状態量子化に基づく線形システムの離散状態近似とその最適制御への応用

田 崎 勇 一*・井 村 順 一*

Discrete Abstractions of Linear Systems Based on State Quantization and Its Application to Optimal Control

Yuichi TAZAKI* and Jun-ichi IMURA*

Optimal control and reachability analysis of continuous-state systems often require computational algorithms with high complexity. The use of discrete-state abstractions of continuous-state systems reduces such problems to path-planning problems on directed graphs with a finite number of nodes, which can be computed efficiently. In this paper, we propose a method to design discrete abstractions of stabilizable discrete-time linear systems based on the notion of approximate bisimulation. Moreover, we show that a suboptimal solution to optimal control problems with a known bound on performance deterioration is obtained by making use of discrete abstraction.

Key Words: discrete abstraction, bisimulation, state quantization, optimal control

1. はじめに

実世界に存在する多くの制御対象は連続なシステムとして表現される。このようなシステムに対する制御器設計問題や検証問題は、近年の要求仕様の複雑化に伴って数値的解法が用いられる機会が増えてきている。しかしながら、システムの規模や考慮すべき時間区間が増大するにつれてこれらの数値解法に要する計算コストが膨大となる傾向にある。これに対して、対象の数理モデルを直接的に用いる代わりに、より単純な近似モデルを導出しこれを制御や解析に利用することは有効な手段であろう。

システムの近似問題の中でも、有限状態システム（状態の取り得る値が有限個であるシステム）に近似する場合は特に discrete abstraction と呼ばれる（ほかにも finite abstraction, qualitative abstraction などと呼ばれる。本研究では離散近似と呼ぶ）。有限状態システムが近似モデルとして注目される理由は、多くの制御問題や検証問題が連続状態システムと比べて格段に効率的に解くことができるからである。離散近似に関する先行研究としては文献 1)~4), 19) が挙げられる。特に supervisory control と関連付けた研究としては文献 5)~7) がある。

システムの類似性を数学的に論じる枠組みとして双模倣性 (bisimulation) の概念がある。双模倣性は元々ラベル付き状

態遷移系の等価性を論じるための枠組みとして考案された⁹⁾。近年、制御理論の分野においても双模倣性を用いて動的システムの近似や低次元化を試みる研究が活発に行なわれている。線形システムの低次元化と双模倣性を関連付けた研究として文献 10) がある。

元来の双模倣性は記号空間上で定義されるものであるため、連続状態システムの近似には用いにくい側面があった。これに対し、Girard ら¹¹⁾は、双模倣性を距離空間上に拡張した近似双模倣 (approximate bisimulation) の概念を提案した。これに関連して、Julius ら¹⁶⁾は状態は記号空間上にもつが入出力は距離空間上にもつような Metric transition system と呼ばれるモデルを提案している。現在までにさまざまなクラスのシステム間の近似双模倣性に関する結果が得られている^{12), 14), 15)}。特に近似双模倣性による離散近似の結果としては文献 13), 17), 18) がある。

ところで、先行研究においては離散近似の応用目的は主としてシステムの可到達性検証問題に留まっている。最適制御問題への応用を指向した数少ない例としては Broucke の研究²⁰⁾がある。本研究では、離散化の粒度を限りなく小さくしていった極限において近似解と厳密解が一致することを述べている。しかしながら、所定の粒度によって離散化した際にどの程度の準最適性が達成できるのかは言及されていない。また、あらかじめ入力変数が取り得る値を有限個に限定しているが、この操作の影響については詳しく議論されていない。

そこで本論文では、最適制御問題への応用を目的として、近似双模倣性に基づく離散時間線形システムの有限状態近似の設計法を提案する。提案手法は連続値をとる制御入力をそのまま扱うことができる。さらに有限状態近似の設計問題がある種の数理計画問題に帰着することで、状態数の低減を考

* 東京工業大学大学院情報理工学研究科 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Graduate School of Information Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo
(Received February 6, 2008)
(Revised September 17, 2008)

慮した設計を行なうことができる。その上で、有限状態近似を用いて最適制御の近似解を導出する方法を示し、近似双模倣性の許容誤差パラメータと準最適性との定量的関係を議論する。

まず第2章において本論文で用いる近似双模倣性の概念を定義する。つぎに第3章において、状態量子化の概念を提案する。これらの準備に基づき、第4章では線形システムの離散近似の設計方法を示す。第5章では近似双模倣性に基づく近似モデルを用いて最適制御問題の準最適解を求める手順およびその準最適性について述べる。第6章において簡単な数値例を示し、第7章にて今後の課題について述べる。

記法: $\|x\|$ はユークリッドノルムを表わす。ベクトル x と行列 M について $\|x\|_M = \sqrt{x^T M x}$ と定義する。 $\lambda_{\max}(A)$ は行列 A の最大固有値を表わす。 $[i_1 : i_2]$ は整数の系列 $[i_1, i_1 + 1, \dots, i_2]$ を表わす。

