3 値の PWM 型制御入力に基づく安定化

富田 健太郎*・浅井 徹**

Stabilization Based on PWM-type Ternary Control Input

Kentaro TOMITA* and Toru ASAI**

This paper deals with stabilization of continuous-time systems with ternary symbolic inputs. We consider to generate the control input based on PWM (pulse width modulation) whose duty ratio is given by a state feedback control law. The analysis and synthesis is done based on the discrete-time domain. Although the discretized system nonlinearly depends on duty ratio, a stabilizing state feedback gain and a corresponding invariant set can be obtained by using linear matrix inequalities. Moreover, we show that the origin can be exponentially stabilizable by using PWM-type control input for almost all the stabilizable continuous-time systems.

Key Words: PMW, stabilization, switching, quadratic stabilization, discretization

1. はじめに

通常の制御系解析・設計では制御入力は連続値をとるものと仮定されている。その際、使用されるアクチュエータには連続的に可変な出力が得られるものが想定されている。

しかし、一般に連続値を発生するアクチュエータはそうではないものに対して複雑かつ高価であり、必ずしもそれらを用いることが適当でない場合もある。たとえば、電気ポットのような安価な製品では、コストダウンを図るために加熱と非加熱の2つの制御入力を切替えることで温度制御を行なっている。また、宇宙機などでは、簡素な機構のアクチュエータが必要とされるので、弁の開閉のみが可能なガスジェットスラストが用いられている。

以上の例のように、取り得る値が有限個となるような制御入力を有する制御対象が存在する。そのような場合、個々の値を記号と考えることができるので、それらの制御入力は記号入力と呼ばれる。記号入力を有する制御対象については、近年、その可制御性および可到達性に関する解析が行なわれている^{1)~5)}。また、記号入力に基づく制御系の設計についても、従来より知られている ON/OFF 制御をはじめ、さまざまな切替制御則が提案されている^{3), 6)}。しかしながら、これらの手法は本質的に位相面解析に基づく図的解法であるため、高次のシステムに対する設計を考えることは困難である。

一方、記号入力の切替則をパルス幅変調 (Pulse Width Modulation; PWM) の形式に限定すれば、その解析や設計は容易となる。実際、これまでにさまざまな系統的な手法が提案されている^{7)~12)}。とくに、文献 8)~12) では、PWM の周期に同期した離散化を行なうことで、平均化を行なうことなく厳密な解析・設計手法を提案している。

しかしながら、これらの手法では2値の記号入力を有する制御対象が扱われている。そのため、状態をある一点へ収束させることは本質的に不可能であり、最善でもリミットサイクルを生成することしかできない。実際には、ある一点への収束を可能とするために、3値の記号入力をを用いることも多い。

そこで本論文では、3値の記号入力を有する制御対象を考え、さらに、その制御入力を PWM に限定することによって、原点を指数安定な平衡点とするような安定化制御則を系統的に導出することを考える。具体的には、閉ループ系の原点の指数安定性を保証する状態フィードバック則とそれによって得られる不変集合を線形行列不等式 (LMI) を用いて求める手法を提案する。

本論文で用いる記法は標準的なものである。ベクトル x に対して $\|x\|_2$ はユークリッドノルムをあらわし、行列 M に対して $\|M\|$ あるいは $\bar{\sigma}(M)$ は M の最大特異値をあらわす。 $\rho(M)$ は M のスペクトル半径をあらわす。

2. 問題設定

次式で与えられる線形時不変システムを考える。

$$\dot{\xi}(t) = A_c \xi(t) + B_c u(t) \quad (1)$$

ここで、 $A_c \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 、 $B_c \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ である。また、入力可能な値は $\{-u_0, 0, u_0\}$ の3値である。ただし、 $u_0 > 0$ である。ここで、一般性を失うことなく $u_0 = 1$ とすることができる。

* (株) リコー 海老名市下今泉 810

** 大阪大学大学院工学研究科 吹田市山田丘 2-1

* Ricoh Company, LTD, 810 Shimo-imaizumi, Ebina

** Graduate School of Engineering, Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita

(Received April 10, 2006)

(Revised January 29, 2007)

Fig. 1 PWM-type control input

実際, $u_0 \neq 1$ の場合には $B_c u_0$ を改めて B_c とすればよい. そこで以降では $u_0 = 1$ とする.

本論文では, 制御入力 $u(t)$ がこれらの記号入力を用いた周期 h の PWM によって与えられる場合を考える. 具体的には, k 番目のサンプル時刻で符号 $s_k \in \{-1, 1\}$ およびデューティ比 $d_k > 0$ が与えられるものとし, そのサンプル周期 $t \in [kh, (k+1)h)$ における入力 $u(t)$ を以下のように与えることとする (Fig. 1).

$$u(t) = \begin{cases} s_k & (kh \leq t < (k + \text{sat}(d_k))h) \\ 0 & ((k + \text{sat}(d_k))h \leq t < (k+1)h) \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{sat}(w) = \begin{cases} w & w \in [0, 1] \\ 1 & (w > 1) \end{cases}$$

ここで, δ_k を

$$\delta_k = s_k d_k \quad (3)$$

と定めると, (2) 式の制御入力を

$$u(t) = \begin{cases} \text{sgn}(\delta_k) & (kh \leq t < (k + \text{sat}(|\delta_k|))h) \\ 0 & ((k + \text{sat}(|\delta_k|))h \leq t < (k+1)h) \end{cases} \quad (4)$$

と書くことができる. 以降では δ_k を一般化されたデューティ比, あるいは単に一般化デューティ比とよぶこととする.

本論文では, 上記の PWM 型制御入力を用いて (1) 式のシステムの原点を指数安定化することを考える. すなわち, 原点が指数安定となるように各サンプル時刻で一般化デューティ比 δ_k を定める制御則を求めることを目的とする. しかしながら, PWM 型制御入力は切換を有するため連続時間での解析が困難である. そこでここでは, (1), (3), (4) 式で与えられるシステムのサンプル時刻上での振舞いについて考える.

