PID 型状態フィードバックによる宇宙機の非線形トラッキング制御

池田 裕一*・木田 隆**・長塩 知之**

Nonlinear Tracking Control of Spacecraft by PID-type State Feedback

Yuichi IKEDA*, Takashi KIDA** and Tomoyuki NAGASHIO**

In this paper, we consider the position and attitude (six degrees of freedom) tracking control of rigid body spacecraft by PID-type state feedback control in order to remove the position and attitude error that are caused by step disturbance. Firstly, the relative motion equation of the six degrees of freedom rigid body spacecraft is derived. Secondly, we design PID type state feedback control law so that the closed loop system of the relative motion equation is asymptotically stabilized. Then, we extend the results to PID type adaptive state feedback controller with physical parameter update law. Finally, the effectiveness of the control methods is verified by simulations.

Key Words: spacecraft, tracking control, passivity, PID-type state feedback control

1. はじめに

現在までに打ち上げられた人工衛星などの宇宙機の制御系設計は、得られた運動方程式を平衡点近傍で線形化したのち線形制御理論を用いて行なわれてきた。これは、これまでの宇宙機に課せられたミッションでは、平衡点近傍での高精度な位置・姿勢の制御が主に必要であったためである。しかし、今後の宇宙開発では、地上と宇宙プラットフォーム間での物資・機材の運搬やチェイサー衛星がターゲット衛星とドッキングするランデブー・ドッキングなど、大きな姿勢変更と位置変動をとまなうミッションが考えられている¹⁾。このような宇宙機の運動は、並進・回転の6自由度運動が互いに干渉した非線形システムであるため、非線形運動を考慮した制御系設計が必要となる。

これらのミッションの多くは、ターゲットとなる宇宙機へのトラッキング制御問題であり、高精度の位置・姿勢制御が要求されることから、環境からの外乱の影響による位置・姿勢の偏差を抑制するために、外乱抑制の指標を $\mathcal{L}_2$ ゲイン γ (> 0) 未満とする非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御や消散性理論に基づいた制御系設計に関する研究が多く報告されている^{2)~6)}。外乱の影響による相対位置・姿勢の偏差を小さくするには、 γ を小さい値に設定すればよいが、フィードバックゲインは γ に反比例

して大きくなるので、結果として制御入力が大きくなる。実際のアクチュエータには出力の限界があるため、 γ の値をあまり小さくはできない。

一方、宇宙環境における外乱は制御に要する時間幅では一定とみなせるものも多い。一定値外乱による定常偏差を除去するためには、PID 制御のように積分操作を加えればよいことが知られている⁷⁾。宇宙機のトラッキング制御においても、Backstepping⁸⁾、非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御⁹⁾や非線形 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 制御¹⁰⁾ に基づいた PID 制御手法が提案されている。しかし、文献 8) では質量と慣性行列のパラメータ誤差に対してロバストではなく、文献 9), 10) では姿勢表現が Euler 角であるため、特異点が存在し大きな姿勢変更には向いていない。また、これらの研究では、姿勢のみのトラッキング制御を考えているが、先に述べたようなミッションでは位置の制御も必要である。したがって、位置・姿勢の6自由度トラッキング制御を考えなければならないが、筆者らが知る限りでは6自由度トラッキング制御に対する PID 制御手法は提案されていない。

そこで、本稿では、宇宙機の6自由度トラッキング制御問題に対して、受動性に基づいた PID 型状態フィードバック制御法を提案する。提案する手法は、姿勢表現にクォータニオンを用いているため、特異点が存在せず大きな姿勢変更が可能であり、パラメータ誤差に対しては、パラメータ推定則を導入した適応制御に容易に拡張できる。また、適応制御においては質量の推定値が真値に収束するための条件を導出する。なお、本稿の内容は文献 6) の結果を PID 型に拡張したものとなっている。

* 釧路工業高等専門学校機械工学科 釧路市大楽毛西 2-32-1

** 電気通信大学知能機械工学科 調布市調布ヶ丘 1-5-1

* Kushiro National College of Technology, 2-32-1, Otanoshike-nishi, Kushiro

** University of Electro-Communications, 1-5-1, Chofugaoka, Chofu

(Received June 13, 2007)

(Revised November 19, 2007)

Fig. 1 The definition of the coordinate system and the position vector

2. 相対運動方程式

本論文では、宇宙機のトラッキング制御として、宇宙空間を運動している宇宙機、もしくは与えられた参照軌道（ターゲット）に別の宇宙機（チェイサー）を追従させる問題を考える。このときの座標系と位置ベクトルの定義を Fig. 1 に示す。Fig. 1 において、 $\{i\}, \{c\}, \{t\}$ はそれぞれ慣性、チェイサー、ターゲットの座標系である。なお、チェイサーの位置はターゲットに固定された目標定数ベクトル $p_t \in \mathbb{R}^3$ に一致させることを考える。また、ターゲットとチェイサーの姿勢はクォータニオンで表現する。

ターゲットとチェイサーの位置 $r_t, r_c \in \mathbb{R}^3$ 、速度 $v_t, v_c \in \mathbb{R}^3$ 、クォータニオン $q_t = [\varepsilon_t^T \eta_t^T]^T, q_c = [\varepsilon_c^T \eta_c^T]^T \in \mathbb{S}^3$ 、および角速度 $\omega_t, \omega_c \in \mathbb{R}^3$ より、 $\{c\}$ におけるターゲットに対するチェイサーの相対姿勢を表わすクォータニオン $q_e = [\varepsilon_e^T \eta_e^T]^T \in \mathbb{S}^3$ 、相対位置 $r_e \in \mathbb{R}^3$ 、相対速度 $v_e \in \mathbb{R}^3$ 、および相対角速度 $\omega_e \in \mathbb{R}^3$ は

$$\varepsilon_e = \eta_t \varepsilon_c - \eta_c \varepsilon_t + \varepsilon_c^\times \varepsilon_t, \quad \eta_e = \eta_c \eta_t + \varepsilon_c^T \varepsilon_t, \quad (1)$$

$$r_e = r_c - C r_{tp}, \quad v_e = v_c - C v_{tp}, \quad \omega_e = \omega_c - C \omega_t \quad (2)$$

