パラメータに対し区分線形なスケジュールドゲインの設計法

濱田 吉郎*・大谷 崇*

木田 隆**・長塩 知之**

Synthesis of State Feedback Scheduled Gains Piecewise-linear on Parameters

Yoshiro HAMADA*, Takashi OHTANI*,
Takashi KIDA** and Tomoyuki NAGASHIO**

This paper proposes a new synthesis of a gain scheduling controller. Using the dilation lemma, the synthesis condition is derived in terms of linear matrix inequalities with a line-search parameter, which can be solved numerically. Although previous design methods guarantee control performance for every parameter value, resultant gains tend to be too complicated to be implemented in a real system. In contrast, our method yields simple scheduling laws which are preferable for implementation. Derived scheduling laws are piecewise-linear on scheduling parameters and have fewer grid points than scheduling laws of a previous method. Since the synthesis is based on parameter-dependent Lyapunov functions, simple scheduling laws can be derived without deteriorating the performance of the closed loop system. A numerical example demonstrates the effectiveness of the proposed method.

Key Words: gain scheduling control, linear parameter varying system, parameter-dependent Lyapunov variable, dilated LMI

1. はじめに

航空宇宙分野において扱われる制御対象は、そのダイナミクスが常に一定ではなく、変動するパラメータによって変化するものが多い。航空機を例にとると、空力係数が動圧や迎角によって変化し、各動作点において異なる挙動を見せる。また宇宙機では、太陽電池パドルが太陽方向を指向するために常に回転しており、その回転角によってダイナミクスが変化する。このような制御対象に対しては、常に一定のゲインで制御するのではなく、ダイナミクスの変動に応じたゲインスケジューリング制御が有効であると、古くから経験的に知られてきた。

初期のゲインスケジューリング制御は、ダイナミクスの変動が大きいいくつかのパラメータ値（「代表点」と呼ばれる）を選び、各代表点でのダイナミクスに対してゲインを設計し、他のパラメータ値においては設計したゲインを（線形補間な

どで）内挿することで、パラメータ変動に対応していた。この手法は現在でもしばしば用いられるが、代表点間の安定性や制御性能について理論的に保証することができないため、設計後にシミュレーション等で確認する作業が必要である。一方、ロバスト制御理論の発展に伴い、全パラメータ領域での制御性能を理論的に保証する設計手法の研究が進められてきた。特に LPV (Linear Parameter Varying) システムとして表現できる制御対象に関しては、数多くの研究がこれまでに成されている。初期の研究においては、Lyapunov 関数をパラメータ依存でない固定の関数として解析・設計条件が導出されていた（たとえば 1)~3) など）。同時に、Lyapunov 関数をパラメータ非依存と限定することによる解の保守性の問題も明らかになっていった。この保守性を排除するために、その後、パラメータ依存関数として Lyapunov 関数を導出する手法の研究が進められた^{4)~9)}。これらの研究では、保守性は排除できるものの、導出されるスケジュールドゲインが複雑なものとなっていた。これは導出されるゲインが Lyapunov 関数の一部を利用しているためである。保守性を排除するために、Lyapunov 関数を複雑なパラメータ依存関数として表現することで、導出されるゲインも同様に複雑なパラメータ依存関数となってしまうのである。この複雑さは実装時に大きな問題となる。すなわち、実装のためにより多くのメモリ量を必要とする、又は各パラメータ値においてその都度逆行列演算を必要とする、という問題が生じる。最新の計算機環境で実装できるのであればこれらは問題にはならないが、基

* 宇宙航空研究開発機構研究開発本部
調布市深大寺東町 7-44-1

** 電気通信大学 調布市調布ヶ丘 1-5-1

* Aerospace Research and Development Directorate, Japan
Aerospace Exploration Agency (JAXA), 7-44-1 Jindaiji
Higashi-machi, Chofu

** The University of Electro-Communications, 1-5-1 Chofu-
gaoka, Chofu

(Received July 26, 2007)

(Revised May 8, 2008)

本的に信頼性を重視する傾向にある航空宇宙分野においては、航空宇宙機での実績が十分とはいえない最新の計算機環境を実装で用いることはまれである。この場合、実装においては搭載計算機に極力負担をかけないスケジュールドゲインが必須となる。