2. 近似双模倣性

本論文では以下に示すような離散時間システムを扱う。

$$\Sigma : \begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1)$$

ここで $x(t)$, $u(t)$, および $y(t)$ は時刻 $t \in \mathcal{T} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ における状態, 入力と出力を表わし, それぞれ $X \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^l$ の要素である (n, m, l はいずれも自然数)。また, $f: X \times U \rightarrow X$, $h: X \times U \rightarrow Y$ はそれぞれ状態遷移関数と出力関数である。入力信号の集合を $\bar{U}$ と表わす。さらに, 初期状態 $x_0 \in X$ から入力信号 $u \in \bar{U}$ によって駆動されるシステムの時刻 t における状態を $\bar{f}(t; x_0, u)$ と表わす。本論文を通じて, 離散時間システムを $\Sigma(X, U, Y, f, h)$ あるいは単に Σ と書く。

上に定義したシステムに関する近似模倣性および近似双模倣性の概念を導入する。

定義 2.1. 近似模倣性

2つのシステム $\Sigma(X, U, Y, f, h)$, $\hat{\Sigma}(\hat{X}, \hat{U}, Y, \hat{f}, \hat{h})$ および正の定数 ϵ について, 二項関係 $R \subset X \times \hat{X}$ が以下の条件を満たすとき, これを Σ から $\hat{\Sigma}$ への ϵ -近似模倣関係と呼ぶ: 任意の $(x_0, \hat{x}_0) \in R$ と $u \in U$ について, ある $\hat{u} \in \hat{U}$ が存在して

$$\|h(x, u) - \hat{h}(\hat{x}, \hat{u})\| \leq \epsilon \quad (2)$$

$$(f(x, u), \hat{f}(\hat{x}, \hat{u})) \in R \quad (3)$$

が成り立つ。

このような二項関係 R が存在するとき, $\hat{\Sigma}$ は Σ に対して ϵ -近似模倣的であるという。

近似双模倣性は, 近似模倣性に対称性を課したものとして定義される。

定義 2.2. 近似双模倣性

2つのシステム Σ , $\hat{\Sigma}$ と正の定数 ϵ について, 二項関係 $R \subset X \times \hat{X}$ が以下の条件を満たすとき, これを Σ と $\hat{\Sigma}$ の間の ϵ -近似双模倣関係と呼ぶ:

R は Σ から $\hat{\Sigma}$ への ϵ -近似模倣関係であり, かつその逆関係 $R^{-1} = \{(\hat{x}, x) | (x, \hat{x}) \in R\}$ は $\hat{\Sigma}$ から Σ への ϵ -近似模倣関係である。

このような二項関係 R が存在するとき, Σ と $\hat{\Sigma}$ は互いに ϵ -近似双模倣的であるという。

上の定義と他の文献に用いられている定義 (たとえば文献13)) との主な相違点は, 従来の定義ではシステムの出力関数が状態のみの関数となっているのに対して, 本論文ではシステムの出力が状態だけでなく入力の関数となっており, これに応じて近似(双)模倣性の定義が拡張されている点である。これは, 本論文が最適制御問題 (特に評価関数や制約条件が制御入力に依存するもの) への応用を念頭に置いていることに起因している。

近似(双)模倣的な近似モデルを実際の最適制御問題や検証問題に応用するためには追加的な条件が必要となる。つまり, 元モデル Σ の任意の初期状態 x_0 に対して, $(x_0, \hat{x}_0) \in R$ を満たす近似モデル $\hat{\Sigma}$ の初期状態 $\hat{x}_0$ が存在するという条件である。初期状態 x_0 が X 上から任意に選ばれれば, この条件は

$$\pi^X(R) = X \quad (4)$$

とも書ける。ここで $\pi^X(\cdot)$ は $X \times \hat{X}$ から X への自然な射影を表わす。

3. 状態量子化による連続状態システムの離散化

本章では本論文で状態量子化と呼ぶ操作を提案する。状態量子化を施すことで連続状態システムを自然に有限状態システムへ変換でき, これにより離散近似の設計問題は状態量子化器の設計問題に帰着される。

3.1 量子化関数

はじめに以下のような量子化関数を考える。

$$Q: X \rightarrow \mathcal{X} \quad (5)$$

$$Q(x) = x_i \text{ if } x \in S_i$$

ここで X は $\mathbb{R}^n$ の有界な部分集合, $\mathcal{X} = \{x_i\}_{i \in [1:S]}$ は X の有限個の要素から成る集合である。 $\{S_i\}_{i \in [1:S]}$ は X の分割を定める。すなわち,

$$S_i \cap S_j = \emptyset \ (i \neq j), \quad \bigcup_i S_i = X$$

である。また, $x_i \in S_i$ である。

3.2 状態量子化による離散状態システムへの変換

離散時間システム Σ の状態方程式の右辺に量子化器を付加することで得られる以下のシステムを考える。

$$Q(\Sigma) : \begin{cases} x(t+1) = Q(f(x(t), u(t))) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (6)$$