のように定義される。ここで、 $r_{tp}, v_{tp} \in \mathbb{R}^3$ は $\{t\}$ に固定された目標定数ベクトル p_t の終点での位置と速度、 C は $\{t\}$ から $\{c\}$ への方向余弦行列であり

$$r_{tp} = r_t + p_t, \quad v_{tp} = v_t + \omega_t^\times p_t, \quad (3)$$

$$C = (\eta_e^2 - \varepsilon_e^T \varepsilon_e) I_3 + 2 \varepsilon_e \varepsilon_e^T - 2 \eta_e \varepsilon_e^\times \quad (4)$$

のように定義される。(1), (2) 式より、 $\{c\}$ におけるターゲットに対するチェイサーの相対運動方程式はつぎのように記述される⁶⁾。

$$\dot{r}_e = v_e - (\omega_e + C \omega_t)^\times r_e, \quad (5)$$

$$\dot{q}_e = \mathcal{E}(q_e) \omega_e, \quad \mathcal{E}(q_e) = \frac{1}{2} [(\varepsilon_e^\times + \eta_e I_3)^T - \varepsilon_e]^T, \quad (6)$$

$$m \dot{v}_e = -m [(\omega_e + C \omega_t)^\times v_e + C \dot{v}_{tp} + (C \omega_t)^\times C v_{tp}] + f + d_f, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} J \dot{\omega}_e = & -(\omega_e + C \omega_t)^\times J (\omega_e + C \omega_t) \\ & - J (C \dot{\omega}_t - \omega_e^\times C \omega_t) + \tau + d_\tau \\ & + \rho^\times (f + d_f). \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $f, \tau \in \mathbb{R}^3$ はチェイサーに作用する制御力と制御トルク、 $d_f, d_\tau \in \mathbb{R}^3$ はチェイサーに作用する外乱力と外乱トルク、 $\rho \in \mathbb{R}^3$ はアクチュエータの取り付け位置（制御力の作用点）を表わすベクトル、 $m \in \mathbb{R}, J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ はチェイサーの質量と慣性行列である。また、 $a^\times$ は $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ から生成されるつぎのような歪対称行列である。

$$a^\times = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

ここで、 $t \rightarrow \infty$ のとき $(r_e, \varepsilon_e, v_e, \omega_e) \rightarrow (0, 0, 0, 0)$ となるような制御器を見つけることができれば、 $\varepsilon_e = 0 \Rightarrow C = I_3$ および (2) 式から、トラッキング制御が達成されることがわかる。したがって、チェイサーのターゲットへのトラッキング制御問題は相対運動方程式 (5)–(8) における $(r_e, \varepsilon_e, v_e, \omega_e)$ の漸近安定化問題となる。

以降では、表記の簡単のため、制御入力と外乱をまとめて $\hat{f} = f, \hat{\tau} = \tau + \rho^\times f, \hat{d}_f = d_f, \hat{d}_\tau = d_\tau + \rho^\times d_f$ とし、 $\hat{f}, \hat{\tau}$ を用いて制御器を導出する^(注1)。

(注意) クォータニオンの拘束条件 $\|q_e\| = 1$ より、 $\varepsilon_e = 0$ のときの η_e は $\eta_e = \pm 1$ のように 2 つ存在する。本稿では、 $\eta_e = 1$ を漸近安定化することを考える。

3. PID 型状態フィードバック制御

3.1 相対運動方程式の受動化

相対運動方程式 (5)–(8) は複雑な非線形時変システムであり、このままでは制御器を設計するのは難しい。そこで、制御器の設計を容易にするために、変数変換およびフィードバック変換によって相対運動方程式を受動的なシステムに変換し、その後、制御器の設計を行なうことにする。

つぎの変数変換とフィードバック変換を考える。

$$\bar{v}_e = v_e - (C \omega_t)^\times r_e, \quad (10)$$

$$\hat{f} = \bar{f} + m \delta_r, \quad \hat{\tau} = \bar{\tau} + \delta_q \alpha. \quad (11)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \delta_r = & 2(C \omega_t)^\times \bar{v}_e + (C \omega_t)^\times (C \omega_t)^\times C r_e \\ & + (C \dot{\omega}_t)^\times r_e + C \dot{v}_{tp} + (C \omega_t)^\times C v_{tp}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \delta_q = & \delta_{q1}(\omega_e, C \omega_t) + \delta_{q1}(C \omega_t, \omega_e + C \omega_t) \\ & + \delta_{q2}(C \dot{\omega}_t - \omega_e^\times C \omega_t), \end{aligned} \quad (13)$$

(注1) $(\hat{f}, \hat{\tau})$ から (f, τ) への逆変換は必ず存在する。

$$\delta_{q1}(a, b)\alpha = a^\times Jb, \delta_{q2}(a)\alpha = Ja, \forall a, b \in \mathbb{R}^3$$

$$\alpha = [J_{11} \ J_{12} \ J_{13} \ J_{22} \ J_{23} \ J_{33}]^T,$$

$$\delta_{q1}(a, b) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3b_1 & a_2b_1 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 - a_1b_1 \\ -a_2b_1 & a_1b_1 - a_2b_2 & -a_2b_3 \\ -a_3b_2 & a_2b_2 - a_3b_3 & a_2b_3 \\ 0 & -a_1b_2 & -a_1b_3 \\ a_1b_2 & a_1b_3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\delta_{q2}(a) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & a_2 & a_3 \end{bmatrix},$$