これらの事情を踏まえ、本稿ではパラメータ依存 Lyapunov 関数を用いつつ実装に適したスケジュールドゲインを導出する設計法を提案する。パラメータ依存 Lyapunov 関数を求める手法として、スプライン型のパラメータ依存二次形式を利用する研究がすでに成されており^{5), 6)}、この手法を基に設計法を構築する。本稿では Lyapunov 関数の複雑さとゲインの複雑さを分離し、Lyapunov 関数の解のクラスを広げつつ簡便なゲインを導出する手法を提案する。設計条件はラインサーチパラメータ^(注1)を含む行列不等式で記述されるが、これは当該パラメータを固定すれば LMI (Linear Matrix Inequality; 線形行列不等式) 表現となるため、標準的な LMI ソルバを用いたラインサーチにより解を得ることができる。また本手法を用いると、設計時にある制約条件を課すことで、パラメータに関し区分線形なゲインを導出することができる。区分線形なゲインは、オンラインでの複雑な計算(逆行列演算など)を必要とせず、単純な線形補間でスケジューリングが可能なたため、搭載計算機への負荷が低く、実装上好ましい。またゲインの区分点の数も、従来手法よりも少なくすることが可能であり、実装時に必要なメモリ量を削減できる。導出されるゲインと制御性能を数値例で示し、従来の手法と比較する。

2. 問題設定

本稿では状態フィードバック系についてのみ取り扱う。以下の LPV システムを考える：

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)w + B_u(\theta)u, \\ z = C(\theta)x + D(\theta)w + D_u(\theta)u, \\ y = x, \end{cases} \quad (1)$$

ここで $x \in \mathbf{R}^n$ は制御対象の状態量、 $w \in \mathbf{R}^m$ は外生入力、 $u \in \mathbf{R}^{m_u}$ は制御入力、 $z \in \mathbf{R}^p$ は制御出力で $y \in \mathbf{R}^n$ は観測出力(ここでは状態量と等価)を表わす。一次元のスケジューリングパラメータ $\theta(t)$ は微分可能な関数で、その値と微分値は以下の領域に収まるものとする：

$$\begin{aligned} \theta(t) &\in \Theta_{\text{val}} := [\underline{\theta}, \bar{\theta}], \\ \dot{\theta}(t) &= \omega(t) \in \Omega_{\text{val}} := [\underline{\omega}, \bar{\omega}]. \end{aligned} \quad (2)$$

次式で表わされる静的状態フィードバックを考える：

$$\Gamma: u = F(\theta)x. \quad (3)$$

ゲイン $F(\theta)$ はパラメータ θ に応じて値が決定される、スケジュールドゲインである。以下、このフィードバック則 Γ と制御対象 Σ から構成される閉ループ系を、lower LFT を表

(注1) これは設計で用いるパラメータであり、制御対象の変動パラメータとは異なる。

わす $\mathcal{F}_l\{\cdot, \cdot\}$ を用いて $\mathcal{F}_l\{\Sigma, \Gamma\}$ と記述する。

LPV システムに対して、安定性と L_2 ゲイン性能を保証する以下の条件が知られている。これは有界実補題として知られている結果を、上記の状態フィードバックを含んだ LPV システム向けに書き直したものである。

[補題 1]⁴⁾ 任意の $(\theta, \omega) \in (\Theta_{\text{val}} \times \Omega_{\text{val}})$ において、以下の LMI 条件^(注2)

$$P(\theta) \gg 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{cl}(\theta, \omega) & B(\theta) & S^T(\theta) \\ B^T(\theta) & -\gamma I & D^T(\theta) \\ S(\theta) & D(\theta) & -\gamma I \end{bmatrix} \ll 0, \quad (5)$$

