時変むだ時間をもつ離散時間システムの H_∞ 外乱抑制

米 山 淳*

H_∞ Disturbance Attenuation for Discrete-time Systems with Time Varying Delays

Jun YONEYAMA*

This paper discusses H_∞ disturbance attenuation for a class of discrete-time systems with time varying delays. We develop a less conservative condition that guarantees the H_∞ disturbance attenuation for such a system.

Key Words: delay systems, discrete-time systems, H_∞ disturbance attenuation, delay-dependent conditions

1. はじめに

本論文では、時変むだ時間をもつ離散時間システムに対する H_∞ 外乱抑制問題を扱う。むだ時間が時変の場合には、むだ時間のない離散時間システムに変換し H_∞ 外乱抑制問題を議論することは困難である。よって、本論文では、 H_∞ 外乱抑制を達成する十分条件を導出するために、十分条件の保守性を軽減することが知られている Lyapunov-Krasovskii 型の関数を用いる^{1), 2), 4), 8)}。さらに、システムに対する一般化モデル変換法と冗長な重み行列を加えた方法を用いて、さらなる保守性の軽減化を行なう。また、適当な長さの状態変数を定義すると、離散時間むだ時間システムはむだ時間をもつ拡大システムに変換できる。この拡大システムに対し、上記の方法を適用することでさらなる保守性が軽減できる。

2. 離散むだ時間システム

つぎの離散むだ時間システムを考える。

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + A_d x(k-h) \\ &\quad + B_1 w(k) \\ x(\theta) &= 0, -h \leq \theta \leq 0 \\ z(k) &= C_1 x(k) + C_d x(k-h) \\ &\quad + D_{11} w(k) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $h > 0$ は未知の時変むだ時間、 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ は状態、 $w(k) \in \mathbb{R}^q$ は外乱、 $z(k) \in \mathbb{R}^p$ は被制御量であり、 $A, A_d, B_1, C_1, C_d, D_{11}$ は適当な次元をもつ定数行列である。むだ時間 h は $h_0 - \delta_1 \leq h \leq h_0 + \delta_2$ を満足するとする。ここで、 h_0, δ_1, δ_2 は $0 \leq \delta_1 \leq h_0, \delta_1 \leq \delta_2$ を満たす既知の正の整数である。さらに、ある定数 $\gamma > 0$ に対し、つぎのような評価関数を定義する。

$$J(w) = \sum_{k=1}^{\infty} [z^T(k)z(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k)]$$

システム (1) が安定で、すべての $w(k) \neq 0$ に対し $J(w) < 0$

となるとき、システムは外乱抑制度 γ をもつ H_∞ 外乱抑制を達成するという。

$$e(k) = x(k+1) - x(k) \quad (2)$$

と定義すると、以下に示すモデル変換の式を得る。

$$x(k-h_0) = x(k) - \sum_{i=k-h_0}^{k-1} e(i) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x(k-h) &= x(k-h_0) + E(k) \\ E(k) &= \begin{cases} -\sum_{i=k-h}^{k-h_0-1} e(i) & \text{if } h_0 < h \\ \sum_{i=k-h_0}^{k-h-1} e(i) & \text{if } h < h_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

(2) 式より、システム (1) は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{A}x(k) - e(k) \\ &\quad - A_d \sum_{i=k-h}^{k-1} e(i) + B_1 w(k) \\ z(k) &= C_1 x(k) + C_d x(k-h) + D_{11} w(k) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $\bar{A} = A + A_d - I$ である。

3. H_∞ 外乱抑制

この章は、システム (1) に対する H_∞ 外乱抑制を考察する。
《定理 3.1》もし以下の行列不等式を満足する行列 $P > 0, Q > 0, U > 0, R_1, R_2, R_3 > 0, S_1, S_2, S_3 > 0, W_1, W_2, W_3 > 0, Y$ が存在すれば、システム (1) は外乱抑制度 γ をもつ H_∞ 外乱抑制を達成する。

$$\begin{aligned} R &= \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2^T & R_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{bmatrix} \geq 0 \\ W &= \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2^T & W_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & -I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、各行列はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \hat{Q} + [A - I \quad -I \quad B_1 \quad A_d \quad 0]^T Y \\ &\quad \times [A - I \quad -I \quad B_1 \quad A_d \quad 0] \end{aligned}$$