J_{ij} ($i \leq j$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$) は慣性行列 J の (i, j) 要素, $\bar{f}, \bar{\tau} \in \mathbb{R}^3$ は新しい入力である. なお, δ_r は $(r_e, \bar{v}_e, q_e, v_{tp}, \dot{v}_{tp}, \omega_t, \dot{\omega}_t, t)$ の関数, δ_q は $(q_e, \omega_e, \omega_t, \dot{\omega}_t, t)$ の関数であるが, 表記の簡単のため省略する. (10), (11) 式により, 相対運動方程式はつぎのシステムに変換される.

$$\dot{r}_e = \bar{v}_e - \omega_e^\times r_e, \quad (14)$$

$$\dot{q}_e = \mathcal{E}(q_e)\omega_e, \quad (15)$$

$$m\dot{\bar{v}}_e = -m\omega_e^\times \bar{v}_e + \bar{f} + \hat{d}_f, \quad (16)$$

$$J\dot{\omega}_e = -\omega_e^\times J\omega_e + \bar{\tau} + \hat{d}_\tau. \quad (17)$$

ここで, $t \rightarrow \infty$ のとき $(r_e, \varepsilon_e, \bar{v}_e, \omega_e) \rightarrow (0, 0, 0, 0)$ となる制御器を見つけることができれば, (10) 式より $\bar{v}_e = 0 \Rightarrow v_e = 0$ となることから, トラッキング制御が達成できることがわかる. したがって, チェイサーのターゲットへのトラッキング制御問題は変換したシステム (14)–(17) における $(r_e, \varepsilon_e, \bar{v}_e, \omega_e)$ の漸近安定化問題となる.

最後に, (14)–(17) 式が受動的であることを示す. ただし, $\hat{d}_f = \hat{d}_\tau = 0$ とする. 蓄積関数として

$$E = \frac{1}{2}m\|\bar{v}_e\|^2 + \frac{1}{2}\omega_e^T J\omega_e \quad (18)$$

を考える. 歪対称行列の性質 $a^T b^\times a = 0, a^T a^\times = 0, \forall a, b \in \mathbb{R}^3$ を用いると, システム (14)–(17) の解軌道に沿った (18) 式の時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \bar{v}_e^T (-m\omega_e^\times \bar{v}_e + \bar{f}) + \omega_e^T (-\omega_e^\times J\omega_e + \bar{\tau}) \\ &= \bar{v}_e^T \bar{f} + \omega_e^T \bar{\tau} \\ &= \bar{y}^T \bar{u}, \quad \bar{y} = [\bar{v}_e^T \ \omega_e^T]^T, \quad \bar{u} = [\bar{f}^T \ \bar{\tau}^T]^T \end{aligned} \quad (19)$$

となる. したがって, システム (14)–(17) は入力 $\bar{u}$ と出力 $\bar{y}$ に関して受動的である.

3.2 制御器設計

ここでは, 相対位置・姿勢を漸近安定化する PID 型状態

フィードバック制御則を (14)–(17) 式を受動性に基づいて設計する. ここで, つぎを仮定する.

[仮定]

ターゲットの状態 $v_t, \dot{v}_t, \omega_t, \dot{\omega}_t$ は何らかの手法で観測可能であり, 一様有界かつ観測ノイズは加わらない.

このとき, つぎの結果を得る.

《定理1》 $\hat{d}_f = \hat{d}_\tau = 0$ のとき, システム (14)–(17) に対して, つぎの PID 型状態フィードバック制御器

$$\begin{cases} \bar{f} = -\frac{1}{a_2}[k_{p1}r_e + K_{d1}\bar{v}_e] - k_{i1}\xi_1 \\ \xi_1 = \int_0^t \left(r_e + \frac{a_2}{a_1}\omega_e^\times r_e \right) dt \end{cases}, \quad (20)$$

$$\begin{cases} \bar{\tau} = -\frac{1}{b_2}[\mathcal{K}(q_e)\varepsilon_e + K_{d2}\omega_e] - k_{i2}\xi_2 \\ \xi_2 = \int_0^t \left(\varepsilon_e + \frac{b_2}{2b_1}[2I_3 - \mathcal{T}(q_e)]\omega_e \right) dt \end{cases}, \quad (21)$$

のスカラフィードバックゲイン $k_{p1}, k_{p3}, k_{i1}, k_{i2}$ と正定対称な行列フィードバックゲイン $K_{p2}, K_{d1}, K_{d2} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ が条件

$$P > 0, 2k_{p3}I_3 > K_{p2} > k_{p3}I_3, Q > 0 \quad (22)$$

を満たすとき, (14)–(17), (20), (21) 式からなる閉ループ系において, 任意の初期値に対して, $t \rightarrow \infty$ のとき $(r_e, \varepsilon_e, \bar{v}_e, \omega_e, \xi_1, \xi_2) \rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ となる. ただし, $a_i, b_i > 0$ ($i = 1, 2$) は設計パラメータ,

$$\mathcal{K}(q_e) = \mathcal{T}^T(q_e)K_{p2} - k_{p3}(\eta_e - 1)I_3,$$

$$\mathcal{T}(q_e) = \eta_e I_3 + \varepsilon_e^\times,$$

$$P = \text{diag}\{P_1, P_2\}, Q = \text{diag}\{Q_1, Q_2\},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} k_{p1}I_3 & a_1mI_3 & a_2k_{i1}I_3 \\ * & a_2mI_3 & 0 \\ * & * & a_1k_{i1}I_3 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2K_{p2} & b_1J & b_2k_{i2}I_3 \\ * & b_2J & 0 \\ * & * & b_1k_{i2}I_3 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ * & Q_{13} \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} Q_{21} & Q_{22} \\ * & Q_{23} \end{bmatrix},$$