初期状態を $\mathcal{X}$ から選べば $Q(\Sigma)$ の状態遷移は $\mathcal{X}$ 上で完結する。また集合 $\mathcal{X}$ は有限であるから、システム $Q(\Sigma)$ は有限状態システムとなる。状態遷移関数をつぎのように書き換えることで有限状態システムであることがより鮮明になる。

$$x(t) = x_i \wedge u(t) \in \mathcal{U}_{ij} \Rightarrow x(t+1) = x_j \quad (7)$$

ここで $\mathcal{U}_{ij}$ は

$$\mathcal{U}_{ij} = \{u \in U \mid Q(f(x_i, u)) = x_j\} \quad (8)$$

であり、状態 x_i から x_j へ遷移する入力集合を表わす。量子化関数 Q の性質より、各 i について、 $\{\mathcal{U}_{ij}\}_{j \in [1:S]}$ は U の分割を与える。このように、有限の状態間の遷移関係をもとに入力の集合も間接的に離散化 (分割) される。この点は、文献 13) や 17) の先行研究において直接的な入力の量子化や、あるいは最初から離散値入力である場合を想定している例との相違点といえる。また、出力が現在状態のみに依存する場合、状態の量子化は出力の間接的な量子化をもたらす。

注) 状態量子化 (State quantization) という用語は文献 4) でも用いられているが、4) では状態空間の分割を導入し、同じ区画に含まれる状態の集合を同一視し、シンボル状態を与える操作を指している。この方法ではシンボル空間上の状態遷移は不確定的となる。一方、本研究で提案する状態量子化は同一の区画 (S_i) に含まれる状態を毎時刻単一の点 x_i に写像することによって $\mathcal{X}$ 上の確定的な状態遷移が得られる。また文献 8) でも (6) と記号上類似した表現が用いられているが、ここでは状態空間上に導入された分割の区画の組み合わせにシンボル状態を割り当てるという操作を表わしており、本論文のものとは異なっている。

4. 線形システムの離散近似の設計

4.1 線形システムの離散近似

本節では以下のように与えられる離散時間線形システムの離散近似を論じる。

$$\Sigma_L : \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (9)$$

以降では離散時間線形システムを $\Sigma_L \langle X, U, Y, A, B, C, D \rangle$ と表わす。

前章までの準備に基づき、対象とする問題はつぎのように定式化される。

問題 4.1. 与えられた離散時間線形システム Σ_L と正の定数 $\epsilon > 0$ に対して、 Σ_L と $Q(\Sigma_L)$ が ϵ -近似双模倣的となるような量子化関数 Q および二項関係 R を求めよ。ただし R は条件 (4) を満たさなければならない。

近似双模倣性は軌道追従問題と対比すると理解しやすい。つまり、もしある 2 つのシステムが近似双模倣的ならば、片方のシステムがどのように振舞っても、もう片方のシステムをうまく駆動することで所定の出力誤差を満たしながら相手

を追従することができるといえる。以下では、 $Q(\Sigma_L)$ の状態と入出力変数に $\hat{\cdot}$ をつけて Σ_L のそれと区別する。2 システムの状態方程式を再掲すると

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (10)$$

$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + B\hat{u}(t) + w(t) \quad (11)$$

となる。ここで $w(t)$ は量子化誤差信号で

$$w(t) = Q(A\hat{x}(t) + B\hat{u}(t)) - (A\hat{x}(t) + B\hat{u}(t)) \quad (12)$$

で与えられる。本来、量子化誤差 $w(t)$ は $\hat{x}(t)$ と $\hat{u}(t)$ の非線形で確定的な関数である。しかしながら、量子化関数の設計にこの非線形の依存関係を考慮に入れることは難しい。したがって、ここではより保守的なアプローチをとる。すなわち、量子化誤差は毎時刻において $\mathcal{W} := \{Q(x) - x \mid x \in X\}$ 上の任意の値を取り得る不確定信号とみなす。(10) 式と (11) 式の差分をとることでつぎのような誤差システムを得る。

$$\begin{aligned} e(t+1) &= Ae(t) + Bv(t) + w(t), \\ \delta y(t) &= Ce(t) + Dv(t). \end{aligned} \quad (13)$$

ただし $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$, $\delta y(t) = \hat{y}(t) - y(t)$, $v(t) = \hat{u}(t) - u(t)$ である。ここで注意すべき点は、両システムの入力の差分が誤差システムへの入力として働き、これが誤差システムの安定化、つまりは近似双模倣性の達成のために重要な役割を果たすという点である。

誤差システム (13) の不変集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ を、以下の条件を満たすものとして定義する。

$$\begin{aligned} \forall e \in E, \exists v \text{ s.t.} \\ \|Ce + Dv\| \leq \epsilon \wedge (\forall w \in \mathcal{W}, Ae + Bv + w \in E) \end{aligned} \quad (14)$$