* 青山学院大学理工学部 相模原市淵野辺 5-10-1

* College of Science and Engineering, Aoyama Gakuin University, 5-10-1 Fuchinobe, Sagami-hara
(Received November 16, 2007)

$$\begin{aligned}
& +\tilde{I}_1^T R_2^T + R_2 \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2^T S_2^T + S_2 \tilde{I}_2 \\
& +\tilde{I}_3^T [W_2^T \ 0 \ 0] + [W_2^T \ 0 \ 0]^T \tilde{I}_3 \\
\Phi_{12} = & [C_1 \ 0 \ D_{11} \ C_d \ 0]^T \\
\hat{Q} = & \text{diag}\left\{ \begin{bmatrix} Q+U & P \\ P & \begin{bmatrix} h_0 R_3 + (\delta_1 + \delta_2) S_3 \\ +P + (h_0 + \delta_2) W_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \right. \\
& \left. -\gamma^2 I, \ -U, \ -Q \right\} + h_0 R_1 + \delta_2 S_1 \\
& + (h_0 + \delta_2) [I_{2n+m} \ 0 \ 0]^T W_1 [I_{2n+m} \ 0 \ 0] \\
\tilde{I}_1 = & [I \ 0 \ 0 \ 0 \ -I] \\
\tilde{I}_2 = & [0 \ 0 \ 0 \ -I \ I] \\
\tilde{I}_3 = & [I \ 0 \ 0 \ -I \ 0]
\end{aligned}$$

証明：(3) 式と (4) 式より，適当な次元をもつ任意の行列 $N_i, M_i, i = 1, \dots, 5$ に対して，つぎの式が成立する．

$$2\zeta^T(k)N[x(k) - x(k-h_0) - \sum_{i=k-h_0}^{k-1} e(i)] = 0 \quad (8)$$

$$2\zeta^T(k)M[x(k-h_0) - x(k-h) + E(k)] = 0 \quad (9)$$

ここで $\zeta = [x^T(k) \ e^T(k) \ w^T(k) \ x^T(k-h) \ x^T(k-h_0)]^T$, $N = [N_1^T \ N_2^T \ N_3^T \ N_4^T \ N_5^T]^T$, $M = [M_1^T \ M_2^T \ M_3^T \ M_4^T \ M_5^T]^T$ である．さらに，(5) 式より任意の行列 $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して，つぎの式が成立する．

$$\begin{aligned}
0 = & [\bar{A}x(k) - e(k) - A_d \sum_{i=k-h}^{k-1} e(i) \\
& + B_1 w(k)]^T Y [\bar{A}x(k) - e(k) \\
& - A_d \sum_{i=k-h}^{k-1} e(i) + B_1 w(k)] \quad (10)
\end{aligned}$$

つぎの Lyapunov-Krasovskii 関数を考える．

$$\begin{aligned}
V(k) = & x^T(k)Px(k) + \sum_{i=k-h_0}^{k-1} x^T(i)Qx(i) \\
& + \sum_{i=k-h}^{k-1} x^T(i)Ux(i) \\
& + \sum_{i=-h_0}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} e^T(j)R_3e(j) \\
& + \sum_{i=-h_0-\delta_2}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} e^T(j)W_3e(j) \\
& + (\delta_1 + \delta_2) \sum_{i=k-h_0+\delta_1}^{k-1} e^T(i)S_3e(i) \\
& + \sum_{i=k-h_0-\delta_2}^{k-h_0+\delta_1-1} \sum_{j=i}^{k-h_0+\delta_1-1} e^T(j)S_3e(j)
\end{aligned}$$

ここで，行列 P, Q, U, R_3, S_3, W_3 はある正定行列である． $V(k)$ の差分に (8)-(10) 式を加え，(3) 式を用いることで，

