによって検討され, ある意味での最適性が実験によって示されている⁷⁾. しかし Weiss らの結果では推定に影響を及ぼすノイズは適当に仮定されており, その特性に関する検証は行なわれていない. そこで, ここでは移動物体の実際の速度と人間による推定値との間の差のばらつきを見ることによって, ノイズの特性を確かめる

Fig. 1 Screen shot of experiment

実験を行なう。

本論文では、移動する物体をPCディスプレイ上に表示し、これを被験者に一定時間観察させてその初期速度を推定させる実験を行なう。Fig.1はこのプログラムのスクリーンショットである。物体の初期速度は試行ごとにランダムに決定される。被験者はこの物体を一定時間観察し、その初期速度を推定するのである。本実験では3人の被験者に対してそれぞれ100回の試行を行ない、試行ごとに真の初期値と被験者による推定値を記録した。詳しい実験手順は付録Cに示す。

本実験において、あるサンプル時刻 t における物体の位置 (PCの画面上の位置) $y_d(t)$ は、初期速度 v と適当な関数 $g(t) \in \mathcal{R}$ を用いて $y_d(t) = g(t)v$ と表わすことができる。人間はこの位置情報 $y_d(t)$ を視覚を通じて得ることになるが、本研究ではこの位置情報 $y_d(t)$ にノイズ $w(t)$ が加えられ

$$y(t) = y_d(t) + w(t) = g(t)v + w(t) \quad (40)$$

となった信号 $y(t)$ が人間に与えられているものと仮定する。すなわち何らかの理由で発生するノイズにより、人間は物体の「正確な位置を認識できない」と考えるのである (c.f. Weiss, Kording^{7),8)}).

T を試行の終了時刻として、 Y, W, G を $Y := [y(1) \ \cdots \ y(T)]'$, $W := [w(1) \ \cdots \ w(T)]'$, $G := [g(1) \ \cdots \ g(T)]'$ と定義する。これを用いると、(40)式は

$$Y = Gv + W \quad (41)$$

と表わすことができる。

この Y を用いて人間は初期速度 v の推定値 $\hat{v}$ を求めるのであるが、ここではこの推定則は前章の問題2で考えたものと同様に

$$\hat{v} = FY + f \quad (42)$$

と表わせるものと仮定する。ただし、問題2では初期値の期待値を $E[\xi_T] = 0$ と仮定していたがこの実験においては初期速度 v の平均値 $E[v]$ は0でないため、推定則の中に定数項 f が現れるものとしている。

推定誤差 e を $e := \hat{v} - v$ と定義すると、(42)式の仮定のもとでこの推定誤差は

$$e = \hat{v} - v = (FG - 1)v + f + FW \quad (43)$$

と表わされることになる。Fig.2に $v, y_d, y, w, \hat{v}$ の模式図

Fig. 2 Velocity estimation

を示す。以下、(43)式に基づいて実験結果を解釈することを試み、さらにノイズ項 FW の特性を解析することを考える。

Fig.3の分布図は、典型的な一人の被験者について、各試行について提示された真の初期速度 v とそのときの推定誤差 e の関係を表わしたものである。Fig.3では、横軸が移動物体の実際の初期速度 v 、縦軸が推定誤差 e を表わしている。また、図中の直線はこの分布に対する線形回帰直線である。Table 1には被験者3人のそれぞれについて、初期速度 v と推定誤差 e の相関係数 $\rho_{v,e}$ を計算した結果を示す。これらの結果から、初期速度 v と推定誤差 e の間には強い負の相関があることがわかる。これは(43)式であらわされる v と e の関係から見て妥当な結果といえる。そこで統計解析の手法に基づいて v と e の分布に対する線形回帰直線を

$$e = \hat{a}v + \hat{b} \quad (44)$$

とし、係数 $\hat{a}$ と $\hat{b}$ を実験データから最小二乗法を用いて計算すると、この $\hat{a}$, $\hat{b}$ はそれぞれ(43)式の $(FG - 1)$, f の推定値として扱うことができる。

さて、本実験で考察したいのは(43)式の $(FG - 1)$ や f ではなく、ノイズ項 FW である。このために各実験データ (v_k, e_k) に対し、残差 ϵ_k を

$$\epsilon_k := e_k - \hat{a}v_k - \hat{b} \quad (45)$$

と定義する。先に述べたとおり $\hat{a} \rightarrow (FG - 1)$, $\hat{b} \rightarrow f$ であ

Fig. 3 Distribution between initial state and estimation error

Table 1 Correlation coefficient $\rho_{v,e}$

	$\rho_{v,e}$
testee A	-0.526
testee B	-0.692
testee C	-0.567

るから,

$$\epsilon_k = (FG - 1 - \hat{a})v_k + f - \hat{b} + FW_k \rightarrow FW_k \quad (46)$$

となり, したがって ϵ_k はデータ (v_k, e_k) に影響を及ぼしたノイズ項 FW_k の近似となっていることがわかる. そこで以下では, ϵ_k の傾向を調べることにする.

