LMIに基づく分散型アンチwindアップ制御系設計

竹川 正浩*・木山 健*

LMI-based Decentralized Anti-windup Control Synthesis

Masahiro TAKEKAWA* and Tsuyoshi KIYAMA*

This paper considers a decentralized anti-windup stabilizing control synthesis problem with a non-zero feedthrough matrix from output to input of saturation via the generalized sector approach. The sufficient solvability condition can be recast as a linear matrix inequality (LMI) one.

Key Words: saturation, dead-zone, domain of attraction, generalized sector, feedthrough matrix

1. はじめに

実際のシステムは、物理的な制約や制御対象の保護などの理由から状態や入出力に拘束が存在する。このようなシステムに対して制御入力などの飽和を考慮せずに厳しい制御性能を要求すると、windアップ現象などの制御性能の劣化や制御系の不安定化が引き起こされる場合がある。そこで、線形行列不等式 (LMI) に基づき、集中型のアンチwindアップ制御系設計が近年精力的に研究されてきている¹⁾。

本論文では飽和要素の出力から入力までの直達成分を考慮する²⁾アンチwindアップ制御系の設計法の中で、大規模システムの制御に有効なように分散制御問題を考察する。制御対象の入出力チャンネル数と求めたいコントローラの次数に応じてリヤプノフ行列に適切な構造をもたせることで^{3),4)}、可解条件を LMI 条件の形式で導出できることを示す。また数値例を用いてこの可解条件の妥当性を検証する。

表記: r 次元の実ベクトルの集合を $\mathbb{R}^r$, $n \times m$ の実行列の集合を $\mathbb{R}^{n \times m}$, $n \times m$ の零行列を $0_{n \times m}$, $n \times n$ の単位行列を I_n と記述する。行列 M に対し, M' は転置行列, M^i は i 行目の行ベクトル, $\text{tr}(M)$ はトレースを表す。正方行列 M に対して, $\text{He}(M) := M + M'$ を定義する。対称行列 M に対して, $M > 0$ ($M \geq 0$) は (準) 正定行列を意味する。行列 M_1, M_2 に対する $\text{diag}\{M_1, M_2\}$ をつぎのように表記する。

$$\text{diag}\{M_1, M_2\} := \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}.$$

2. 分散型アンチwindアップ制御系

Fig. 1 のフィードバック系で表わされる分散型アンチwindアップ制御系を考える。ただし, $G(s)$ は N チャンネルの制御対象で,

Fig. 1 Decentralized anti-windup control system

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$B := [B_1 B_2 \cdots B_N], \quad C := [C'_1 C'_2 \cdots C'_N]',$$

$$u := [u'_1 u'_2 \cdots u'_N]', \quad y := [y'_1 y'_2 \cdots y'_N]'$$

により与えられ, 行列 C_i は行フルランクとする。 $x \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $y_i \in \mathbb{R}^{q_i}$ はそれぞれ状態変数, i 番目のチャンネルの制御入力, i 番目のチャンネルの観測出力, $m := \sum_{i=1}^N m_i$ である。 $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ は飽和関数であり,

$$u = \phi(z) \Leftrightarrow u_i = \begin{cases} \sigma_i & (z_i > \sigma_i) \\ z_i & (|z_i| \leq \sigma_i) \\ -\sigma_i & (z_i < -\sigma_i) \end{cases} \quad (2)$$

のように定義される。ここで, $\sigma \in \mathbb{R}^m$ は各要素が正の与えられたベクトルである。以下での記述を簡単にするため, Fig. 1 の制御系をループ変換しておく。つぎの不感帯関数 $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$\varphi(z) := -\phi(z) + z \quad (3)$$

を定義すると, $w = \varphi(z)$ とおくことにより,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_{c1} & B_{c2} \\ C_c & D_{c1} & D_{c2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y \\ w \end{bmatrix} =: K \begin{bmatrix} x_c \\ y \\ w \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$A_c := \text{diag}\{A_{c1}, A_{c2}, \cdots, A_{cN}\},$$

$$B_{c1} := \text{diag}\{B_{c11}, B_{c12}, \cdots, B_{c1N}\},$$

$$B_{c2} := \text{diag}\{B_{c21}, B_{c22}, \cdots, B_{c2N}\},$$

$$C_c := \text{diag}\{C_{c1}, C_{c2}, \cdots, C_{cN}\},$$

$$D_{c1} := \text{diag}\{D_{c11}, D_{c12}, \cdots, D_{c1N}\},$$

* 大阪大学大学院工学研究科 吹田市山田丘 2-1

* Graduate School of Engineering, Osaka University, Suita
(Received November 28, 2006)