$$\begin{aligned}
& V(k+1) - V(k) + z^T(k)z(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k) \\
= & 2x^T(k)Pe(k) + e^T(k)Pe(k) + x^T(k)(Q+U)x(k) \\
& - x^T(k-h)Ux(k-h) - x^T(k-h_0)Qx(k-h_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^T(k)[h_0 R_3 + (h_0 + \delta_2)W_3]e(k) \\
& - \sum_{i=k-h_0}^{k-1} e^T(i)R_3e(i) - \sum_{i=k-h_0-\delta_2}^{k-1} e^T(i)W_3e(i) \\
& + (\delta_1 + \delta_2)e^T(k)S_3e(k) - \sum_{i=k-h_0-\delta_2}^{k-h_0+\delta_1-1} e^T(i)S_3e(i) \\
& + 2\zeta^T N[x(k) - x(k-h_0) - \sum_{i=k-h_0}^{k-1} e(i)] \\
& + 2\zeta^T M[x(k-h_0) - x(k-h) + E(k)] \\
& + [\bar{A}x(k) - e(k) + B_1 w(k)]^T Y \\
& \quad \times [\bar{A}x(k) - e(k) + B_1 w(k)] \\
& - 2[\bar{A}x(k) - e(k) + B_1 w(k)]^T Y A_d \sum_{i=k-h}^{k-1} e(i) \\
& + [x(k) - x(k-h)]^T A_d^T Y A_d [x(k) - x(k-h)] \\
& + [C_1 x(k) + C_d x(k-h) + D_{11} w(k)]^T \\
& \quad \times [C_1 x(k) + C_d x(k-h) + D_{11} w(k)] \\
& - \gamma^2 w^T(k)w(k) \quad (11)
\end{aligned}$$

を得る．なお，(11) 式において，文献 (6) の Lemma 1 を用いると，(6) 式と (7) 式の R, W に対して，

$$\begin{aligned}
-2\zeta^T N \sum_{i=k-h_0}^{k-1} e(i) & \leq h_0 \zeta^T R_1 \zeta \\
& + \sum_{i=k-h_0}^{k-1} e^T(i)R_3e(i) \\
& + 2\zeta^T (R_2 - N)[x(k) - x(k-h_0)] \\
-2\zeta^T T Y A_d \sum_{i=k-h}^{k-1} e(i) & \leq (h_0 + \delta_2) \xi^T W_1 \xi \\
& + 2\zeta^T (W_2 - T Y A_d)[x(k) - x(k-h)] \\
& + \sum_{i=k-h-\delta_2}^{k-1} e^T(i)W_3e(i)
\end{aligned}$$

を得る．ここで， $\xi = [x^T(k) \ e^T(k) \ w^T(k)]^T$, $T = [\bar{A}^T \ -I \ B_1^T]^T$ である．また，(6) 式の S に対して， $h_0 < h$ のとき，

$$\begin{aligned}
2\zeta^T M E(k) & \leq \delta_2 \zeta^T S_1 \zeta + \sum_{i=k-h_0-\delta_2}^{k-h_0+\delta_1-1} e^T(i)S_3e(i) \\
& + 2\zeta^T (S_2 - M)[x(k-h_0) - x(k-h)]
\end{aligned}$$

となり， $h < h_0$ のとき，

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S_1 & -S_2 \\ -S_2^T & S_3 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (12)$$

に対して，同じ式を得る．なお，(12) 式の条件は (6) 式のそれと等価である．上記の不等式を (11) 式に利用すると，

$$\begin{aligned}
& V(k+1) - V(k) + z^T(k)z(k) \\
& - \gamma^2 w^T(k)w(k) \leq \zeta^T(k) \bar{\Phi} \zeta(k) \quad (13)
\end{aligned}$$

を得る．ここで， $\bar{\Phi} = \Phi_{11} + \Phi_{12} \Phi_{12}^T$ であり，(13) 式の両辺

を $k=0$ から ∞ まで足し合わせると,

$$V(\infty) - V(0) + J(w) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^T(k) \bar{\Phi} \zeta(k)$$

を得る. もし $\bar{\Phi} < 0$ であれば, $V(\infty) > 0$, $V(0) = 0$ であるから, $J(w) < 0$ を得る. したがって, システム (1) は外乱抑制度 γ をもつ H_∞ 外乱抑制を達成することがいえる. 最後に, $\bar{\Phi} < 0$ を書き直すと, (7) 式の条件となる. また, 定理の条件を満たすことができれば, $V(k+1) - V(k) < 0$ も成立し, システムの安定性も証明できる.

[注3.1] 文献4)では, $x^T(k+1)P[-x(k+1) + Ax(k) + A_dx(k-h)] = 0$ を利用しているが, 定理3.1では, (10)式を用いて, 任意行列 Y によりさらに各状態 x 間の重み付けをして保守性を軽減している. また, 文献4)では, むだ時間の上限値のみを用い, むだ時間の中間値 h_0 を用いていない. したがって, つねに $h \leq$ むだ時間の上限値 (ここでは $h_0 + \delta_2$), という不等式で上限を抑えている. しかし, 本論文では, むだ時間の中間値 h_0 を用いることで, 不等式の上限に h_0 を利用し H_∞ 外乱抑制条件の保守性の軽減を行なっている.