Fig.4 は, Fig.3 に示したのと同じ被験者の, 初期速度 v に対する残差の 2 乗 ϵ^2 の分布を示す. Fig.4 の横軸は実際の初期速度 v , 縦軸は残差の 2 乗すなわち ϵ^2 である. また被験者 3 人のそれぞれについて, 初期速度 v と残差 ϵ^2 の相関係数 ρ_{v, ϵ^2} を計算した結果を, **Table 2** に示す. この結果から, 初期値と残差の 2 乗の間にはやや強い相関関係があることがわかる. したがって, 残差 ϵ を (43) 式のノイズ項 FW の近似であると考えれば, $(FW)^2$ は初期値 v と相関をもつものとみることができる.

前章の定理 3 では, その分散が真の信号に依存する信号依存ノイズについて考えた. この考え方を本章の実験にあてはめ, 「真の信号」を物体の真の位置 $y_d(t)$, ノイズを $w(t)$ と解釈すると, ノイズの特性について

$$E[w^2(t)|y_d(t)] = \alpha(y_d(t))^2 \quad (47)$$

なる仮説を導くことができる. この仮説のもとでは

$$E[(FW)^2|v] = \alpha F \begin{bmatrix} g(t)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g(2)^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & g(T)^2 \end{bmatrix} F' v^2 \quad (48)$$

となり, したがって (47) 式の仮説は実験の結果得られた v と

Fig. 4 Distribution between initial state and square of residual

Table 2 Correlation coefficient ρ_{v, ϵ^2}

	ρ_{v, ϵ^2}
testee A	0.499
testee B	0.331
testee C	0.375

Table 3 Comparison between α_0 and α_1

	α_0	α_1
testee A	5.22×10^{-3}	4.97×10^{-3}
testee B	1.54×10^{-2}	1.25×10^{-2}
testee C	2.88×10^{-2}	2.58×10^{-2}

FW の相関関係を説明できることになる.

ここで

$$\gamma := F \begin{bmatrix} g(1)^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g(T)^2 \end{bmatrix} F' \quad (49)$$

と定義すると (48) 式は

$$E[(FW)^2|v] = \alpha \gamma v^2 \quad (50)$$

となる. (43) 式のモデルと (47) 式の仮説が正しいならば, 推定誤差の平均値 $\bar{e}$ と分散 σ_e^2 について

$$\begin{aligned} \bar{e} &= E[e] = E[(FG - 1)v + f + FW] = (FG - 1)\bar{v} + f \\ \sigma_e^2 &= E[(e - E[e])^2] = (FG - 1)^2 \sigma_v^2 + E[(FW)^2] \\ &= (FG - 1)^2 \sigma_v^2 + \alpha \gamma E[v^2] \\ &= (FG - 1)^2 \sigma_v^2 + \alpha \gamma (\bar{v}^2 + \sigma_v^2) \end{aligned} \quad (51)$$

が成り立つので, (50) 式の係数 $\alpha \gamma$ は

$$\alpha \gamma = \frac{\sigma_e^2 - (FG - 1)^2 \sigma_v^2}{(\bar{v}^2 + \sigma_v^2)} \quad (52)$$

と表わされる. $\bar{v}$, σ_v^2 , $\bar{e}$, σ_e^2 はそれぞれ実験結果からその推定値 $\hat{v}$, $\hat{\sigma}_v^2$, $\hat{e}$, $\hat{\sigma}_e^2$ を

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v_k, \quad \hat{\sigma}_v^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (v_k - \hat{v})^2, \\ \hat{e} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e_k, \quad \hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (e_k - \hat{e})^2 \end{aligned} \quad (53)$$

として求めることができ, $(FG - 1)$ の推定値は $\hat{a}$ として求めることができるので, 結局以下の α_0

$$\alpha_0 = \frac{\hat{\sigma}_e^2 - \hat{a}^2 \hat{\sigma}_v^2}{(\hat{v}^2 + \hat{\sigma}_v^2)} \quad (54)$$

を (50) 式の $\alpha \gamma$ の推定値とみなすことができる.