サンプル時刻 kh ($k = 0, 1, \dots$) における $\xi(t)$ の値を x_k とすると, 簡単な計算から $x_k = \xi(kh)$ は以下の状態方程式によって与えられることがわかる.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_d x_k + \int_0^{\text{sat}(|\delta_k|)h} e^{A_c(h-\tau)} B_c \text{sgn}(\delta_k) d\tau \\ &= A_d x_k + A_d \text{sgn}(\delta_k) \times \left(\int_0^{\text{sat}(|\delta_k|h)} e^{-A_c \tau} d\tau \right) B_c \end{aligned} \quad (5)$$

ただし

$$A_d = e^{A_c h} \quad (6)$$

である.

(5) 式は x_k を状態, δ_k を制御入力とする離散時間非線形状態方程式とみなすことができる. そこで, 本論文では, (5) 式の離散時間システムに基づいて安定化問題を考える.

[問題] (5) 式によって与えられる離散時間システムの原点を (局所的に) 指数安定化するように δ_k を定める制御則を求めよ.

3. 主要な結果

3.1 ロバスト安定化問題への帰着

(5) 式のシステムでは制御入力 δ_k が積分区間を介して状態に影響を与えており, これをそのまま取り扱うのは困難である. そこでここでは, (5) 式の振舞いを包含するモデル集合を与えることによって, 制御系の解析・設計をロバスト制御の枠組に帰着させることを考える. 以下の補題は, その礎を与える結果である.

[補題 1] $|\delta_k| \leq r$ のとき, 任意の正則行列 $T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ と (5) 式を満足する x_{k+1} , x_k , δ_k に対して以下の関係が成立する.

$$x_{k+1} \in A_d x_k + (B_d + A_d T \gamma \Delta_{n,n} T^{-1} B_c) \delta_k \quad (7)$$

$$B_d = h A_d B_c \quad (8)$$

$$\Delta_{m,p} = \{\Delta \in \mathbf{R}^{m \times p} : \|\Delta\| \leq 1\}$$

$$\gamma = m(r, \|T^{-1} A_c T\|), \quad (9)$$

ただし,

$$m(a, b) = \begin{cases} 0 & (ab = 0) \\ \frac{1}{ab} (e^{abh} - (1 + abh)) & (0 < a \leq 1, 0 < b) \\ \frac{1}{ab} (e^{abh} - (1 + abh)) + (1 - \frac{1}{a})h & (1 < a, 0 < b) \end{cases} \quad (10)$$

である.

(7) 式右辺の $A_d x_k + B_d \delta_k$ は (5) 式の非線形システムに対する線形近似システムに相当し, $A_d T \gamma \Delta T^{-1} B_c \delta_k$ はその線形近似誤差を包含する集合を与えている. γ は不確かさの大きさの見積りであり, T は非線形性を Δ で包含する際の保守性を低減させるためのスケリング行列である.

補題 1 の証明には $m(\cdot)$ の性質に関する以下の結果を用いる.

[補題 2] 任意に与えられた $b \geq 0$ に対し, (10) 式の関数 $m(a, b)$ は $a \geq 0$ に関して単調非減少である. 同様に, 任意に与えられた $a \geq 0$ に対し, $m(a, b)$ は $b \geq 0$ に関して単調非減少である.

(証明) まず, a に関する単調性について示す. 定義より $b = 0$ のとき, あきらかに $m(a, b)$ は単調非減少である. 一方, $b > 0$ のとき $m(a, b)$ は $a \geq 0$ で連続であり, かつ, $a \neq 1$ において微分可能である. 実際,

$$\frac{\partial m(a, b)}{\partial a} = \begin{cases} \frac{(abh-1)e^{abh}+1}{a^2b} & (0 < a < 1) \\ \frac{(abh-1)e^{abh}+1+bh}{a^2b} & (1 < a) \end{cases}$$

である。ここで、

$$\hat{m}(a) = (abh-1)e^{abh} + 1 - \frac{1}{2}(abh)^2$$

と定義すると $\hat{m}(0) = 0$ であり、かつ、 $a \geq 0$ において

$$\frac{d\hat{m}(a)}{da} = a(bh)^2(e^{abh} - 1) \geq 0$$

が成り立つことから $\hat{m}(a) \geq 0$ が成り立つ。よって、任意の $a \neq 1$ に対して

$$\frac{\partial m(a, b)}{\partial a} \geq \frac{bh^2}{2} > 0$$

も成り立つ。以上より、 $m(a, b)$ は $a \geq 0$ に関して単調非減少である。 $b \geq 0$ に関する単調性の証明も同様である。□

補題2を用いると、補題1の証明を以下のように与えることができる。

(証明) $\delta_k = 0$ ならば、(5) 式より

$$x_{k+1} = A_d x_k$$

が成立するので、(7) 式も成立する。

つぎに $\delta_k \neq 0$ と仮定する。このとき、任意の正則行列 T に対して以下の関係が成立する。

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_d x_k + A_d T \operatorname{sgn}(\delta_k) \times \\ &\quad \left(\int_0^{\operatorname{sat}(|\delta_k|h)} e^{-T^{-1}A_c T \tau} d\tau \right) T^{-1} B_c \\ &= A_d x_k + A_d B_c \operatorname{sgn}(\delta_k) |\delta_k| h \\ &\quad + A_d T \operatorname{sgn}(\delta_k) \Theta_k T^{-1} B_c \\ &= A_d x_k + B_d \delta_k + A_d T \operatorname{sgn}(\delta_k) \Theta_k T^{-1} B_c \end{aligned}$$

ただし、

$$\Theta_k = \int_0^{\operatorname{sat}(|\delta_k|h)} \left(e^{-T^{-1}A_c T \tau} - I \right) d\tau - \int_{\operatorname{sat}(|\delta_k|h)}^{|\delta_k|h} I d\tau$$

である。このとき

$$\Xi_k = \frac{\operatorname{sgn}(\delta_k)}{\delta_k} \Theta_k$$

を定義すると、

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d \delta_k + A_d T \Xi_k T^{-1} B_c \delta_k$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \|\Xi_k\| &\leq \frac{1}{|\delta_k|} \left(\left\| \int_0^{\operatorname{sat}(|\delta_k|h)} \left(e^{-T^{-1}A_c T t} - I \right) dt \right\| \right. \\ &\quad \left. + \left\| \int_{\operatorname{sat}(|\delta_k|h)}^{|\delta_k|h} I dt \right\| \right). \end{aligned}$$