$$Q_{11} = \frac{a_1}{a_2}k_{p1}I_3 - a_2k_{i1}I_3,$$

$$Q_{12} = \frac{a_1}{2a_2}K_{d1},$$

$$Q_{13} = K_{d1} - a_1mI_3,$$

$$Q_{21} = \frac{b_1}{b_2}(2k_{p3}I_3 - K_{p2}) - \left(b_2 + \frac{b_2^2}{4b_1}\right)k_{i2}I_3,$$

$$Q_{22} = \frac{b_1}{2b_2}K_{d2} - \frac{b_2^2}{8b_1}k_{i2}I_3,$$

$$Q_{23} = K_{d2} - \frac{3}{2}b_1\lambda_J I_3 - \frac{b_2^2}{16b_1}k_{i2}I_3,$$

$$\lambda_J = \|J\|$$

である。□

(証明) いま, (14)-(17) 式に対する Lyapunov 関数の候補として

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \frac{1}{2} \nu^T \mathcal{P} \nu + k_{p3}(\eta_e - 1)^2 \\ \nu &= [r_e^T \ \bar{v}_e^T \ \xi_1^T \ \varepsilon_e^T \ \omega_e^T \ \xi_2^T]^T \end{aligned} \quad (23)$$

を考える。\$\mathcal{V}_1 > 0\$ であるためには、\$\mathcal{P} > 0\$ でなければならない。つまり、(22) 式の第 1 式を満たせば \$\mathcal{V}_1 > 0\$ となる。閉ループ系の解軌道に沿った (23) 式の時間微分は、先ほどの歪対称行列の性質、および \$\|T(q_e)\| = 1, \|\varepsilon_e\| \leq 1, \|\omega_e^\times\| = \|\omega_e\|\$ を用いて整理すると

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_1 &\leq -\left(\frac{a_1}{a_2} k_{p1} - a_2 k_{i1}\right) \|r_e\|^2 - \frac{a_1}{a_2} r_e^T K_{d1} \bar{v}_e \\ &\quad - \bar{v}_e^T (K_{d1} - a_1 m I_3) \bar{v}_e \\ &\quad - \varepsilon_e^T \left(\frac{b_1}{b_2} K(q_e) - b_2 k_{i2} I_3 \right) \varepsilon_e \\ &\quad - \varepsilon_e^T \left[\frac{b_1}{b_2} K_{d2} + \frac{b_2^2}{2b_1} k_{i2} \left(\frac{\eta_e}{2} - 1 \right) I_3 \right] \omega_e \\ &\quad - \omega_e^T \left(K_{d2} - \frac{3}{2} b_1 \lambda_J I_3 \right) \omega_e \end{aligned} \quad (24)$$

となる。ここで、\$-\varepsilon_e^T K(q_e) \varepsilon_e\$ の項について考える。歪対称行列の性質より、

$$\varepsilon_e^T T^T(q_e) = \varepsilon_e^T (\eta_e I_3 - \varepsilon_e^\times) = \varepsilon_e^T \eta_e \quad (25)$$

であるので、\$\varepsilon_e^T K(q_e) \varepsilon_e\$ は

$$\begin{aligned} -\varepsilon_e^T K(q_e) \varepsilon_e &= -\varepsilon_e^T [T^T(q_e) K_{p2} - k_{p3}(\eta_e - 1) I_3] \varepsilon_e \\ &= -\varepsilon_e^T [\eta_e K_{p2} - k_{p3}(\eta_e - 1) I_3] \varepsilon_e \\ &= -\varepsilon_e^T [\eta_e (K_{p2} - k_{p3} I_3) + k_{p3} I_3] \varepsilon_e \\ &= -\varepsilon_e^T \mathcal{G}(\eta_e) \varepsilon_e \end{aligned} \quad (26)$$

となる。\$\dot{\mathcal{V}}_1 \leq 0\$ となるには \$-\varepsilon_e^T \mathcal{G}(\eta_e) \varepsilon_e < 0, \forall \eta_e\$ であること、すなわち、\$\mathcal{G}(\eta_e) > 0, \forall \eta_e\$ でなくてはならない。\$\mathcal{G}(\eta_e)\$ を \$\eta_e\$ の領域ごとに記述すると

$$\mathcal{G}(\eta_e) = \begin{cases} \eta_e (K_{p2} - k_{p3} I_3) + k_{p3} I_3, & 1 \geq \eta_e > 0 \\ k_{p3} I_3, & \eta_e = 0 \\ -|\eta_e| (K_{p2} - k_{p3} I_3) + k_{p3} I_3, & 0 > \eta_e \geq -1 \end{cases}$$

である。この式から \$2k_{p3} I_3 > K_{p2} > k_{p3} I_3\$ であれば、すなわち、(22) 式の第 2 式を満たせば、\$\mathcal{G}(\eta_e) > 0, \forall \eta_e\$ となる。さらに、\$\mathcal{G}(\eta_e)\$ の最小値は

$$\min_{\eta_e} \mathcal{G}(\eta_e) = \mathcal{G}(-1) = 2k_{p3} I_3 - K_{p2} \quad (27)$$

であることがわかる。したがって、

$$-\varepsilon_e^T \mathcal{G}(\eta_e) \varepsilon_e \leq -\varepsilon_e^T (2k_{p3} I_3 - K_{p2}) \varepsilon_e \quad (28)$$

となることから、(24) 式は

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_1 &\leq -\left(\frac{a_1}{a_2} k_{p1} - a_2 k_{i1}\right) \|r_e\|^2 - \frac{a_1}{a_2} r_e^T K_{d1} \bar{v}_e \\ &\quad - \bar{v}_e^T (K_{d1} - a_1 m I_3) \bar{v}_e \\ &\quad - \varepsilon_e^T \left[\frac{b_1}{b_2} (2k_{p3} I_3 - K_{p2}) - b_2 k_{i2} I_3 \right] \varepsilon_e \\ &\quad - \varepsilon_e^T \left[\frac{b_1}{b_2} K_{d2} + \frac{b_2^2}{2b_1} k_{i2} \left(\frac{\eta_e}{2} - 1 \right) I_3 \right] \omega_e \\ &\quad - \omega_e^T \left(K_{d2} - \frac{3}{2} b_1 \lambda_J I_3 \right) \omega_e \end{aligned} \quad (29)$$