一方で, データ (v_k^2, ϵ_k^2) に対して $\epsilon^2 = \alpha_1 v_k^2$ なる回帰直線を考え, この係数 α_1 は $\sum_{k=1}^N (\epsilon_k^2 - \alpha_1 v_k^2)^2$ を最小にする α_1 として求めることができる. (50) 式の仮定のもとでは, この α_1 も $\alpha \gamma$ の推定値と考えられる.

したがって (42) 式のモデルと (47) 式の仮説が正しければ, α_0 と α_1 は十分な回数の実験のもとでは一致しなければならない. この α_0 と α_1 を 3 人の被験者についてそれぞれ求めた結果を **Table 3** に示す. Table 3 のすべての被験者についてそれぞれの値はおおよそ一致しており, すなわち, この点において (47) 式の仮定は実験結果と矛盾しないことが確かめ

られる。

以上により、この実験では人間が運動する物体の速度を推定する際にはその対象の速度が大きいほど推定誤差の分散が大きくなることが示され、この事実が推定メカニズムにおける信号依存ノイズによって説明され得ることがわかった。さらに、対象の速度と推定誤差の分散との間の相関係数はある意味において妥当なものであることが確かめられた。これは、人間の行なう運動制御の双対問題として導かれた推定問題が、人間のもつ何らかの推定メカニズムのモデルとなる可能性を示唆するものと考えられる。

5. ま と め

本研究では、Harris らによって提案された人間の運動生成モデルにおいて人間が解いているとされた制御問題の双対問題を導き、それが信号依存ノイズのもとでの最適制御問題と解釈できることを示した。さらに人間が行なっている推定の例題として移動物体の速度を人間に推定させる実験を行ない、この推定に影響を及ぼしているノイズが信号依存性をもつと仮定しても実験結果と矛盾しないことを示した。

本論文で行なった実験は人間の行なう推定を非常に限定的な状況で観察したものであり、推定メカニズムについても多くの仮定をおいている。そのため人間のもつ推定メカニズムに対する検証としてはまだ不十分なものといわねばならない。人間の行なう推定の過程や結果を直接観察することは不可能であるため、そのメカニズムを精細に検証することは非常に困難であるが、少しでもこのメカニズムを解明していくことは人間の知能に対する理解を深める上で重要な課題であろう。

人間の知覚についてはすでに Weber の法則と呼ばれるある種の信号依存性が確認されている。これは、簡単にいえば人間の知覚の弁別閾（視覚であれば距離の差が認識できる閾値）は感覚強度が強いほど（距離が長いほど）大きくなるとする法則である。この Weber の法則は静的な感覚刺激、たとえば動かない2点間の距離について主に報告されており、したがって本研究で行なった実験に直接あてはめることはできないが、感覚の正確さが信号に依存するという点を考えれば本研究で行なった実験の結果はある程度自然であるといえる。

Harris らによって提案された終点誤差分散最小化モデルは指さし動作のような単純な人間の運動の特徴を良く表わしたものであると同時に最適制御問題としても解釈しやすい形式となっており、このため制御理論における知見の応用がしやすい。本論文ではこの点に注目して解析の対象とした。しかし、実際にはこの終点誤差分散最小化モデルのみによって人間のすべての運動が説明できるというわけではない。また、指さし動作のような単純な運動についても、人間の運動に関する研究が今後進むことによってより妥当なモデルが提案される可能性はある。こういった別のモデルについても、本論文で行なったように制御問題としてとらえ、その双対問題を考えることによって人間のもつ何らかの推定機能に関する考