が成り立ち、さらに付録の補題13、事実12より

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^{\operatorname{sat}(|\delta_k|h)} \left(e^{-T^{-1}A_c T t} - I \right) dt \right\| \\ &\leq \int_0^{\operatorname{sat}(|\delta_k|h)} \left\| e^{-T^{-1}A_c T t} - I \right\| dt \\ &\leq \int_0^{\operatorname{sat}(|\delta_k|h)} \left(e^{\|T^{-1}A_c T\|t} - 1 \right) dt \end{aligned}$$

が成立する。よって、簡単な計算から次式が成立することがわかる。

$$\|\Xi_k\| \leq m(|\delta_k|, \|T^{-1}A_c T\|).$$

補題2より $m(a, b)$ は a に関して単調非減少なので

$$\|\Xi_k\| \leq m(r, \|T^{-1}A_c T\|) = \gamma$$

が成り立つ。よって、 $\Xi_k \in \gamma \Delta$ であるので(7)式が成り立つ。□

3.2 安定化制御則の設計

補題1より、(5) 式のシステムは(7)式で包含されることがあきらかとなった。(7)式は2次安定化^{13)~15)}でよく用いられる不確実モデルと同様な表現で与えられている。そこで、2次安定化と同様な手法を用いれば(7)式を安定化することもできると期待される。以下の補題は2次安定化においてよく知られている結果であるが、本論文でも重要な役割を果たすものである。

[補題3] $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ は与えられた行列とする。このとき、任意に与えられた $P > 0$ に対して、以下の条件は互いに等価である。

(1) 任意の $\Delta \in \Delta_{m,p}$ に対して次式が成立する。

$$(A + B\Delta C)^T P (A + B\Delta C) - P < 0 \quad (11)$$

(2) 次式が成立する。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^T P A - P + C^T C & A^T P B \\ B^T P A & B^T P B - I \end{bmatrix} < 0 \quad (12) \end{aligned}$$

(3) 次式が成立する。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{A} P^{-1} C^T \\ C P^{-1} A^T & C P^{-1} C^T - I \end{bmatrix} < 0 \quad (13) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{A} P^{-1} A^T - P^{-1} + B B^T$$

補題1, 3を用いると、以下の定理が得られる。

《定理4》(5) 式のシステムに対して、以下の不等式

$$\begin{bmatrix} -Q & \varphi(Q, M)^T & M^T B_c^T \\ \varphi(Q, M) & -Q + A_d W A_d^T & 0 \\ B_c M & 0 & -\mu W \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

$$\varphi(Q, M) = A_d Q + B_d M, \quad \mu = m(r, \sqrt{\nu})^{-2}$$

$$A_d W A_d^T - \nu W < 0 \quad (15)$$

を満足する $Q > 0$ ($Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$), $M \in \mathbf{R}^n$, $W > 0$ ($W \in \mathbf{R}^{n \times n}$), $r > 0$, $\nu > 0$ が存在したと仮定する。このとき、

$$\delta_k = F x_k, \quad F = M Q^{-1} \quad (16)$$

によって δ_k を定めると、領域

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \left\{ x : x^T Q^{-1} x \leq \frac{r^2}{MQ^{-1}M^T} \right\} & (M \neq 0) \\ R^n & (M = 0) \end{cases} \quad (17)$$

において原点は指数安定である。すなわち、ある $\sigma \in (0, 1)$ と $\zeta > 0$ が存在して、任意の $x_0 \in \mathcal{D}$ と任意の $k \geq 0$ に対して、 x_0 を初期値とする解 x_k は

$$\|x_k\|_2 \leq \sigma^k \zeta \|x_0\|_2 \quad (18)$$

を満足する。

(証明) 定理の仮定を満足する $Q > 0$, $W > 0$, M , $r > 0$, $\nu > 0$ が存在したとする。このとき (15) 式より

$$\|W^{-\frac{1}{2}} A_c W^{\frac{1}{2}}\| < \sqrt{\nu}$$

が成り立つ。一方、補題 2 より、 $m(a, b)$ は $b \geq 0$ に関して単調非減少である。よって、 $T = W^{\frac{1}{2}}$ に対して (9) 式で定義される γ について

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= m\left(r, \|W^{-\frac{1}{2}} A_c W^{\frac{1}{2}}\|\right)^2 \\ &\leq m\left(r, \sqrt{\nu}\right)^2 = \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

すなわち $\mu \leq \frac{1}{\gamma^2}$ が成立するので、(14) 式より

$$\begin{bmatrix} -Q & \varphi(Q, M)^T & M^T B_c^T \\ \varphi(Q, M) & -Q + A_d W A_d^T & 0 \\ B_c M & 0 & -\frac{1}{\gamma^2} W \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

が成立する。Schur Complement を行なうことにより、(19) 式は次式

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -Q + A_d W A_d^T & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\gamma^2} W \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \varphi(Q, M) \\ B_c M \end{bmatrix} Q^{-1} \begin{bmatrix} \varphi(Q, M) \\ B_c M \end{bmatrix}^T < 0 \end{aligned}$$

と等価であるので

$$P = Q^{-1}, \quad A = A_d + B_d M Q^{-1},$$

$$B = A_d W^{\frac{1}{2}}, \quad C = \gamma W^{-\frac{1}{2}} B_c M Q^{-1}$$

と定義された行列に対して (13) 式が成立する。よって、補題 3 より任意の $\Delta \in \Delta_{n,n}$ に対して (11) 式も成立する。このとき、 $\Delta_{n,n}$ が閉集合であることから、ある $\varepsilon \in (0, 1)$ が存在して任意の $\Delta \in \Delta_{n,n}$ に対して次式が成立する。

$$(A + B\Delta C)^T Q^{-1} (A + B\Delta C) - Q^{-1} \leq -\varepsilon Q^{-1} \quad (20)$$