(Revised June 6, 2007)

$$D_{c2} := \text{diag}\{D_{c21}, D_{c22}, \dots, D_{c2N}\},$$

$$x_c := [x'_{c1} x'_{c2} \dots x'_{cN}]', \quad z := [z'_1 z'_2 \dots z'_N]'$$

$$w := [w'_1 w'_2 \dots w'_N]'$$

の状態空間実現で与えられる分散型アンチwindアップコントローラ (DAWC) を考える。ただし, $x_{ci} \in \mathbb{R}^{n_{ci}}$, $w_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $z_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, はそれぞれ i 番目のチャンネルの DAWC の状態変数, 不感帯からの出力, DAWC からの出力である。このとき, (1), (3), (4) 式より Fig.1 の閉ループ系は

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} := (L_{11} + L_{12}KL_{21}) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$x := [x' \ x'_c]', \quad n_c := \sum_{i=1}^N n_{ci}, \quad q := \sum_{i=1}^N q_i,$$

$$A := \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{n_c \times n_c} \end{bmatrix}, \quad B_1 := \begin{bmatrix} -B \\ 0_{n_c \times m} \end{bmatrix},$$

$$B_2 := \begin{bmatrix} 0 & B \\ I_{n_c} & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 := \begin{bmatrix} 0 & I_{n_c} \\ C & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 := \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n_c + m)},$$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & C_2 \\ C_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix}$$

と φ のフィードバック結合で表現される。ここで, 行列 D は飽和要素の出力から入力までの直達成分に相当している。

3. 吸収領域の解析

与えられた実対称正定行列 P に対して,

$$\mathcal{E}(P) := \{x \in \mathbb{R}^n : x'P^{-1}x \leq 1\} \quad (6)$$

の楕円領域を定義する。このとき, 吸収領域はつぎのように定義される。

【定義】 実対称正定行列 P が与えられているとする。このとき, $\mathcal{E}(P)$ 内の任意の点を初期値とする状態軌道がすべての時間で $\mathcal{E}(P)$ 内に留まり, かつ時間の無限への経過に伴い原点に収束する初期状態の領域 $\mathcal{E}(P)$ を吸収領域と定義する。

ここで, 与えられた行列 $N \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c)}$ と各要素が零以上の値をもつ与えられたベクトル $\sigma \in \mathbb{R}^m$ に対して, 局所領域

$$\mathcal{L}(N, \sigma) := \{x \in \mathbb{R}^{n+n_c} : \|N^i x\| \leq \sigma_i, i = 1, \dots, m\} \quad (7)$$

を定義する。

つぎに, 本論文で用いるマルチプライアの手法¹⁾を紹介する。(7) 式で定義される局所領域 $\mathcal{L}(N, \sigma)$ に対して, 不感帯関数 (3) に関するつぎの命題²⁾を導入する。

【命題 1】 (3), (5) 式で定義される $H(s) := C(sI - A)^{-1}B + D$ と $w = \varphi(z)$ のフィードバック結合を考える。行列 $N \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c)}$ が与えられているとする。このとき,

$$dT_0 + T_0 D' - 2T_0 < 0 \quad (8)$$

を満たす対角行列 $0 < T_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ が存在するならば, 任意の対角行列 $0 < T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ に対して

$$w'T\{(N - C)x - (D - I)w\} \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{L}(N, \sigma)$$

が成立する。

(注意) (8) 式は, $H(s)$ と φ の閉ループ系の Well-posedness の十分条件を与えるものであり, 詳細に関しては文献 2) を参照されたい。

命題 1 および S -procedure により証明される, 楕円領域 (6) がシステム $H(s)$ と φ の閉ループ系の吸収領域となる解析の十分条件¹⁾を紹介する。

【命題 2】 $H(s) := C(sI - A)^{-1}B + D$ と (3) 式で定義される φ のフィードバック結合を考える。与えられた実対称行列 $P > 0$ に対して

$$\text{He} \begin{bmatrix} AP & BS \\ CP - R & (D - I)S \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} P & R^{i'} \\ R^i & \sigma_i^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (10)$$