となる。さらに、(29) 式の第 5 項の

$$-\frac{b_2^2}{2b_1} k_{i2} \left(\frac{\eta_e}{2} - 1 \right) \varepsilon_e^T \omega_e$$

に対して

$$\begin{aligned} -a^T b &= -\|a + \frac{1}{2} b\|^2 + \|a\|^2 + \frac{1}{4} \|b\|^2 \\ &\leq \|a\|^2 + \frac{1}{4} \|b\|^2 \end{aligned} \quad (30)$$

の関係式、および \$|\eta_e| \leq 1\$ であることを用いると、(29) 式は

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_1 &\leq -\left(\frac{a_1}{a_2} k_{p1} - a_2 k_{i1}\right) \|r_e\|^2 - \frac{a_1}{a_2} r_e^T K_{d1} \bar{v}_e \\ &\quad - \bar{v}_e^T (K_{d1} - a_1 m I_3) \bar{v}_e \\ &\quad - \varepsilon_e^T \left\{ \frac{b_1}{b_2} (2k_{p3} I_3 - K_{p2}) \right. \\ &\quad \quad \left. - \left[b_2 + \frac{b_2^2}{2b_1} \left(\frac{\eta_e}{2} - 1 \right) \right] k_{i2} I_3 \right\} \varepsilon_e \\ &\quad - \frac{b_1}{b_2} \varepsilon_e^T K_{d2} \omega_e \\ &\quad - \omega_e^T \left[K_{d2} - \frac{3}{2} b_1 \lambda_J I_3 - \frac{b_2^2}{8b_1} \left(\frac{\eta_e}{2} - 1 \right) k_{i2} I_3 \right] \omega_e \\ &\leq -\left(\frac{a_1}{a_2} k_{p1} - a_2 k_{i1}\right) \|r_e\|^2 - \frac{a_1}{a_2} r_e^T K_{d1} \bar{v}_e \\ &\quad - \bar{v}_e^T (K_{d1} - a_1 m I_3) \bar{v}_e \\ &\quad - \varepsilon_e^T \left[\frac{b_1}{b_2} (2k_{p3} I_3 - K_{p2}) - \left(b_2 + \frac{b_2^2}{4b_1} \right) k_{i2} I_3 \right] \varepsilon_e \\ &\quad - \frac{b_1}{b_2} \varepsilon_e^T K_{d2} \omega_e \\ &\quad - \omega_e^T \left(K_{d2} - \frac{3}{2} b_1 \lambda_J I_3 - \frac{b_2^2}{16b_1} k_{i2} I_3 \right) \omega_e \\ &= -\chi^T \mathcal{Q} \chi, \quad \chi = [r_e^T \ \bar{v}_e^T \ \varepsilon_e^T \ \omega_e^T]^T \end{aligned} \quad (31)$$

となり、\$\dot{\mathcal{V}}_1 \leq 0\$ であるためには、\$\mathcal{Q} > 0\$ でなければならない。つまり、(22) 式の第 3 式を満たせば \$\dot{\mathcal{V}}_1 \leq 0\$ となる。したがって、(22) 式を満たせば \$\mathcal{V}_1 > 0\$ かつ \$\dot{\mathcal{V}}_1 \leq 0\$ となる。これより、

$$\mathcal{V}_1(z(t)) \leq \mathcal{V}_1(z(0)), \quad \forall t \geq 0, \quad z = [\nu^T \ \eta_e]^T \quad (32)$$

となり、\$\mathcal{V}_1\$ は状態空間 \$\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^{15}\$ において半径方向に非有界であるので \$z\$ は有界である。また、仮定のターゲットの状態の一樣有界性の仮定から制御入力 (20), (21) は有界であるので、\$z\$ も有界である。このことから、

$$\ddot{\mathcal{V}}_1 = -2\chi^T \mathcal{Q}\dot{\chi}^T \quad (33)$$

は有界であり、 $\dot{\mathcal{V}}_1$ が t に関して一様連続であることがわかる。さらに、 $\mathcal{V}_1 \geq 0$ から $\mathcal{V}_1$ は下に有界である。したがって、Lyapunov-Like Lemma¹¹⁾から $\dot{\mathcal{V}}_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \chi \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) であり、 $\mathcal{V}_1 = 0$ から $\eta_e = 1$ となる。以上から、任意の初期値に対して $t \rightarrow \infty$ のとき $(r_e, \varepsilon_e, \bar{v}_e, \omega_e, \xi_1, \xi_2) \rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ となる。■

ここで、制御則 (20), (21) における積分操作により、一定値外乱による相対位置・姿勢の偏差が除去できることを示す⁷⁾。ただし、積分変数 ξ_i ($i = 1, 2$) が非線形であるため、平衡点近傍での振る舞いを考える。よって、 $\bar{v}_e \approx 0, \omega_e \approx 0$ とする。平衡点近傍での閉ループ系は、 $\mathcal{K}(q_e)$ と積分変数が

$$\mathcal{K}(q_e) \approx K_{p2}, \quad \xi_1 \approx \int_0^t r_e dt, \quad \xi_2 \approx \int_0^t \varepsilon_e dt \quad (34)$$

であることから

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2} k_{p1} r_e + k_{i1} \int_0^t r_e dt - \hat{d}_f &= 0, \\ \frac{1}{b_2} K_{p2} \varepsilon_e + k_{i2} \int_0^t \varepsilon_e dt - \hat{d}_\tau &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} e_1 &= \left(\int_0^t r_e dt - \frac{\hat{d}_f}{k_{i1}} \right), \\ e_2 &= \left(\int_0^t \varepsilon_e dt - \frac{\hat{d}_\tau}{k_{i2}} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