ここで、 $x_k \in \mathcal{D}$ を満足する任意の x_k に対し (16) 式で δ_k を定めると、付録の補題 14 より $|\delta_k| \leq r$ である。さらに、

$$\begin{aligned} (A + B\Delta C) x_k \\ = A_d x_k + (B_d + A_d W^{\frac{1}{2}} \gamma \Delta W^{-\frac{1}{2}} B_c) \delta_k \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、補題 1 より次式も成立する。

Fig. 2 Invariant set

$$x_{k+1} \in (A + B\Delta_{n,n}C) x_k \quad (21)$$

(20) 式の左右からそれぞれ x_k^T , x_k をかけると、(21) 式より

$$x_{k+1}^T Q^{-1} x_{k+1} - x_k^T Q^{-1} x_k \leq -\varepsilon x_k^T Q^{-1} x_k$$

すなわち、

$$x_{k+1}^T Q^{-1} x_{k+1} \leq (1 - \varepsilon) x_k^T Q^{-1} x_k \leq x_k^T Q^{-1} x_k \quad (22)$$

が成り立つ。(22) 式と $\mathcal{D}$ の定義より、 $x_k \in \mathcal{D}$ ならば $x_{k+1} \in \mathcal{D}$ である。

以上より、 $x_0 \in \mathcal{D}$ を満足する任意の初期値 x_0 と任意の $k \geq 0$ に対し $x_k \in \mathcal{D}$ が成り立ち、さらに次式が成立する。

$$x_k^T Q^{-1} x_k \leq (1 - \varepsilon)^k x_0^T Q^{-1} x_0 \quad (23)$$

ここで、 $\varepsilon \in (0, 1)$ より $1 - \varepsilon \in (0, 1)$ である。また、 Q が正定行列であることに注意すると、(23) 式より

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} \|x_k\|_2^2 \leq (1 - \varepsilon)^k \frac{1}{\lambda_{\min}} \|x_0\|_2^2$$

すなわち

$$\|x_k\|_2 \leq (1 - \varepsilon)^{\frac{k}{2}} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \|x_0\|_2$$

が成り立つ。ただし、 $\lambda_{\max}$, $\lambda_{\min}$ はそれぞれ Q の最大および最小固有値である。よって、(18) 式が成立する。□

定理 4 は (5) 式の原点を指数安定化する静的状態フィードバック制御則が存在するための十分条件を与えている。 δ_k を (16) 式の静的状態フィードバックで与えるとき、 $|\delta_k| \leq r$ を満足する状態は $Fx = \pm r$ を満足する 2 つの超平面で挟まれる領域内に存在する。一方、(14), (16) 式に基づいて安定化を行えば

$$\mathcal{E}(v) = \{x : x^T Q^{-1} x \leq v\} \quad (v > 0)$$

によって定められる楕円領域は、十分小さな $v > 0$ に対して (7), (16) 式のシステムに対する不変集合となり、その内部の状態を初期値とする解 x_k は原点へ指数的に収束する。定理 4 で与えられる不変集合 $\mathcal{D}$ は 2 つの超平面に内接する楕円 (Fig. 2) を与えている。

定理 4 の (16) 式で制御入力を与えればサンプル点上の状態に関して指数安定性が達成される。このとき、実際にはサンプル点間の振舞いを含む連続時間系としての状態に関して

も指数安定性が達成される。

《定理5》 ある $F \in \mathbf{R}^n$ を用いて定められる $\delta_k = Fx_k$ によって (5) 式のシステムの原点が⁵ (離散時間システムの意味で) 指数安定化されるとき, (1), (4) 式のシステムの原点も (連続時間システムの意味で) 指数安定となる。

(証明) (1), (4), (5) 式より $x(kh+t)$ ($t \in (0, h)$) は次式によって定められる。

$$\begin{aligned} \xi(kh+t) &= e^{A_c t} x_k \\ &+ \int_0^{\min(t, |\delta_k|/h)} e^{A_c(h-\tau)} B_c \operatorname{sgn}(\delta_k) d\tau \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \|\xi(kh+t)\|_2 &\leq \|e^{A_c t} x_k\|_2 \\ &+ \left\| \int_0^{\min(t, |\delta_k|/h)} e^{A_c(h-\tau)} B_c \operatorname{sgn}(\delta_k) d\tau \right\|_2 \\ &\leq \|e^{A_c t}\| \cdot \|x_k\|_2 \\ &+ \left\| \int_0^{\min(t, |\delta_k|/h)} e^{A_c(h-\tau)} B_c d\tau \right\|_2 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで, 付録の事実 11 を用いると

$$\begin{aligned} \|x(kh+t)\|_2 &\leq \|e^{A_c t}\| \cdot \|x_k\|_2 \\ &+ \int_0^{\min(t, |\delta_k|/h)} \|e^{A_c(h-\tau)} B_c\|_2 d\tau \\ &\leq \|e^{A_c t}\| \cdot \|x_k\|_2 + \int_0^{|\delta_k|/h} \|e^{A_c(h-\tau)}\| \cdot \|B_c\|_2 d\tau \end{aligned}$$

が成り立つ。このときさらに,

$$\rho = \max_{t \in [0, h]} \|e^{A_c t}\|$$

とすると,

$$\begin{aligned} \|\xi(kh+t)\|_2 &\leq \rho \|x_k\|_2 + \int_0^{|\delta_k|/h} \sigma^* \|B_c\|_2 d\tau \\ &\leq \rho \|x_k\|_2 + \rho \|B_c\|_2 |\delta_k| h \\ &\leq \rho \|x_k\|_2 + \rho h \|B_c\|_2 \cdot \|F\| \cdot \|x_k\| \\ &\leq \hat{\rho} \|x_k\|_2 \end{aligned} \quad (24)$$

が得られる。ただし,

$$\hat{\rho} = \rho(1 + h \|B_c\|_2 \cdot \|F\|)$$

である。よって, 仮定より, ある $\sigma \in (0, 1)$ と $\zeta > 0$ が存在して次式が成立する。

$$\|\xi(kh+\tau)\|_2 \leq \hat{\rho} \sigma^k \zeta_d \|x_0\|_2 = \hat{\rho} \sigma^k \zeta_d \|\xi(0)\|_2. \quad (25)$$