するとつぎの補題が成り立つ。

補題 4.1. 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ と二項関係 $R \subset X \times \hat{X}$ が

$$(\hat{x} - x) \in E \Leftrightarrow (x, \hat{x}) \in R \quad (15)$$

で関連付けられているとする。このとき E が誤差システム (13) の不変集合 (14) ならば、二項関係 R は Σ_L と $Q(\Sigma_L)$ の間の ϵ -近似双模倣関係である。

さらに、つぎの補題は後述の定理を証明するのに役立つ。

補題 4.2. 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ のすべての固有値が複素平面上の単位円の内部にあるとする。このとき任意に与えられたおのおの $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ について、以下の条件を満たす正定行列 M および定数 $0 < \lambda < 1$ が存在する。

$$M \geq C^T C, A^T M A \leq \lambda^2 M \quad (16)$$

証明. 行列 A の固有値は単位円の内部にあるので、 $|\lambda_{\max}(A)| < \lambda < 1$ を満たす定数 λ について行列 $(1/\lambda)A$

の固有値も単位円内にある。したがって離散 Lyapunov 方程式

$$M - (1/\lambda)^2 A^T M A = C^T C + Q$$

(Q は正定行列) は唯一の正定解 M をもつ。これにより

$$A^T M A = \lambda^2 M - \lambda^2 (C^T C + Q) < \lambda^2 M,$$

$$M - C^T C = (1/\lambda)^2 A^T M A + Q > 0$$

を得る。□

上述の議論に基づき、つぎの定理は Σ_L と $Q(\Sigma_L)$ の近似双模倣性に対する十分条件を与える。

定理 4.3. $\Sigma_L(X, U, Y, A, B, C, D)$ を (A, B) -可安定な離散時間線形システムとする。また、行列 F を、 $(A + BF)$ の固有値を単位円の内部に置くものとして選ぶ。さらに、正定行列 M と定数 $0 < \lambda < 1$ を

$$\begin{aligned} M &\geq (C + DF)^T (C + DF), \\ (A + BF)^T M (A + BF) &\leq \lambda^2 M \end{aligned} \quad (17)$$

を満たすものとして選ぶ。このとき、量子化関数 $Q : X \mapsto \mathcal{X}$ として

$$\|Q(x) - x\|_M \leq (1 - \lambda)\epsilon \quad \forall x \in X \quad (18)$$

を満足するものを用いると、 Σ_L と $Q(\Sigma_L)$ は二項関係

$$R = \{(x, \hat{x}) \in X \times \mathcal{X} \mid \|x - \hat{x}\|_M \leq \epsilon\} \quad (19)$$

に関して ϵ -近似双模倣的であり、かつ R は条件 (4) を満たす。

証明. M と λ の存在性は補題 4.2 による。誤差システムの入力を $v = Fe$ とすると、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \|e(t+1)\|_M &= \|A_F e(t) + w(t)\|_M \\ &\leq \sqrt{e(t)^T A_F^T M A_F e(t)} + \|w(t)\|_M \\ &\leq \lambda \|e(t)\|_M + \|w(t)\|_M. \end{aligned}$$

ただし $A_F = A + BF$ 。ここで集合 E をつぎのようにおく。

$$E = \{e \in \mathbb{R}^n \mid \|e\|_M \leq \epsilon\}$$

すると、(17) 式より、任意の要素 $e \in E$ について条件 $\|(C + DF)e\| \leq \epsilon$ が成り立ち、さらに $\|w\|_M \leq (1 - \lambda)\epsilon$ より E は誤差システムの不変集合 (14) である。したがって、補題 4.1 より Σ_L と $Q(\Sigma_L)$ は (19) 式で与えられる二項関係に関して ϵ -近似双模倣的である。最後に、 R が (4) を満たすことは、任意の x について $(x, Q(x)) \in R$ が成り立つことから明らかである。□

注) 近似双模倣性の定義では、片方のシステムの軌道をもう片方のシステムが模倣する入力存在性のみを課しているが、定理 4.3 はその具体的な形を与えている。すなわち、 Σ_L が $Q(\Sigma_L)$ を模倣する場合は $u(t) = \hat{u}(t) + F(x(t) - \hat{x}(t))$ とし、逆の場合は $\hat{u}(t) = u(t) + F(\hat{x}(t) - x(t))$ とすればよい。

Fig. 1 Implementation of quantizer

4.2 量子化関数の最適設計

前節において、離散時間線形システムとその (状態量子化によって表現された) 離散近似システムとの近似双模倣性に対する十分条件は、量子化誤差に関する不等式条件として与えられることを示した。実用上は、単に近似双模倣性を達成するだけでなく、得られる離散近似システムの状態数を極力少なくしたいという要求がある。これは、有限状態システムに関する多くのアルゴリズムの計算量が主としてその状態数で決定するからである。本節では状態数をできる限り小さくする量子化関数の設計を論じる。