とすれば、(35) 式は

$$\dot{e}_1 = -\frac{a_2 k_{i1}}{k_{p1}} e_1, \quad \dot{e}_2 = -b_2 k_{i2} K_{p2}^{-1} e_1 \quad (37)$$

と変形できる。 $a_2, b_2, k_{p1}, k_{i1}, k_{i2} > 0, K_{p2} = K_{p2}^T > 0$ であることから、 $t \rightarrow \infty$ のとき $e_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2$) であり、相対位置・姿勢の偏差が除去できていることがわかる。

(注意) フィードバックゲインの設計条件 (22) は、フィードバックゲインを変数とする線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality: LMI) とみなせる。したがって、フィードバックゲインを内点法などにより、効率よく求めることができる。

4. 適応制御への拡張

前章では、変数変換とフィードバック変換により相対運動方程式 (5)-(8) を受動的なシステムに変換し、そのシステムに基づいて制御則を設計した。しかし、受動的なシステムに変換する際に、非線形項を消去するために質量 m と慣性行列 J の値が必要となり、物理パラメータ誤差がある場合には、(20), (21) 式により相対誤差を漸近安定化することはできない。

そこで、本節では、 m と J の値を推定するパラメータ推定則を用いた適応制御器の設計について述べる。このとき、フィードバック変換 (11) は質量 m と慣性行列の値 α をノミナル値 m_0, α_0 に置き換えた

$$\hat{f} = \bar{f} + m_0 \delta_r, \quad \hat{\tau} = \bar{\tau} + \delta_q \alpha_0 \quad (38)$$

となり、相対運動方程式は上式と変数変換 (10) により、つぎのシステムに変換される。

$$\dot{r}_e = \bar{v}_e - \omega_e^\times r_e, \quad (39)$$

$$\dot{q}_e = \mathcal{E}(q_e) \omega_e, \quad (40)$$

$$m \dot{\bar{v}}_e = -m \omega_e^\times \bar{v}_e - \delta_r \Delta m + \bar{f} + \bar{d}_f, \quad (41)$$

$$J \dot{\omega}_e = -\omega_e^\times J \omega_e - \delta_q \Delta \alpha + \bar{\tau} + \bar{d}_\tau. \quad (42)$$

ただし、 $\Delta m = m - m_0, \Delta \alpha = \alpha - \alpha_0$ である。相対位置・姿勢を漸近安定化する適応制御器を上式に基づいて設計する。このとき、以下の結果を得る。

《定理 2》 $\hat{d}_f = \hat{d}_\tau = 0$ のとき、システム (39)-(42) に対して、つぎの PID 型適応状態フィードバック制御器

$$\begin{cases} \bar{f} = -\frac{1}{a_2} [k_{p1} r_e + K_{d1} \bar{v}_e] - k_{i1} \xi_1 + \delta_r \hat{m} \\ \xi_1 = \int_0^t \left(r_e + \frac{a_2}{a_1} \omega_e^\times r_e \right) dt \\ \dot{\hat{m}} = -\Gamma_r \delta_r^T (a_1 r_e + a_2 \bar{v}_e) \end{cases}, \quad (43)$$

$$\begin{cases} \bar{\tau} = -\frac{1}{b_2} [\mathcal{K}(q_e) \varepsilon_e + K_{d2} \omega_e] - k_{i2} \xi_2 + \delta_q \hat{\alpha} \\ \xi_2 = \int_0^t \left(\varepsilon_e + \frac{b_2}{2b_1} [2I_3 - T(q_e)] \omega_e \right) dt \\ \dot{\hat{\alpha}} = -\Gamma_q \delta_q^T (b_1 \varepsilon_e + b_2 \omega_e) \end{cases}, \quad (44)$$

のフィードバックゲインが (22) 式を満たすとき、(39)-(44) 式からなる閉ループ系において、任意の初期値に対して $t \rightarrow \infty$ のとき $(r_e, \varepsilon_e, \bar{v}_e, \omega_e, \xi_1, \xi_2, \hat{m}, \hat{\alpha}) \rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0, c_1, c_2)$ となる ($c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}^6$ は初期条件により決まる定数、および定数ベクトル)。ただし、 $\hat{m} \in \mathbb{R}, \hat{\alpha} \in \mathbb{R}^6$ は m, α の推定値、 $\Gamma_r > 0, \Gamma_q = \Gamma_q^T > 0$ は適応ゲインである。□

(証明) つぎの Lyapunov 関数

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 + \frac{1}{2} \Gamma_1^{-1} \tilde{m}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\alpha}^T \Gamma_2^{-1} \tilde{\alpha} \quad (45)$$

を用いること以外は定理 1 と同様。ただし、 $\tilde{m} = \Delta m - \hat{m}, \tilde{\alpha} = \Delta \alpha - \hat{\alpha}$ である。■

さらに、質量の推定パラメータの真値への収束性については、つぎの命題が成り立つ。

[命題] ベクトル

$$\zeta = \dot{v}_{tp} + \omega_t^\times v_{tp} \quad (46)$$

がつぎの条件

$$\|\zeta\| \neq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (47)$$

を満たすならば、質量の推定値 $\hat{m}$ は真値 Δm に収束する、すなわち $\hat{m} \rightarrow \Delta m$ ($t \rightarrow \infty$) となる。□

(証明) 定理 2 より、推定値の真値への収束性にかかわらず $(r_e, \varepsilon_e, \bar{v}_e, \omega_e, \xi_1, \xi_2) \rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0), \mathcal{C} \rightarrow I_3$ ($t \rightarrow \infty$)

となることから, (12) 式の作用素 δ_r は

$$\delta_r = \dot{v}_{tp} + \omega_t^\times v_{tp} := \zeta \quad (48)$$

となる. このときの並進運動に関する閉ループ系は

$$\tilde{m}\zeta = 0 \quad (49)$$

であるから, 明らかに, (47) 式が満たされれば $\tilde{m} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), すなわち $\tilde{m} \rightarrow \Delta m$ ($t \rightarrow \infty$) となることがわかる. ■
ここで, 条件 (47) は (46) 式より, ターゲット座標系に固定した目標定数ベクトル p_t の終点の加速度が任意の時刻において非零であることを意味している.