さらに, $\tau \in [0, h)$ であることから

$$k \leq \frac{kh+\tau}{h} - 1$$

が成り立ち, 次式が成立する。

$$\sigma^k \leq \sigma^{\frac{kh+\tau}{h}-1} = \frac{1}{\sigma} e^{\frac{\log(\sigma)}{h}(kh+\tau)} \quad (26)$$

(25) and (26) 式より,

$$\|\xi(kh+\tau)\|_2 \leq \frac{\hat{\rho} \zeta_d}{\sigma} \exp\left(\frac{\log(\sigma)}{h}(kh+\tau)\right) \|\xi(0)\|_2.$$

が成り立ち, $\log(\sigma) < 0$ であることから, (1) 式の原点も連続時間の意味で指数安定となる。□

3.3 可解性

ここで, (14), (15) 式の可解性について考える。(14), (15) 式を満足する $Q > 0$, $M, W > 0$, $r > 0$, $\nu > 0$ が存在するためには, (A_d, B_d) が離散時間システムの意味で可安定でなければならない。 (A_d, B_d) の可制御性, 可安定性に関してはつぎの結果を得ることができる。

〔補題6〕 (A_d, B_d) が可制御となるための必要十分条件は, (A_c, B_c) が可制御かつ A_c の相異なる固有値 λ_i ($i = 1, 2, \dots$) について

$$\lambda_i = \lambda_j + j2q\pi/h \quad (27)$$

となる i, j ($i \neq j$), q ($q = \pm 1, \pm 2, \dots$) が存在しないことである。

〔補題7〕 (A_d, B_d) が離散時間システムの意味で可安定となるための必要十分条件は, (A_c, B_c) が連続時間システムの意味で可安定かつ A_c の実部が非負の相異なる固有値 λ_i ($\operatorname{Re}(\lambda_i) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots$) について (27) 式を満足する i, j ($i \neq j$), q ($q = \pm 1, \pm 2, \dots$) が存在しないことである。

補題 6, 7 より, (A_c, B_c) が連続時間システムの意味で可制御 (可安定) であれば, ほとんどすべての h に対して (A_d, B_d) は離散時間システムの意味で可制御 (可安定) となる。また, 仮に (27) 式を満足する i, j, q が存在した場合には, h を微小に変えることによって (27) 式が成立しないような h を選ぶことができる。補題 6, 7 の証明は文献 12) の補題の証明と同様なので省略する。なお, (27) 式はゼロ次ホールドによって離散化されたシステムの可制御性, 可安定性を解析する際にあらわれるもの¹⁶⁾と同じ条件である。

以上の結果より, (14), (15) 式の可解性, すなわち, PWM 型制御入力による安定化可能性に関して以下の結果が得られる。《定理8》 (A_c, B_c) が連続時間システムの意味で可安定かつ h が補題 7 の条件を満足するものとする。このとき, (14), (15) 式を満足する $Q > 0$, $M, W > 0$, $r > 0$, $\nu > 0$ が存在する。

(証明) ν を $\nu > \rho(A_c)^2$ を満足する任意の正数とする。このとき, ある $W > 0$ が存在して (15) 式が成立する¹⁷⁾。一方, 補題 7 より (A_d, B_d) は離散時間システムの意味で可安定となるので, 次式を満足する $\hat{Q} > 0$, $\hat{F}$ が存在する。

$$(A_d + B_d \hat{F})^T \hat{Q} (A_d + B_d \hat{F}) - \hat{Q} < 0$$

よって, Schur Complement より $\hat{M} = \hat{F}Q$ に対して次式も成り立つ。

$$\begin{bmatrix} -\hat{Q} & \varphi(\hat{Q}, \hat{M})^T \\ \varphi(\hat{Q}, \hat{M}) & -\hat{Q} \end{bmatrix} < 0$$

Fig. 3 Inclusion of Ellipses

このとき, $Q = \alpha \hat{Q}$, $M = \alpha \hat{M}$ とすれば, ある十分大きな $\alpha > 0$ が存在して次式が成立する.

$$\begin{bmatrix} -Q & \varphi(Q, M)^T \\ \varphi(Q, M) & -Q + A_d W A_d^T \end{bmatrix} < 0$$

さらにこのとき, 十分小さな $r > 0$ (すなわち, 十分大きな $\mu > 0$) に対して (14) 式が成立する. $\square$

定理 8 より, (A_c, B_c) が連続時間システムの意味で可安定ならば, ほとんどすべての h に対して (14), (15) 式を満足する $Q > 0$, $M, W > 0$, $r > 0$, $\nu > 0$ が存在する; すなわち, PWM 型制御入力を用いて (1) 式のシステムの原点を局所的に指数安定化することが可能である.

3.4 安定化可能領域の最適化

定理 8 より, (A_c, B_c) が連続時間システムの意味で可安定ならば, ほとんどすべての場合において, PWM 型制御入力を用いて原点を局所的に指数安定化することが可能である. ただし, 定理 8 の条件で達成されるのは安定化のみであり, 実用的な設計を行なうにはこの条件に基づいた何らかの最適化が必要となる.

本論文では, その一つの方法として, 安定化される領域を大きくすることを目的とした最適化を考える. ただし, 領域の拡大を考える際, 不変集合を構成する楕円は n 次元空間に存在するので, すべての方向へ等方的に領域を拡大すればよいとは限らない. また, 拡大すべき方向は一般に制御対象や制御系設計の目的にも依存する. そこで本論文では, 領域を拡大する方向と各方向への重要度を指定する p 次 (ただし $p \leq n$) の楕円が設計者によって与えられる場合を考える. すなわち, 行列 $V \in \mathbf{R}^{n \times p}$ が与えられたとし, V を用いた以下の集合値関数

$$\mathcal{X}_0(\kappa) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\kappa}} V \theta : \|\theta\|_2 \leq 1 \right\} \quad (28)$$

を考える. あきらかに $\mathcal{X}_0(\kappa)$ は κ の増加にともなって単調に縮小する. このとき, $\mathcal{X}_0(\kappa) \subseteq \mathcal{D}$ の条件下で κ を最小にする Q, M などを求めることを考える. すなわち, $\mathcal{X}_0(\kappa)$ を用いて $\mathcal{D}$ を内側から広げることを考える (Fig. 3).