まず、条件 (18) を満たす量子化関数の明示的な表現を考える。最も自然な表現はつぎのようなものであろう。

$$Q(x) = \hat{U}^{-1} [\hat{U}x], \quad \hat{U} = \frac{\sqrt{n}}{2\epsilon(1-\lambda)} U. \quad (20)$$

ここで U は $U^T U = M$ の解として与えられる。このような U は M が正定行列であることから必ず存在する。また、 n は状態の次元で、記号 $[x]$ は丸め関数、つまり x の各成分を最近傍の整数に写像する関数である。この表現形式を Fig. 1 に図示する。

さて、(20) 式の表現形式に従う量子化関数を用い、さらに領域 $\hat{U}X = \{\hat{U}x \mid x \in X\}$ が単位格子の粗さに対して十分大きい (より具体的には、 X が各成分に関する区間の直積で与えられ、かつその最小の幅と $\hat{U}$ の最小特異値との積が 1 よりも十分大きい) とき、離散近似システムの状態数、いい換えると量子化関数 Q の値域 $\mathcal{X}$ の要素数は $\hat{U}X$ の体積に概ね比例すると見なせる。ここで X は与えられたものであるから、結局状態数は拡大率 $\prod_i \sigma_i(\hat{U})$ ($\sigma_i(\hat{U})$ は $\hat{U}$ の i 番目の特異値)、さらに等価的に

$$\sqrt{\det(\hat{U}^T \hat{U})} = \left(\frac{\sqrt{n}}{2\epsilon(1-\lambda)} \right)^n \sqrt{\det(M)} \quad (21)$$

で見積もれる。したがってわれわれの目的は条件 (17) の下で (21) 式を最小化する λ , F および M を求める問題に定式化される。さらに、この問題は以下に述べる手続きにより「扱いやすい」クラスの数理計画問題に変形することができる。まず、 λ を固定すれば条件 (17) は線形行列不等式 (LMI) に変形される。新たに変数 $N = M^{-1}$, $G = FM^{-1}$ を定義し、(17) の不等式に両側から N をかけることで

$$\lambda^2 N - (AN + BG)^T M (AN + BG) \geq 0, \quad (22)$$

$$N - (CN + DG)^T(CN + DG) \geq O. \quad (23)$$

を得る. これは G と N に関する以下の LMI と等価である.

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 N & (AN + BG)^T \\ (AN + BG) & N \end{bmatrix} \geq O, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} N & (CN + DG)^T \\ CN + DG & I \end{bmatrix} \geq O. \quad (25)$$

一方, λ を固定すれば (21) 式を最小化することは $\det(N)$ を最大化することと等価である. したがって, 与えられた λ に対する F と M の最適化は, つぎのような LMI 条件の下での行列式最大化問題に帰着される.

問題 4.2. *maximize $\det(N)$ subject to (24), (25).*

この問題はソルバ SDPT3²¹⁾により解くことができる. 問題 4.2 はパラメータ λ に依存する. 最適な λ の値を求めるには, 区間 $(0, 1)$ の中で直線探索しつつ繰り返し問題 4.2 を解き, (21) 式を最小とする λ およびそれに付随する M , F を求めればよい.

5. 最適制御への応用

本章では, 近似双模倣的な近似モデルを用いて最適制御問題の準最適解を構成する方法について述べる.

5.1 準最適制御の実現

初めに離散時間システムの有限時間最適制御問題を定義する.

問題 5.1. 有限時間最適制御

離散時間システム $\Sigma(X, U, Y, f, h)$, 初期状態 $x_0 \in X$ およびステップ数 $N > 0$ が与えられたとき, 制約条件

$$y_t \in C \quad (t \in [0 : N]) \quad (26)$$

を満たしつつ評価関数

$$J(\bar{u}) = \sum_{t=0}^N \phi(y_t) \quad (27)$$

を最小化する入力列 $\bar{u} = \{u_t\}_{0:N}$ を求めよ. ただし $\bar{y} = \{y_t\}_{0:N}$ は入力列 $\bar{u}$ と初期状態 x_0 に対応する出力列, $C \subset Y$, $\phi: Y \mapsto \mathbb{R}$ である.