を満たす対角行列 $S > 0$ と行列 R が存在するならば, $\mathcal{E}(P)$ は吸収領域である。

4. 吸収領域の設計

Fig.1 の閉ループ系に対して, コントローラの状態を零に初期化したときの吸収領域は制限付吸収領域¹⁾とよばれている。与えられた実対称正定行列 X に対し, つぎの集合

$$\mathcal{E}_0(X) := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n_c} : x'Xx \leq 1, x \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (11)$$

を定義する。このとき, 吸収領域の部分集合である制限付吸収領域 $\mathcal{E}_0(X)$ は吸収領域の定義と同様に定義される。

前章の解析の命題に基づいて, $\mathcal{E}(P)$, $\mathcal{E}_0(X)$ がそれぞれ吸収領域, 制限付吸収領域となる DAWC の設計問題の可解条件の十分条件は, つぎの LMI 条件で特徴づけられる。

《定理 1》 実対称行列 X , 各要素が正のベクトル $\sigma \in \mathbb{R}^m$ および制御対象 (1) が与えられているとする。また,

$$C_1 U := \begin{bmatrix} I_{n_c+q} & 0 \end{bmatrix}, \quad A := U^{-1}AU, \quad B_1 := U^{-1}B_1,$$

$$B_2 := U^{-1}B_2, \quad U^{-1} =: \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix},$$

$$T_1 \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times n}, \quad T_2 \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times n_c}$$

により行列 U , A_1 , B_1 , B_2 , T_1 , T_2 を, (6), (11) 式により集合 $\mathcal{E}(P)$, $\mathcal{E}_0(X)$ を定義する。このとき,

$$\text{He} \begin{bmatrix} AP + B_2 \begin{bmatrix} V & 0 \end{bmatrix} & B_1 S + T_2 W \\ \begin{bmatrix} V_C & V_D & 0 \end{bmatrix} - R & Q - S \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} P & R^{i'} \\ R^i & \sigma_i^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} P & T_1 \\ T_1' & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
P_A &:= \text{diag}\{P_{A1}, \dots, P_{AN}\}, & P_{Ai} &\in \mathbb{R}^{n_{ci} \times n_{ci}}, \\
P_B &:= \text{diag}\{P_{B1}, \dots, P_{BN}\}, & P_{Bi} &\in \mathbb{R}^{n_{ci} \times m_i}, \\
P_D &:= \text{diag}\{P_{D1}, \dots, P_{DN}\}, & P_{Di} &\in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}, \\
V_A &:= \text{diag}\{V_{A1}, \dots, V_{AN}\}, & V_{Ai} &\in \mathbb{R}^{n_{ci} \times n_{ci}}, \\
V_B &:= \text{diag}\{V_{B1}, \dots, V_{BN}\}, & V_{Bi} &\in \mathbb{R}^{n_{ci} \times q_i}, \\
V_C &:= \text{diag}\{V_{C1}, \dots, V_{CN}\}, & V_{Ci} &\in \mathbb{R}^{m_i \times n_{ci}}, \\
V_D &:= \text{diag}\{V_{D1}, \dots, V_{DN}\}, & V_{Di} &\in \mathbb{R}^{m_i \times q_i}, \\
W &:= \text{diag}\{W_1, \dots, W_N\}, & W_i &\in \mathbb{R}^{n_{ci} \times m_i}, \\
Q &:= \text{diag}\{Q_1, \dots, Q_N\}, & Q_i &\in \mathbb{R}^{m_i \times m_i},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &:= \begin{bmatrix} P_A & P_B \\ P'_B & P_D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_c+m) \times (n_c+m)}, \\
P &:= \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}, \quad P_2 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}, \\
V &:= \begin{bmatrix} V_A & V_B \\ V_C & V_D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_c+m) \times (n_c+q)}, \\
P &:= UPU'
\end{aligned}$$

を満たす対角行列 $S > 0$, 実対称行列 P , 行列 Q, R, V, W が存在するならば, 吸収領域 $\mathcal{E}(P)$ と制限付吸収領域 $\mathcal{E}_0(X)$ を達成する分散型アンチwindアップコントローラ (4) が存在する.

(証明) 命題の (9), (10) 式に U^{-1} を用いる合同変換により (12) 式と (13) 式の左の式を得る. また, $\mathcal{E}_0(X) \subseteq \mathcal{E}_0([I_n \ 0]P^{-1}[I_n \ 0]')$ は (13) 式の右の式と等価である. ■

制約条件 (12), (13) を満たす $X > 0$ は一般に唯一でなく, 最大の制限付吸収領域 $\mathcal{E}_0(X)$ を与える X を求めることが望ましい. このとき, 楕円体 $\mathcal{E}_0(X)$ の大きさを測る尺度として, たとえば $1/\text{tr}(X)$ を用いると, 本論文の枠組み内で最大の制限付吸収領域を達成する DAWC の設計方法をつぎのように得る.