$\mathcal{D}$ を広げる際に $\mathcal{X}_0(\kappa)$ は重み関数の役割を果たす集合であり, 広げる方向を定めている. 実用上は, $\mathcal{X}_0(\kappa)$ は初期値の集合と考えることができる. 設計者は $\mathcal{X}_0(\kappa)$ を用いて保証

すべき初期値集合の形状を指定することができる.

ただし, $\mathcal{X}_0(\kappa) \subseteq \mathcal{D}$ のみを考慮して $\mathcal{D}$ を大きくすると著しく速応性が悪くなる. そこで, 本論文では安定度 $\beta > 1$ の制約のもとで κ を最小にすることを考える. 以下は, そのための結果を与えている.

《定理 9》 与えられた (5), (3) 式のシステム, $V \in \mathbf{R}^{n \times p}$, $\beta > 1$ に対して, (15) 式と以下の不等式

$$\begin{bmatrix} -Q & \beta \varphi(Q, M)^T & \beta M^T B_c^T \\ \beta \varphi(Q, M) & -Q + A_d W A_d^T & 0 \\ \beta B_c M & 0 & -\mu W \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} \kappa s I & s V^T \\ s V & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} r^2 s & M \\ M^T & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (30)$$

を満足する $Q > 0$ ($Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$), $M \in \mathbf{R}^n$, $W > 0$ ($W \in \mathbf{R}^{n \times n}$), $s > 0$, $\kappa > 0$, $r > 0$, $\nu > 0$ が存在するとき, (16) 式によって δ_k を, (17), (28) 式によって領域 $\mathcal{D}$, $\mathcal{X}_0$ をそれぞれ定める. このとき, $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{D}$ である. さらに, 閉ループ系の原点は領域 $\mathcal{D}$ において安定度 β で指数安定である. すなわち, ある $\sigma \in (0, \frac{1}{\beta})$ と $\zeta > 0$ が存在して, 任意の $x_0 \in \mathcal{D}$ と任意の $k \geq 0$ に対して, x_0 を初期値とする解 x_k は $\|x_k\|_2 \leq \sigma^k \zeta \|x_0\|_2$ を満足する.

(証明) $M = 0$ のとき, $\mathcal{D} = \mathbf{R}^n$ よりあきらかに $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{D}$ が成り立つ.

つぎに $M \neq 0$ とする. このとき, (30) 式の第 1 式より次式が成立する.

$$\frac{\kappa}{s} I - V^T Q^{-1} V \geq 0 \Leftrightarrow \frac{I}{s} \geq \frac{1}{\kappa} V^T Q^{-1} V \quad (31)$$

同様に, (30) 式の第 2 式より次式も成立する.

$$r^2 s - M Q^{-1} M^T \geq 0 \Leftrightarrow \frac{r^2}{M Q^{-1} M^T} \geq \frac{1}{s} \quad (32)$$

よって, (31), (32) 式よりつぎの不等式が成り立つ.

$$\frac{r^2}{M Q^{-1} M^T} I \geq \frac{1}{\kappa} V^T Q^{-1} V \quad (33)$$

さらに, (33) 式の左右からそれぞれ θ^T , θ ($\|\theta\|_2 \leq 1$) をかけることにより次式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \theta^T V^T Q^{-1} V \theta &\leq \frac{r^2}{M Q^{-1} M^T} \|\theta\|_2^2 \\ &\leq \frac{r^2}{M Q^{-1} M^T} \end{aligned} \quad (34)$$

(34) 式は $\|\theta\|_2 \leq 1$ を満足する任意の θ に対して成立することから, 任意の $x_0 \in \mathcal{X}_0$ に対して次式が成立する.

$$x_0^T Q^{-1} x_0 \leq \frac{r^2}{M Q^{-1} M^T}$$

すなわち, $x_0 \in \mathcal{D}$ である. よって, $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{D}$ が成立する.

指数安定性に関しては (14) 式と (29) 式の関係からあきらかである. $\square$

定理 9 は, $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{D}$ を満足する F が存在するための十分条件を示している. (15), (29), (30) 式は, r, ν, κ を固定

したとき, Q, M, W, s に関する線形行列不等式 (LMI) である. よって, 与えられた r, ν, κ に対してその可解性を判定することは容易である. 一方, (15), (29), (30) 式が可解となる r, ν, κ の条件については, 下記の事実が成り立つ. [補題 10] (15), (29), (30) 式を満足する $Q, M, W, s, \kappa, r > 0$ が存在するための必要十分条件は, $(\beta A_d, \beta B_d)$ が可安定かつ $\nu > \rho(A_c)^2$ が成り立つことである. ここで, $(\beta A_d, \beta B_d)$ が可安定かつ $\nu > \rho(A_c)^2$ が任意に与えられたときに, (15), (29), (30) 式が可解となる r の上限を $r^*(\nu)$ とする. このとき, 下記の条件が成り立つ.

- 任意の $r \in (0, r^*(\nu))$ に対して (15), (29), (30) 式を満足する Q, M, W, s, κ が存在する.

- $r \in (0, r^*(\nu))$ ならば (15), (29), (30) 式を満足する κ の下限は Q, M, W, s に関する準凸関数となる.

(証明) $(\beta A_d, \beta B_d)$ が可安定かつ $\nu > \rho(A_c)^2$ が必要十分条件となることは, 定理 8 の証明と同様な方法で示すことができる.

つぎに, ある r に対して (15), (29), (30) 式を満足する Q, M, W, s, κ が存在したとする. ここで, 任意に $r_0 \in (0, r)$ を与えたとき, $r_0, (\frac{r}{r_0})^2 s$ それぞれをあらためて r, s とすれば, 十分大きな κ に対して (15), (29), (30) 式が成り立つ. よって, 任意の $r \in (0, r^*(\nu))$ に対して (15), (29), (30) 式を満足する Q, M, W, s, κ が存在する.