この問題を $\mathcal{P}(\Sigma, x_0, C, J)$ と表わす. また, J は滑らかであると仮定する. われわれの目的は問題

$$\mathcal{P}_0 := \mathcal{P}(\Sigma, x_0, C, J) \quad (28)$$

の準最適解を構成することである. これを以下の手順で実現する. まず適当な定数 ϵ を選び, システム Σ と ϵ -近似双模倣的なシステム $\hat{\Sigma}$ および近似双模倣関係 R を設計する. すでに述べたとおり, R は条件 (4) を満たさなければならない. つぎに, $\hat{\Sigma}$ 上の新たな最適制御問題をつぎのように定義する.

$$\mathcal{P}_1 := \mathcal{P}(\hat{\Sigma}, \hat{x}_0, \text{int}(C, \epsilon), J) \quad (29)$$

ここで $\hat{x}_0$ は $\hat{\Sigma}$ の状態集合 $\hat{X}$ の要素で $(x_0, \hat{x}_0) \in R$ を満たすものである. 二項関係 R に関する条件 (4) より任意の x_0 に対応してこのような $\hat{x}_0$ が存在することが保証されている. また, $\text{int}(C, \epsilon)$ は

$$\text{int}(C, \epsilon) := \{v \mid B(v, \epsilon) \subseteq C\} \quad (30)$$

で定義され, C を ϵ だけ「狭めて」得られる部分集合を表わす. ただし $B(v, \epsilon)$ は点 v を中心とする半径 ϵ の閉球である. われわれは $\mathcal{P}_0$ を直接解く代わりに $\mathcal{P}_1$ を解く. その解を $\bar{u}_1^*$ とおく. 最後に, $\bar{u}_1^*$ を Σ 上で模倣する入力列を生成し, これを $\bar{u}_1^*$ とおく. 模倣入力列の存在性は Σ から $\hat{\Sigma}$ への近似模倣性により保証される.

5.2 準最適性の解析

当然ながら, 近似モデル上の問題 $\mathcal{P}_1$ の実行可能性および (実行可能なら) 最適評価値と, 元の問題 $\mathcal{P}_0$ の実行可能性および最適評価値の関係を知りたいという要求が生まれる. しかしながら, 近似双模倣性は制約条件の存在を陽に考慮しないため, これらの関係を直接解析することは難しい. ここでは元問題 $\mathcal{P}_0$ の代わりに以下に定義する問題 $\mathcal{P}_2$ と $\mathcal{P}_1$ の関係を調べることにする.

$$\mathcal{P}_2 := \mathcal{P}(\Sigma, x_0, \text{int}(C, 2\epsilon), J) \quad (31)$$

この問題の解を $\bar{u}_2^*$ とおく.

定理 5.1. 近似解の準最適性

2 つのシステム $\Sigma(X, U, Y, f, h)$ と $\hat{\Sigma}(\hat{X}, U, Y, \hat{f}, \hat{h})$ が二項関係 $R \subset X \times \hat{X}$ ((4) を満たす) に関して ϵ -近似双模倣的であると, これらについて 3 つの最適制御問題 $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$, および $\mathcal{P}_2$ (それぞれ (28), (29) 式, および (31) 式で与えられる) を考える. このとき, 以下が成り立つ.

- i) $\mathcal{P}_2$ が実行可能ならば $\mathcal{P}_1$ は実行可能である.
- ii) $\mathcal{P}_1$ が実行可能ならば $\mathcal{P}_0$ は実行可能である.
- iii) 模倣入力列 $\bar{u}_1^*$ の評価値に関して不等式

$$J(\bar{u}_1^*) \leq J(\bar{u}_2^*) + 2NL\epsilon \quad (32)$$

が成り立つ. ただし L は

$$L := \max_{y \in Y} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \phi(y) \right\| \quad (33)$$

で定義される定数である.

証明. i) と ii) は近似双模倣性の定義より自明である. iii) について, まず入力列 $\bar{u}_2^*$ を $\hat{\Sigma}$ 上で模倣する入力列を $\bar{u}_2^*$ とおく. 近似双模倣性より $\bar{u}_1^*$ は $\mathcal{P}_0$ の実行可能解であり, かつ $\bar{u}_2^*$ は $\mathcal{P}_1$ の実行可能解である. また

$$J(\bar{u}_1^*) - J(\bar{u}_1^*) \leq L\epsilon, \quad J(\bar{u}_2^*) - J(\bar{u}_2^*) \leq L\epsilon$$

が成り立つ. 一方, $\bar{u}_1^*$ の最適性より

$$J(\bar{u}_1^*) \leq J(\bar{u}_2^*).$$

がいえる. 以上より (32) 式が成り立つ. $\square$

この定理は近似解の評価値は問題 P_2 の最適評価値に既知の定数を足し合わせたもので上からおさえられると述べている. 当然ながら, 無制約の場合は $P_0 = P_2$ となるので $J(\bar{u}_1^*) \leq J(\bar{u}^*) + 2NL\epsilon$ といえる.

5.3 離散近似モデルの最適制御の計算法

離散近似モデル上での最適制御問題が実際に効率的に解けることを示す. 前述のとおり, 連続状態システム Σ の離散近似モデルは状態量子化システム $Q(\Sigma)$ として表わされる. これに関する最適制御問題 $\mathcal{P}(Q(\Sigma), x_0 \in \mathcal{X}, C, J)$ を解くことを考える. $Q(\Sigma)$ の状態は離散だが入出力変数は依然連続変数であることに注意されたい. これに対して, まずつぎのような「小さな」最適制御問題を考える.