また, 慣性行列の推定値 $\hat{\alpha}$ に関しては, 適応姿勢追従制御に関する Ahmed ら¹²⁾の Proposition 2 (付録を参照) を満たせば真値に収束する. これは, 上の命題と同様に, 推定値の真値への収束性にかかわらず ($r_e, \varepsilon_e, \bar{v}_e, \omega_e, \xi_1, \xi_2$) $\rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\mathcal{C} \rightarrow I_3$ ($t \rightarrow \infty$) となるので, 作用素 δ_q が

$$\begin{aligned} \delta_q &= \delta_{q1}(\omega_t, \omega_t) + \delta_{q2}(\dot{\omega}_t) \\ &= \omega_t^\times \delta_{q2}(\omega_t) + \delta_{q2}(\dot{\omega}_t) \end{aligned} \quad (50)$$

となることと, このときの回転運動に関する閉ループ系

$$\delta_q \tilde{\alpha} = 0 \quad (51)$$

から明らかである (注 2).

5. 数値シミュレーション

ここでは, 適応制御器 (43), (44) によるシミュレーションを行なう. ターゲットとして, 角速度

$$\omega_t = [A_1 \sin(\frac{2\pi}{T_1} t) \ A_2 \sin(\frac{2\pi}{T_2} t) \ A_3 \sin(\frac{2\pi}{T_3} t)]^T [\text{rad/s}],$$

$$T_1 = 50 [\text{s}], \ T_2 = 60 [\text{s}], \ T_3 = 70 [\text{s}],$$

$$A_1 = \frac{160\pi^2}{180T_1} [-], \ A_2 = \frac{160\pi^2}{180T_2} [-], \ A_3 = \frac{160\pi^2}{180T_3} [-]$$

で運動している人工衛星を考える. なお, この ω_t は Ahmed らの Proposition 2 を満たすように決定した. チェイサーの目標点ベクトル p_t を $p_t = [0 \ 5 \ 0]^T [\text{m}]$, チェイサーに加わる力の作用点を $\rho = [0 \ 0 \ 0]^T$, チェイサーの質量と慣性行列のノミナル値を

$$m_0 = 200 [\text{kg}],$$

$$J_0 = \begin{bmatrix} 75.0000 & -28.1250 & -28.1250 \\ -28.1250 & 75.0000 & -28.1250 \\ -28.1250 & -28.1250 & 75.0000 \end{bmatrix} [\text{kgm}^2],$$

その誤差をつぎのような乗法的誤差

$$m = m_0(1 + \Delta_m) [\text{kg}], \ J = J_0(1 + \Delta_J) [\text{kgm}^2]$$

(注 2) 付録での作用素 L と本稿で定義した作用素 δ_{q2} は異なるが, α の要素の順序を付録と同じにすれば, 同一の作用素になる.

とする. シミュレーションでは, $\Delta_m = \Delta_J = 0.3$ (30 パーセントの誤差) とした. フィードバックゲインは設計パラメータを $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $b_1 = 1$, $b_2 = 10$ とし, Matlab の LMI Toolbox¹³⁾を用いて求めた. なお, 相対誤差が振動的にならず, かつ積分ゲインが小さくなりすぎるのを防ぐために, 以下の条件を (22) 式に加えた.

$$k_{p1}I_3 > 3K_{d1}, \ K_{d2} > 3K_{p2}, \ K_{d2} > 3k_{p3}I_3,$$

$$k_{i1} > 0.3, \ k_{i2} > 0.5.$$

また, 適応ゲインを $\Gamma_r = 20$, $\Gamma_q = 600I_6$ とした.

ターゲット, チェイサー, および推定値の初期値を

$$r_t(0) = [3 \ 3 \ 3]^T [\text{m}], \ q_t(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T [-],$$

$$v_t(0) = [0 \ 0 \ 0]^T [\text{m/s}], \ r_c(0) = [10 \ 10 \ 10]^T [\text{m}],$$

$$q_c(0) = [0.0607 \ 0.6937 \ 0.0607 \ 0.7151]^T [-],$$

$$v_c(0) = [0 \ 0 \ 0]^T [\text{m/s}], \ \omega_c(0) = [0 \ 0 \ 0]^T [\text{rad/s}]$$

$$\hat{m}(0) = 20 [\text{kg}], \ \hat{\alpha}(0) = [10 \ 1 \ 1 \ 10 \ 1 \ 10]^T [\text{kgm}^2]$$

とし, チェイサーに一定値外乱

$$d_f = [3 \ 3 \ 3]^T [\text{N}], \ d_r = [3 \ 3 \ 3]^T [\text{Nm}]$$

を加えたときのシミュレーション結果を Fig. 2~Fig. 5 に示す. Fig. 2~Fig. 5 はそれぞれ, 相対位置 r_e , 相対姿勢を表すクォータニオン q_e , 質量の推定誤差 $\tilde{m}$, 慣性行列の推定誤差 $\tilde{\alpha}$ の時間応答である. Fig. 2~Fig. 5 から物理パラメータ誤差, および一定値外乱が加わっても積分操作により定常偏差が除去され, チェイサーがターゲットに追従しており, 質量と慣性行列の推定値 $\hat{m}, \hat{\alpha}$ が真値に収束していることがわかる. $\hat{\alpha}$ に関しては, 先に述べたように, Ahmed らの Proposition 2 を満たすように ω_t を決定したためである. $\hat{m}$ に関しては, Fig. 6 に作用素 δ_r のノルムの時間応答を示すが, これからわかるように推定値の収束性に関する命題の条件を満たしているためである.