κ の下限が準凸関数となることは (15), (29), (30) 式の構造よりあきらかである. $\square$

補題 10 は (15), (29), (30) 式の解の探索手法を考えるための基礎を与えている. κ は準凸関数であることから, $\nu > \rho(A_c)^2, r > 0$ が与えられたとき, 下記の 2 分探索を行えば κ を最小化することが可能である.

- (1) (15), (29), (30) 式が可解となるような十分大きな κ を探索し, $\kappa_u = \kappa$ とする. また, $\kappa_l = 0$ とする. 十分大きな κ に対しても可解とならない場合には, 可解でないと判定し, 探索を終了する.
- (2) $\kappa_u - \kappa_l$ が十分小さければ, κ_u を κ の最小値として出力し, 探索を終了する.
- (3) $\kappa = \frac{\kappa_u + \kappa_l}{2}$ に対して (15), (29), (30) 式が可解ならば, $\kappa_u = \kappa$ とし, 可解でなければ, $\kappa_l = \kappa$ とする.
- (4) (2) に戻る.

ただし, 与えられた r, ν に対する κ の下限 $\kappa^*(r, \nu)$ は一般に r, ν に関して非凸な関数となる. よって, $\kappa^*(r, \nu)$ を最小化する r, ν を探索するためには, 上記の 2 分探索に加えて他の非線形最適化アルゴリズムを併用する必要がある. たとえば, ν, r に関するメッシュ探索を行なうことなどはその一手法である. その際, 各 $\nu > \rho(A_c)^2$ に対して, ある $r > 0$ で (15), (29), (30) 式が可解とならなかった場合, r を小さくすれば必ず可解となり $\kappa^*(r, \nu)$ を求めることができる.

4. 数 値 例

ここでは, 数値例を用いて提案法の有効性を検証する. 対

Fig. 4 state trajectories

Fig. 5 response of duty-ratio

象とするシステムは次式で与えられる 2 次の不安定系である.

$$A_c = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \end{bmatrix}$$

A_c の固有値はすべて正の実数である. このとき, 以下の各設計パラメータ

$$h = 0.03, \quad \beta = 1.1, \quad V^T = [0 \quad 1]$$

に対して, 定理 9 を用いて状態フィードバックゲイン F を求める. ただし, r, ν はメッシュ探索を行なって $\kappa^*(r, \nu)$ の最小化を行なう. その結果, 以下の F, κ が得られた.

$$F = [-66.79 \quad -41.74], \quad \kappa = 27.87$$

得られた閉ループ系に対して以下の初期値

$$x_0^T = [-0.05 \quad 0.025]$$

を与え, その状態軌跡をシミュレーションによって求めた. Fig. 4 の実線は連続時間システム, 丸印は離散時間システムの軌跡をそれぞれあらわしている. いずれの場合も状態は原点に収束していることが確認できる. Fig. 5 はデューティ比の応答をあらわしており, 縦軸は一般化されたデューティ比, 横軸は時間である. デューティ比も 0 に収束しており, この図からも安定化されていることが確かめられる.

Fig. 6, 7 は初期値を

$$x_0^T = [-0.5 \quad 0.25]$$

Fig. 6 state trajectories

Fig. 7 response of duty-ratio

Fig. 8 domain of attraction and its bound

とした場合の結果である。ただし、 $|\delta_k| > 1$ の場合には $\delta_k = 1$ としてある。初期値が大きくなったため δ_k が $k=0, 1$ において 1 で飽和しているが、この場合でも安定化は達成されている。

Fig. 8 の実線で描かれた楕円領域は定理 4 で与えられる不変集合 D を図示したものである。一方、点で描かれた領域は実際の吸引領域を数値的に求めたものである。具体的には、50 ステップ後の状態のユークリッドノルムが 0.1 未満となるような初期値をあらわしている。点が描かれていない領域の初期値からの状態軌道は、リミットサイクルに収束するか、あるいは発散していると考えられる。Fig. 8 より、 D が実際に安定となる領域を保証しているということが確かめられる。ただし、理論的に保証される不変集合は実際の吸引領

域よりも小さく、保守的な結果となっている。

x_{e+} , x_{e-} はそれぞれ $u(t) = u_0$, $-u_0$ とした場合の (1) 式の平衡点である。また、2つの曲線は $u(t) = u_0$, $-u_0$ の場合にそれぞれ x_{e-} , x_{e+} を通る解軌跡を描いたものである。位相面解析より、この2つの曲線によって囲まれる閉領域が任意の時刻での切換を許した際に u_0 と $-u_0$ を用いて原点に収束させることのできる初期状態の集合となることが示される。逆に、初期状態がこの領域の外にあった場合、PWM に限らず u_0 , $-u_0$, 0 をどのように切換えても状態は発散する。Fig. 8 より、提案法により得られる安定化可能領域は位相面解析により得られる安定化可能領域よりも保守的な結果ではあるが、少なくとも無視できるほど小さな領域にはなっていない。

5. おわりに

本論文では、3 値の記号入力を有する制御対象に対し、PWM 型の制御入力を用いて原点を指数安定化する手法を提案した。具体的には、サンプル時刻上での振舞いを支配する離散時間非線形システムを導出し、2 次安定性に基づく安定化制御則とその制御則による不変集合を求める手法を与えた。記号入力に基づく制御則を導出する際、位相面解析に基づいた設計はとくに高次の制御対象に対してきわめて困難であるが、提案手法を用いれば次数が高い場合にも比較的容易に制御則を求めることができる。