察を行なうことはできるかもしれない。これは今後の興味深い課題である。

参 考 文 献

- 1) N. Hogan: An organizing principle for a class of voluntary movements, *J. Neurosci.*, **4**, 2745/2754 (1984)
- 2) T. Flash and N. Hogan: The co-ordination of arm movements: An experimentally confirmed mathematical model, *J. Neurosci.*, **5**, 1688/1703 (1985)
- 3) Y. Uno, M. Kawato and R. Suzuki: Formation and control of optimal trajectories in human multijoint arm movements: Minimum torque-change model, *Biol. Cybern.*, **61**, 89/101 (1989)
- 4) C. Harris and D. Wolpert: Signal-dependent noise determines motor planning, *Nature*, **394**, 780/784 (1998)
- 5) G. Goodwin: Inverse problems with constraints, *CD-ROM Proc. of IFAC 15th Triennial World Congress*, P-We-M (2002)
- 6) G. Goodwin, M. Seron and J. Dona: Constrained control and estimation, 217/237, Springer Verlag (2004)
- 7) Y. Weiss, E. Simoncelli and E. Adelson: Motion illusions as optimal percepts, *Nature Neurosci.*, **5-6**, 598/604 (2002)
- 8) K. Kording and D. Wolpert: Bayesian integration in sensorimotor learning, *Nature*, **427**, 244/247 (2004)

《付 録》

A. Post-movement period について

(1) 式のシステムに対し、 $E[x(T)] = E[x(T+1)] = \dots = E[x(T+R)] = x_d$ という拘束のもとで J_1 を最小化する $u(0), \dots, u(T+R-1)$ を求める問題が、 $E[x(T)] = x_d$ のもとで $E[(x(T) - x_d)' \tilde{Q}(x(T) - x_d)]$ を最小化する $u(0), \dots, u(T-1)$ を求める問題と等価であることを示す。ただし $\tilde{Q}$ は適当に定義される正則行列である。

まず、 $E[x(T)] = E[x(T+1)] = x_d$ と状態方程式より

$$x(T+1) = Ax_d + Bu(T) = x_d \quad (\text{A.1})$$

であるから、 $Bu(T) = x_d - Ax_d$ となる。ところが $u \in \mathcal{R}$ なのでこれを満たす $u(T)$ は高々1つしか存在せず、以下同様に $u(T+1), \dots, u(T+R-1)$ もすべて高々1つしか存在しないことがわかる。そこで $\bar{u}$ を $B\bar{u} = x_d - Ax_d$ を満たす適当な定数と定義しておく。

一方、 $T+1 \leq k \leq T+R$ なる k について

$$x(k) - E[x(k)] = A^{k-T} (x(T) - E[x(T)]) + \sum_{i=T}^{k-1} A^{k-i-1} Bw(i) \quad (\text{A.2})$$

となるので、 w の性質と $u(T) = \dots = u(T+R-1) = \bar{u}$ となることから J_1 は

$$J_1 = E \left[(x(T) - E[x(T)])' \tilde{Q} (x(T) - E[x(T)]) \right] + \sum_{k=T+1}^{T+R} \sum_{i=T}^{k-1} B' A'^{k-i-1} \tilde{Q} A^{k-i-1} B \bar{u}^2 \quad (\text{A.3})$$

ただし $\tilde{Q} = \sum_{k=T+1}^{T+R} (A'^{k-T} \tilde{Q} A^{k-T})$ となる。(A.3)

式の右辺第 2 項は定数であるから, J_1 を最小化する $u(0), \dots, u(T+R-1)$ を求めるためには (A.3) 式の右辺第 1 項を最小化する $u(0), \dots, u(T-1)$ を求めればよいことがわかる。

B. 問題 1 と最適化問題 (30)

(26) 式より, 確率変数 Y , W , ξ_T の関係は

$$Y = G\xi_T + W \quad (\text{B.1})$$

と表わされる。 ξ_T はシステムの初期値, W はノイズ項, Y は出力列をそれぞれ表わしており, ξ_T と W は互いに独立である。したがって (B.1) 式は Y と ξ_T , および Y と W の依存関係を表わしている。

W の確率密度関数は

$$P_W(W) = \frac{1}{2\pi |R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}W^T R^{-1}W\right) \quad (\text{B.2})$$

$$R := H\bar{Q}H^T$$

と表わされる。

$P_{\xi|Y}(\xi_T|Y)$ は, Y が従う確率密度関数 $P_Y(Y)$ および ξ_T と Y の同時確率密度関数 $P_{\xi,Y}(\xi_T, Y)$ を用いて

$$P_{\xi|Y}(\xi_T|Y) = \frac{P_{\xi,Y}(\xi_T, Y)}{P_Y(Y)} \quad (\text{B.3})$$

と表わされる。 $P_Y(Y)$ は ξ_T に依存しないので, $P_{\xi|Y}(\xi_T|Y)$ を最大にする ξ_T を求めることは $P_{\xi,Y}(\xi_T, Y)$ を最大にすることに等価である。 $P_{\xi,Y}(\xi_T, Y)$ は (B.1) 式の関係と (B.2) 式の確率密度関数より

$$P_{\xi,Y}(\xi_T, Y) = \frac{1}{2\pi |Q|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_T^T Q^{-1}\xi_T\right) \times \frac{1}{2\pi |R|^{\frac{1}{2}}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(Y - G\xi_T)^T R^{-1}(Y - G\xi_T)\right) \quad (\text{B.4})$$