6. おわりに

本稿では, 宇宙機の 6 自由度トラッキング制御問題を考え, 受動性に基づいた PID 型状態フィードバック制御法を提案した. 提案した手法は, 姿勢表現にクォータニオンを用いているため, 特異点が存在せず大きな姿勢変更が可能であり, パラメータ誤差に対しては, パラメータ推定則を導入することで対応できる. また, 適応制御においては質量の推定値が真値に収束するための条件を導出した. 今後の課題としては, 安定化条件の保守性の緩和, チェイサーとターゲットの衝突回避があげられる.

参考文献

- 1) 茂原, 木田: 宇宙工学入門 II, 培風館 (1998)
- 2) M. Dalsmo and O. Egeland: Tracking of Rigid Body Motion via Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control, 13th IFAC Triennial

Fig. 2 Time response of relative position r_e Fig. 3 Time response of relative quaternion q_e Fig. 4 Time response of estimate error $\tilde{m}$ Fig. 5 Time response of estimate error $\tilde{\alpha}$ Fig. 6 Time response of norm of δ_r

- World Congress, San Francisco, 395/400 (1996)
- 3) M. Dalsmo and O. Egeland: State Feedback $\mathcal{H}_\infty$ Control of a Rigid Spacecraft, *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, **42**-8, 1186/1189 (1997)
 - 4) 青砥, 木田: 厳密な線形化を用いた非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の宇宙機への応用, 第29回制御理論シンポジウム資料, 139/142 (2000)

- 5) W. Luo, Y.C. Chu and K.V. Yang: $\mathcal{H}_\infty$ Tracking Control of a Rigid Body Spacecraft, *American Control Conference*, 2681/2686 (2004)
- 6) 池田, 木田, 長塩: 宇宙機の非線形 $\mathcal{H}_\infty$ トラッキング制御, 第5回制御部門大会資料, 841/844 (2005)
- 7) 川村貞夫: 図解 ロボット制御入門, 96/99, オーム社 (1995)
- 8) B. Xi, G. Yi and B. Shen: Attitude Tracking Control Using Recursive Passivation Technique, *1st International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics*, 404/407 (2006)
- 9) L. Show, J. Juang, C. Lin and Y. Jan: Spacecraft Robust Attitude Tracking Design: PID Control Approach, *American Control Conference*, 1360/1365 (2002)
- 10) H. Uang and C. Lien: Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ PID tracking control design for uncertain spacecraft systems using a cerebellar model articulation controller, *IEEE Proceedings Control Theory and Applications*, **153**-1, 1/13 (2006)
- 11) J.E. Slotine and W. Li: Applied Nonlinear Control, 127, Prentice Hall (1991)
- 12) J. Ahmed, V.T. Coppola and D.S. Bernstein: Adaptive Asymptotic Tracking of Spacecraft Attitude Motion with Inertia Matrix Identification, *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **21**-5, 684/691 (1998)
- 13) P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub and M. Chilali: LMI Control Tool Box, The Math Works Inc. (1996)

《付 録》

A. Ahmed らの Proposition

Ahmed らの適応姿勢追従制御則はつぎのように与えられる.

$$\begin{cases} u = -(F + G)\hat{\alpha} - (K_2 K_1 + I_3)\varepsilon_e - K_2 \omega_e \\ \dot{\hat{\alpha}} = Q^{-1}(F + G)^T(\omega_e + \varepsilon_e) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

ここで, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ はフィードバックゲイン, $Q \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ は適応ゲインであり正定対称,

$$F = -(\omega_e + C\omega_t)^\times L(\omega_e + C\omega_t)$$

$$+ L(\omega_e^\times C\omega_t - C\dot{\omega}_t),$$

$$G = -\frac{1}{2}L(K_1(\varepsilon^\times \omega_e + \eta_e \omega_e)),$$

$$\alpha = [J_{11} \ J_{22} \ J_{33} \ J_{23} \ J_{13} \ J_{12}]^T,$$

$$L(a) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 \\ 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T, \quad Ja = L(a)\alpha$$

である. また, $\omega_t, \dot{\omega}_t$ は有界であるとする. このとき, 推定値 $\hat{\alpha}$ が真値 α に収束するための条件は, つぎのように与えられる.

[命題] ω_t は周期的であるとする. さらに, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ に対して

$$\text{rank} \begin{bmatrix} W(t_1) \\ \vdots \\ W(t_n) \end{bmatrix} = 6 \quad (\text{A.2})$$

を満たすと仮定する. このとき, $\hat{\alpha} \rightarrow \alpha$ となる. ただし,

$$W(t) = L(\omega_t(t)) + \omega_t(t)^\times L(\omega_t(t)) \quad (\text{A.3})$$

である. $\square$

[著 者 紹 介]

池 田 裕 一 (正会員)

2006 年電気通信大学大学院電気通信学研究科機械制御工学専攻博士後期課程修了. 同年釧路工業高等専門学校機械工学科助手, 2007 年同助教, 現在に至る. 博士 (工学).

木 田 隆 (正会員)

1973 年東京大学工学部計数工学科卒業. 同年航空宇宙技術研究所入所. 96 年電気通信大学教授, 現在に至る. 制御工学と宇宙工学の研究に従事. 博士 (工学).

長 塩 知 之 (正会員)

2001 年電気通信大学大学院電気通信学研究科機械制御工学専攻博士後期課程修了. 同年同大学知能機械工学科助手, 2007 年同助教, 現在に至る. ロバスト制御の研究に従事. 博士 (工学).