設計方法:

1. LMI 条件を制約とする線形目的関数を最小化するつぎの問題を解く.

$$\text{minimize}_{S>0, X, P, Q, R, V, W} \text{tr}(X) \text{ subject to (12), (13). (14)}$$

2. DAWC の状態空間行列 (4) をつぎのように計算する.

$$\begin{bmatrix} A_c & B_{c1} & B_{c2} \\ C_c & D_{c1} & D_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} VP_1^{-1} & WS^{-1} \\ & QS^{-1} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

5. 数 値 例

定理 1 を用いることにより, Fig. 1 の閉ループ系を入力飽和を許容しつつ安定化する DAWC が設計できる. 以下では, 数値例を用いてこれを示す. 状態実現データ

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.006 & -0.016 & -0.053 & -0.696 & -1.326 \\ 0.038 & 0.050 & -0.062 & 1.088 & -0.315 \\ 0.007 & -0.030 & -0.002 & -0.547 & -0.921 \\ -1.045 & 0.033 & 1.902 & 0 & 0 \\ -0.419 & 2.100 & 0.879 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fig. 2 $x(t)$ and $x_c(t)$ vs. t Fig. 3 $u_2(t)$ and $z_2(t)$ vs. t

で与えられる不安定な制御対象 (1) を考える. 飽和リミットを $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$ とする. 状態の次数を $n_{c1} = 1, n_{c2} = 1$, 問題の簡単化のために行列 $C_c = I_2$ に規格化する可観測正準形の DAWC を考える. このとき, リヤプノフ行列の一部を $P_B = 0$ とし, 最小化問題 (14) を解くと,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A_{c1} & B_{c11} & B_{c21} \\ C_{c1} & D_{c11} & D_{c21} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -8.23 \times 10^5 & 1.45 & -3.28 \times 10^{-7} \\ 1 & 0.19 & 1.00 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} A_{c2} & B_{c12} & B_{c22} \\ C_{c2} & D_{c12} & D_{c22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -8.36 \times 10^5 & -2.60 & -3.35 \times 10^{-7} \\ 1 & 0.28 & 0.43 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

を得る. ここで, 閉ループ系の吸収領域内の初期状態

$$x = \begin{bmatrix} 0.96 & 2.29 & 2.01 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

の場合の状態と制御入力の時間応答をそれぞれ Fig. 2 と Fig. 3 に示す. Fig. 2 で, 実線は制御対象の状態 $x(t)$, 破線は DAWC の状態 $x_c(t)$ である. また, Fig. 3 で, 実線は制御入力 $u_2(t)$, 破線はコントローラ出力 $z_2(t)$ である.

明らかに, 制御入力飽和を起こしても, 吸収領域において閉ループ系を安定化させることが可能であることがわかる.

6. お わ り に

入力飽和を有する分散型アンチwindアップ制御系の安定化問題について, 制御対象の入出力チャンネル数と求めたいコントローラの次数に応じてリヤプノフ行列に適切な構造をもたせることで, 可解条件を LMI 条件の形式で導出できることを示した.

(注意) 定理 1 が成立するならば, 制御対象の固定モードは安定である. 逆は成立しないことに注意されたい.

謝辞 有益な御意見を頂きました大阪大学大学院の池田雅夫教授, 大阪府立大学大学院の Guisheng Zhai 准教授と査読者の方々に感謝いたします.

参 考 文 献

- 1) K. Sawada and T. Kiyama: Relation between Single-stage and Two-stage Method for Anti-windup Control Synthesis, Proc. of SICE Annual Conf., 3027/3032 (2005)
- 2) T. Hu, A.R. Teel and L. Zaccarian: Performance analysis of saturated systems via two forms of differential inclusions, Proc. of CDC-ECC, 8100/8105 (2005)
- 3) M. Mattei: Sufficient Condition for the Synthesis of $\mathcal{H}_\infty$ Fixed-order Controllers, International Journal of Robust and Nonlinear Control, **10**, 1237/1248 (2000)
- 4) S. Murao, G. Zhai and M. Ikeda: Decentralized $\mathcal{H}_\infty$ controller design; an LMI approach, Proc. of SICE Annual Conf. 2002 in Osaka (2002)