となる。このことから

$$\log(P_{\xi,Y}(\xi_T, Y)) \propto -\frac{1}{2}\xi_T^T Q^{-1}\xi_T - \frac{1}{2}(Y - G\xi_T)^T R^{-1}(Y - G\xi_T) \quad (\text{B.5})$$

となるので, $P_{\xi,Y}(\xi_T, Y)$ を最大化する ξ_T は, J を

$$J := \frac{1}{2}\xi_T^T Q^{-1}\xi_T + \frac{1}{2}\hat{W}^T R^{-1}\hat{W} \quad (\text{B.6})$$

と定義したとき,

$$\min_{\xi_T, \hat{W}} J \quad (\text{B.7})$$

$$Y = G\hat{x}_T + \hat{W}$$

なる最小化問題を解くことによって得られる。

C. 実験方法

本研究の実験では 17 インチ液晶ディスプレイを用意し, これを解像度 $1280 \times 1024(\text{dot})$ で使用した。実験に用いたプ

ログラムでは, まず PC 画面上に作業領域 $1000 \times 600(\text{dot})$ のウィンドウを作成した。このウィンドウ内に画面垂直方向に直線を一本描画してこれを原点とし, 画面水平右方向を正, 左方向を負とするウィンドウ内座標系を考えた。このような座標系のもとで以下の仮想的な物体のダイナミクス

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + D\dot{x} &= 0 \\ M &= 10, D = 5 \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

を考えた。ただし x は物体のウィンドウ内座標での位置, M および D はそれぞれ仮想的な質量および粘性項である。この運動方程式をサンプリング間隔 0.01 で離散化して得られたシステムに対して初期位置 0 および初期速度 v を与え, 各サンプル時刻ごとに物体の位置を計算, PC 画面上に縦 10dot, 横 30dot の長方形として描画した。ただし PC 画面自体の描画のタイミングはここでは考慮していない (すなわち, 位置の計算自体は 0.01 秒ごとに行なわれるが, 更新が即座に反映されることは保証しない)。また, 初期速度 v は試行ごとにランダムに与えられ, その分布は $0 \leq v \leq 500$ の一様分布である。

実験における一回の試行の手順は以下のとおりである。

- (1) 物体が初期位置に配置される。
- (2) 被験者がウィンドウ内のボタンをクリックすると, 物体にはランダムな初期速度が与えられ, 移動を開始する。
- (3) 物体は移動開始から 1 秒間ウィンドウ内に表示された後, 消去される。
- (4) 被験者がウィンドウ内でマウスをドラッグすると, ポインタの移動距離に応じた長さの矢印が画面上に表示される。被験者はこの矢印を自分の推定した初期速度に比例するように調整する。
- (5) 再びウィンドウ内のボタンをクリックすると初期位置に物体が表示され, 被験者が推定値として示した値を初期速度として運動し, 一定時間後に消去される。

本実験では被験者に十分な回数の試行を練習させた上で, 一人につき 100 回の試行を行なった。

[著 者 紹 介]

白 根 一 登 (学生会員)

1980 年 3 月 31 日生。2004 年東京工業大学情報理工学研究科情報環境学専攻修士課程修了。同年, 東京工業大学情報理工学研究科情報環境学専攻博士後期課程入学, 現在に至る。

井村 順一 (正会員)

1964年10月11日生。90年京都大学大学院工学研究科修士課程修了。92年同大学大学院工学研究科博士課程中途退学。同年同大学工学部機械工学科助手。96年広島大学工学部助教授。2001年東京工業大学大学院情報理工学研究科助教授。2004年同教授。現在に至る。98年より1年間 Twente 大学客員研究員。非線形システム、ハイブリッドシステムの制御の研究に従事。工学博士。システム制御情報学会、日本ロボット学会、日本鉄鋼協会、IEEE などの会員。

1. はじめに
2. 制御系のモデル化
3. 制御系の解析
4. 制御系の設計
5. 制御系の評価
6. 制御系の応用
7. 結論
8. 参考文献
9. 謝辞
10. 著者略歴