[注3.2] (1) 式は, つぎの拡大システムに書き換えられる.

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \hat{A}\xi(k) + \hat{A}_d\xi(k+h_0-\delta_1-h) \\ &\quad + \hat{B}w(k) \\ z(k) &= \hat{C}_1\xi(k) + \hat{C}_d\xi(k+h_0-\delta_1-h) \\ &\quad + D_{11}w(k) \end{aligned} \quad (14)$$

ここで, $\xi(k) = [x^T(k) \ x^T(k-1) \ \cdots \ x^T(k-h_0+\delta_1)]^T$,

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} A & \cdots & 0 & 0 \\ I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & A_d \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{B} &= [B_1^T \ 0 \ \cdots \ 0]^T, \quad \hat{H}_1 = [H_1^T \ 0 \ \cdots \ 0]^T \\ \hat{C}_1 &= [C_1 \ 0 \ \cdots \ 0], \quad \hat{C}_d = [0 \ \cdots \ 0 \ C_d] \end{aligned}$$

である. したがって, システム (14) を用いてシステム (1) の解析を行なうこともできる. 定理3.1をシステム (14) に適用すると, 各状態 $x(\cdot)$ の間に任意の行列を重み付けした効果がさらに現れるため, 保守性を軽減することができる.

4. 数 値 例

はじめに, システム (1) において,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix} \\ B_1 &= 0, \quad C_1 = 0, \quad C_d = 0, \quad D_{11} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

となるシステムの安定性を考える. むだ時間が定数である場合と時変である場合において, 他の文献と比較した結果を **Table 1** に示す. なお, 定数むだ時間の場合は必要十分条件による結果も合わせて示す. また, 時変むだ時間の下限値はすべて0と仮定している. つぎに, H_∞ 外乱抑制について考える. A , A_d , C_d , D_{11} は (15) 式と同じ行列とし, B_1 , C_1 は

$B_1 = 0.1I$, $C_1 = 0.5I$ とする. 定数むだ時間 $h = 10$ と時変むだ時間 $0 \leq h \leq 6$ に対する γ の最小値を **Table 2** に示す.

Table 1 The maximum upper bound of time-delay

Time-delay	Method	Maximum
Constant	Refs. 3), 5), 7)	12
	Ref. 8)	16
	Theorem 3.1	16
	Theorem 3.1+Remark 3.2	19
	Nec. & suff. condition	21
Time-varying	Ref. 3)	4
	Ref. 1)	8
	Ref. 4)	12
	Theorem 3.1	16

Table 2 The minimum lower bound of γ

Time-delay	Method	Minimum γ
Constant	Ref. 7)	4.7470
	Theorem 3.1	1.3102
Time-varying	Ref. 2)	1.0847
	Theorem 3.1	0.5448

5. 終わりに

離散むだ時間システムに対する H_∞ 外乱抑制の結果を得た. 数値例によりそれらが良好な結果であることを確認した.

参 考 文 献

- 1) E. Fridman and U. Shaked: Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay systems, *International Journal of Control*, **78**, 235/246 (2005)
- 2) E. Fridman and U. Shaked: Delay-dependent H_∞ control of uncertain discrete delay systems, *European Journal of Control*, **11**, 29/37 (2005)
- 3) H. Gao, J. Lam, C. Wang and Y. Wang: Delay-dependent output feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay, *IEE Proc. Control Theory Appl.*, **151**, 691/698 (2004)
- 4) H. Gao and T. Chen: New results on discrete-time systems with time-varying state delay, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **52**, 328/334 (2007)
- 5) Y.S. Lee and W.H. Kwon: Delay-dependent robust stabilization of uncertain discrete-time state-delayed systems, *Proc. of 15th IFAC Congress, Barcelona* (2002)
- 6) Y.S. Moon, P. Park, W.H. Kwon and Y.S. Lee: Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems, *International Journal of Control*, **74**, 1447/1455 (2001)
- 7) R.M. Palhares, C.D. Campos, P. Ya. Ekel, M.C.R. Leles and M.F.S.V. D'Angelo: Delay-dependent robust H_∞ control of uncertain linear systems with lumped delays, *IEE Proc. Control Theory Appl.*, **152**, 27/33 (2005)
- 8) S. Xu, J. Lam and Y. Zou: Improved conditions for delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain discrete-time systems, *Asian Journal of Control*, **7**, 344/348 (2005)