問題 5.2. 1ステップ最適制御

与えられた $i, j \in [1: |\mathcal{X}|]$ について, $u \in \mathcal{U}_{ij} \wedge h(x_i, u) \in C$ を満たしつつ $\phi(h(x_i, u))$ を最小化する u を求めよ.

システムおよび出力制約が線形で, コスト関数 ϕ が2次関数, さらに量子化関数が (20) 式の形である場合, 問題 5.2 は2次計画問題となる. この問題が可解ならば, その解は状態を x_i から x_j へ制約を満たしつつ最小のコストで遷移させる入力を与える. この解を u_{ij} , その評価値を J_{ij} とおく. (i, j) のすべての組み合わせ数, すなわち $|\mathcal{X}|^2$ は膨大と成り得るが有限である. また, 多くの場合は状態遷移関係は疎となるため組み合わせ数はこれよりも少なくなる. 上記の考察からここではすべての (i, j) の組み合わせについて問題 5.2 を解き, その結果 (実行可能性, および可解の場合は u_{ij} と J_{ij} の値) をデータベースに格納することは実用上問題ないと判断する. すると, 解くべき問題はシンボル列 $\bar{s} = \{s_0, s_1, \dots, s_N\}$ ($s \in [1: |\mathcal{X}|]$, (s_t, s_{t+1}) は遷移可能) の集合の中から

$$J(\bar{s}) = \sum_{t=0}^N J_{s_t s_{t+1}}. \quad (34)$$

を最小とするものを採る問題に帰着される. この問題は有限個の頂点から成る有向グラフ上の経路計画問題であるので, 動的計画法などのよく知られたさまざまなアルゴリズムを用いて効率的に解くことができる.

6. 数 値 例

簡単な数値例を示す. 2状態1入力の離散時間線形システム Σ_L についてパラメータを以下のように選ぶ.

$$X = [-1, 1] \times [-1, 1], U = [-1, 1], Y = X$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.88 & -0.17 \\ 0.17 & 0.88 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

これに対して, 近似精度を $\epsilon = 0.3$ と設定し, 前章までに述べた方法で離散近似モデル $Q(\Sigma_L)$ を設計する. 得られた設

Fig. 2 Discrete abstraction of example system

Fig. 3 Optimal trajectory on $Q(\Sigma_L)$ (solid), and simulated trajectory on Σ_L (dash)

計変数の値を以下に示す.

$$M = \begin{bmatrix} 26 & -8.6 \\ -8.6 & 4.1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0.93 \\ -0.74 \end{bmatrix}, \lambda = 0.57$$

Fig. 2 は得られた離散近似モデルを示す. 図中の小さな丸は離散近似モデルの1つ1つの状態を表わしている. また, 丸をつなぐ線は, その状態間が遷移可能であることを示す.

つぎに有限時間最適制御へ応用する例を示す (Fig. 3). 制御対象のモデルは上と同じである. 出力制約集合としてつぎのような非凸集合を設定する.

$$C = C_x \times C_u, C_x = (X \setminus \mathcal{D}), C_u = [-0.2, 0.2],$$

$$\mathcal{D} = [-0.4, 0.4] \times [0.3, 0.5] \cup [-0.4, 0.0] \times [-0.5, -0.2]$$

ここで $\mathcal{D}$ は進入禁止領域 (図中の濃い灰色の領域) を表わす. また, 評価関数としては単純に $J(\bar{u}) = \sum_{t=0}^N \|y_t\|^2$ ($N = 25$) とする. この例では近似精度を $\epsilon = 0.1$ と設定して離散近似モデルを設計する. つぎに与えられた制約条件を ϵ の分だけ狭める. つまり進入禁止領域を図中の薄い灰色の領域まで広げ, 入力制約を $[-0.1, 0.1]$ とする. この制約のもとで離散近

似モデル上で最適経路を求め、得られた経路を元のモデル上で模倣する。3つの異なる初期状態 $([-0.8; -0.5], [0.8; 0.8],$ および $[0.8; -0.8])$ を指定した場合の結果を Fig. 3 に示す。離散近似モデルのすべての状態は煩雑となるため図示していない。図中の実線は離散近似モデル上で求めた最適経路を示し、破線はそれを元のシステム上で模倣して描いた軌道を示している。

7. おわりに

本論文では近似双模倣性に基づく連続状態システムの離散近似およびその最適制御問題への応用について論じた。今回用いた近似双模倣性の定義は、考えられるすべての軌道を同じ精度で近似(模倣)するという条件を課している。それに基づいて導かれた状態の量子化関数に関する誤差条件は一般的なものであった。このため、離散近似の状態数がごく低次元のシステムにおいても非常に多くなってしまふ。今後は双模倣性の定義を工夫することでより少ない状態数の離散近似を得る方法を考えるべきであろう。