参考文献

- 1) A. Bicchi, A. Marigo and B. Piccoli: On the Reachability of Quantized Control Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., **47**-4, 546/563 (2002)
- 2) D. Liberzon and A.S. Morse: Basic Problems in Stability and Design of Switched Systems, IEEE Control Systems Magazine, **19**-5, 59/70 (1999)
- 3) J. Raisch: Control of Continuous Plants by Symbolic Output Feedback, Hybrid Systems, 370/390 (1994)
- 4) Z. Sun and D. Zheng: On Reachability and Stabilization of Switched Linear Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., **46**-2, 291/295 (2001)
- 5) Z. Sun, S.S. Ge and T.H. Lee: Controllability and Reachability Criteria for Switched Linear Systems, Automatica, **38**-5, 775/786 (2002)
- 6) I. Flugge-Lotz: Discontinuous and Optimal Control, McGraw-Hill (1968)
- 7) L. Hou and A.N. Michael: Stability Analysis of Pulse-Width-Modulated Feedback Systems, Automatica, **37**-9, 1335/1349 (2001)
- 8) S. Almér, U. Jönsson, C.-Y. Kao and J. Mari: Stability Analysis of a Class of PWM Systems Using Sampled-Data Modeling, Proc. 42nd IEEE Conf. Decision Contr., 4794/4799 (2003)
- 9) S. Almér, U. Jönsson, C.-Y. Kao and J. Mari: Global Stability Analysis of DC-DC Converters Using Sampled-Data Modeling, Proc. Amer. Contr. Conf., 4549/4554 (2004)
- 10) W.L. De Koning: Digital Optimal Reduced-Order Control of Pulse-Width-Modulated Switched Linear Systems, Automatica, **39**-11, 1997/2003 (2003)
- 11) H. Fujioka, C.-Y. Kao, S. Almér and U. Jönsson: Sampled-Data H_∞ Control Design for a Class of PWM Systems,

- Proc. 44th IEEE Conf. Decision Contr., 4499/4504 (2005)
- [12] 富田, 浅井: PWM 型制御入力に基づく安定化制御, 計測自動制御学会論文集, **42-2**, 129/138 (2006)
- [13] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM (1994)
- [14] A. Packard and J. Doyle: Quadratic Stability with Real and Complex Perturbations, IEEE Trans. Automat. Contr., **35-2**, 198/201 (1990)
- [15] I.R. Petersen: A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems, Syst. Contr. Lett., **8-4**, 351/357 (1987)
- [16] R. Kalman, Y. Ho and K. Narendra: Controllability of linear dynamical systems, Contributions to Differential Equations, **1**, 189/213 (1963)
- [17] A. Packard and J. Doyle: The Complex Structured Singular Value, Automatica, **29-1**, 71/109 (1993)
- [18] W. Rudin: Functional Analysis, McGraw-Hill (1991)
- [19] 谷島賢二: ルベーク積分と関数解析, 朝倉書店 (2002)
- [20] R.A. Horn and C.R. Johnson: Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press (1994)

《付 録》

[事実 11] 区間 $[a, b]$ で定義された任意の連続なベクトル値関数 $x(t)$ に関して, 以下の不等式が成立する^{18), 19)}.

$$\left\| \int_a^b x(t) dt \right\|_2 \leq \int_a^b \|x(t)\|_2 dt$$

[事実 12] 与えられた任意の正方行列 M に対して次式が成立する²⁰⁾.

$$\|e^M - I\| \leq e^{\|M\|} - 1$$

[補題 13] 区間 $[a, b]$ で定義される連続な任意の行列値関数 $M(t) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ について, 以下の不等式が成立する.

$$\left\| \int_a^b M(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|M(t)\| dt$$

(証明) 事実 11 より以下の関係が成立する.

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b M(t) dt \right\| &= \sup_{x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\left\| \int_a^b M(t) dt x \right\|_2}{\|x\|_2} \\ &= \sup_{x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\left\| \int_a^b M(t) x dt \right\|_2}{\|x\|_2} \\ &\leq \sup_{x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\int_a^b \|M(t)x\|_2 dt}{\|x\|_2} \\ &\leq \sup_{x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\int_a^b \|M(t)\| \cdot \|x\|_2 dt}{\|x\|_2} \\ &= \int_a^b \|M(t)\| dt \end{aligned}$$

[補題 14] $r > 0, Q > 0$ ($Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$), $M \in \mathbf{R}^n$ が任意に与えられたものとする. ここで, $\mathcal{D}$ は (17) 式で定められる集合とし, さらに, 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して $\delta(x) = MQ^{-1}x$ とする. このとき, $x \in \mathcal{D}$ ならば $|\delta(x)| \leq r$ が成立立つ.

(証明) $M = 0$ ならばあきらかに成立立つ.

つぎに $M \neq 0$ と仮定する. まず, あきらかに

$$MQ^{-1}M^T > 0, MQ^{-1}M^T - MQ^{-1}M^T \geq 0$$

が成立立つ. さらに, $Q > 0$ より

$$\begin{aligned} MQ^{-1}M^T - MQ^{-1}M^T &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} MQ^{-1}M^T & M \\ M^T & Q \end{bmatrix} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow Q - \frac{M^T M}{MQ^{-1}M^T} &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

が導かれる. 一方, $x \in \mathcal{D}$ より次式が成立立つ.

$$\frac{r^2}{MQ^{-1}M^T} - x^T Q^{-1} x \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

ところで,

$$\frac{r^2 - |\delta(x)|^2}{MQ^{-1}M^T} = \frac{r^2}{MQ^{-1}M^T} - \frac{x^T Q^{-1} M^T M Q^{-1} x}{MQ^{-1}M^T}$$

であり, さらに (A.1), (A.2) 式より次式が成立立つ.

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{MQ^{-1}M^T} - \frac{x^T Q^{-1} M^T M Q^{-1} x}{MQ^{-1}M^T} \\ &\geq \frac{r^2}{MQ^{-1}M^T} - x^T Q^{-1} Q Q^{-1} x \\ &= \frac{r^2}{MQ^{-1}M^T} - x^T Q^{-1} x \geq 0 \end{aligned}$$

仮定より $MQ^{-1}M^T > 0$ であるので $r^2 - |\delta(x)|^2 \geq 0$, すなわち $|\delta(x)| \leq r$ である. $\square$

[著 者 紹 介]

富 田 健太郎 (正会員)

2005 年大阪大学大学院工学研究科電子制御工学専攻修了. 同年株式会社リコーに就職し, 現在に至る.

浅 井 徹 (正会員)

1996 年東京工業大学大学院理工学研究科制御工学専攻修了. 同年日本学術振興会特別研究員. 99 年大阪大学大学院工学研究科助手, 2002 年同研究科講師, 2005 年同研究科助教授となり, 現在に至る. システム制御情報学会の会員. 博士 (工学).