参考文献

- 1) R. Alur, T.D. Verimag and F. Ivančić: Predicate Abstractions for Reachability Analysis of Hybrid Systems, ACM Trans. on Embedded Computing Systems, **5-1**, 152/199 (2006)
- 2) P.E. Caines and Y. Wei: Hierarchical Hybrid Control Systems: A Lattice Theoretic Formulation, IEEE Trans. on Automatic Control, **43-4**, April (1998)
- 3) G. Lafferriere, G.J. Pappas and S. Sastry: Hybrid Systems with Finite Bisimulations, P. Antsaklis et al. (Eds.): Hybrid Systems V, LNCS 1567, 186/203 (1999)
- 4) J. Lunze, B. Nixdorf and J. Schroder: Deterministic Discrete-event Representations of Linear Continuous-variable Systems, Automatica, **35**, 395/406 (1999)
- 5) X.D. Koutsoukos, P.J. Antsaklis, J.A. Stiver and M.D. Lemmon: Supervisory Control of Hybrid Systems, In Proc. of IEEE, Special Issue in Hybrid Systems. P.J. Antsaklis, Ed., 1026/1049, July (2000)
- 6) J. Raisch and S.D. O'Young: Discrete Approximation and Supervisory Control of Continuous Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **43-4**, April (1998)
- 7) J. Raisch: Discrete Abstractions of Continuous Systems - an Input/Output Point of View, Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, **6-1**, 6/29 (2000)
- 8) K. Tsumura: Stabilization of Linear Systems by Bit-Memory Controllers under Constraints of Bit-Length, 45th IEEE Conference on Decision and Control, 5507/5512, San Diego, CA, USA, December (2006)
- 9) R. Milner: Communication and Concurrency, Prentice-Hall (1989)
- 10) A.J. van der Schaft: Equivalence of Dynamical Systems by Bisimulation, IEEE Transaction on Automatic Control, **49-12**, 2160/2172 (2004)
- 11) A. Girard and G.J. Pappas: Approximation metrics for discrete and continuous systems, IEEE Transactions on Automatic Control, **52-5**, 782/798 (2007)
- 12) A. Girard and G.J. Pappas: Approximate bisimulations for constrained linear systems, 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, 4700/4705, Seville, Spain, December (2005)
- 13) A. Girard: Approximately Bisimilar Finite Abstractions of Stable Linear Systems, Hybrid Systems: Computation and Control, vol 4416 in LNCS, 231/244, Springer (2007)
- 14) A. Girard and G.J. Pappas: Approximate hierarchies of linear control systems, 46th IEEE Conference on Decision and Control, 3727/3732, New Orleans, Louisiana, December (2007)
- 15) A.A. Julius, A. Girard and G.J. Pappas: Approximate bisimulation for a class of stochastic hybrid systems, in the Proc. American Control Conference, 4724/4729, Minneapolis, USA (2006)
- 16) A.A. Julius and G.J. Pappas: Approximate Equivalence and Approximate Synchronization of Metric Transition Systems, in the Proc. 45th IEEE Conf. Decision and Control, San Diego, USA (2006)
- 17) P. Tabuada: Approximate Simulation Relations and Finite Abstractions of Quantized Control Systems, Hybrid Systems: Computation and Control, vol 4416 in LNCS, 529/542, Springer (2007)
- 18) G. Pola, A. Girard and P. Tabuada: Symbolic models for nonlinear control systems using approximate bisimulation, 46th IEEE Conference on Decision and Control, 4656/4661, New Orleans, Louisiana, December (2007)
- 19) M.E. Broucke: A geometric approach to bisimulation and verification of hybrid systems, Hybrid Systems: Computation and Control, vol 1569 in LNCS, 61/75, Springer-Verlag (1999)
- 20) M.E. Broucke: Theory of Optimal Control Using Bisimulations, Hybrid Systems: Computation and Control, vol 1790 in LNCS, 89/102, Springer-Verlag (2000)
- 21) K.C. Toh, M.J. Todd and R.H. Tutuncu: SDPT3 - a MATLAB software for semidefinite-quadratic-linear programming, <http://www.math.nus.edu.sg/~mattohc/sdpt3.html>

著者紹介

田崎 勇一 (正会員)

1980年5月21日生。2008年東京工業大学大学院情報理工学研究科博士課程卒業。2007年より日本学術振興会特別研究員。2008年より Honda Research Institute Europe 客員研究員。ハイブリッドシステム論および歩行ロボットの研究に従事。博士(工学)。IEEE, システム制御情報学会, 日本ロボット学会会員。

井村 順一 (正会員)

1964年10月11日生。92年京都大学大学院工学研究科博士課程中途退学。同年京都大学工学部助手。96年広島大学工学部助教授。2001年東京工業大学大学院情報理工学研究科助教授。2004年同教授, 現在に至る。98年トエンテ大学客員研究員。非線形制御, ハイブリッドシステム論などの研究に従事。博士(工学)。IEEE, システム制御情報学会, 日本ロボット学会, 日本鉄鋼協会などの会員。