を満足する正数 γ と一回微分可能な対称行列値関数 $X(\theta) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ が存在するとき、閉ループ系 $\mathcal{F}_l\{\Sigma, \Gamma\}$ は指数安定かつ $\|\mathcal{F}_l\{\Sigma, \Gamma\}\| < \gamma$ となる。ただし

$$\begin{aligned} Q_{cl}(\theta, \omega) &= -\omega \frac{\partial X(\theta)}{\partial \theta} + X(\theta)A^T(\theta) + A(\theta)X(\theta) \\ &\quad + B_u(\theta)F(\theta)X(\theta) + X(\theta)F^T(\theta)B_u^T(\theta), \\ S(\theta) &= C(\theta)X(\theta) + D_u(\theta)F(\theta)X(\theta) \end{aligned}$$

であり、解 $X(\theta)$ による二次形式 $x^T(t)X^{-1}(\theta(t))x(t)$ は閉ループ系 $\mathcal{F}_l\{\Sigma, \Gamma\}$ の Lyapunov 関数となる。

3. 伸張補題による条件の導出

ある LMI に対して等価な伸張型 LMI (dilated^(注3) LMI)^{10), 11)}を与える「伸張補題 (dilation lemma)」を用いることで、 $F(\theta)$ と $X(\theta)$ の積の項を含まない、補題 1 と等価な定理が導かれる。

《定理 1》 任意の $(\theta, \omega) \in (\Theta_{\text{val}} \times \Omega_{\text{val}})$ において、以下の条件

$$X(\theta) \gg 0, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} Q(\theta) & B(\theta) & X(\theta)C^T(\theta) & -X(\theta) \\ B^T(\theta) & -\gamma I & D^T(\theta) & 0 \\ C(\theta)X(\theta) & D(\theta) & -\gamma I & 0 \\ -X(\theta) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} B_u(\theta)F(\theta) \\ 0 \\ D_u(\theta)F(\theta) \\ I \end{bmatrix} G(\theta, \omega) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -\epsilon I \end{bmatrix} + (*)^T \ll 0, \quad (7)$$

$$\left(Q(\theta) = -\omega \frac{\partial X(\theta)}{\partial \theta} + X(\theta)A^T(\theta) + A(\theta)X(\theta) \right),$$

((*)^T は直前の項の転地を表わす) を満足する正数 $\gamma, \epsilon, -$

(注2) 不等式 $P(\theta) \gg 0$ ($P(\theta) \ll 0$) は、ある正数 α について、任意の $\theta \in \Theta_{\text{val}}$ において $P(\theta) \geq \alpha$ ($P(\theta) \leq -\alpha$) が成り立つことを表わしている。

(注3) 又は extended/enhanced LMI^{12), 13)}。

回微分可能な対称行列値関数 $X(\theta) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ および行列値関数 $G(\theta, \omega) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ が存在するとき、閉ループ系 $\mathcal{F}_l\{\Sigma, \Gamma\}$ は指数安定かつ $\|\mathcal{F}_l\{\Sigma, \Gamma\}\| < \gamma$ となる。

(証明) 証明は文献 10) および 11) と同様であり、補題 1 に対する定理 1 の必要十分性が、直交行列および Schur 補題を用いることで証明される。□

4. 提案する設計手法

4.1 有限個の行列不等式による条件の記述

上述の条件式はパラメータ依存行列不等式であるが、文献 5) で提案された手法により、有限個の行列不等式から解を求めることができる。ここでは、(1) 式に現れるすべての行列は θ に関して区分線形関数と仮定する。たとえば $A(\theta)$ は、

$$A(\theta) = A_i^\Sigma + \frac{\theta - \theta_i^\Sigma}{\theta_{i+1}^\Sigma - \theta_i^\Sigma} (A_{i+1}^\Sigma - A_i^\Sigma), \quad (8)$$

$$\theta \in [\theta_i^\Sigma, \theta_{i+1}^\Sigma], i = 0, 1, \dots, N_\Sigma,$$

と表わされるとする。ここで θ_i^Σ は $A(\theta)$ の区分点であり、 $\underline{\theta} = \theta_0^\Sigma < \theta_1^\Sigma < \dots < \theta_{N_\Sigma}^\Sigma < \theta_{N_\Sigma+1}^\Sigma = \bar{\theta}$ という関係にある。これらの θ_i^Σ による領域 Θ_{val} の分割を $D^\Sigma = \{\underline{\theta} = \theta_0^\Sigma, \theta_1^\Sigma, \dots, \theta_{N_\Sigma}^\Sigma, \theta_{N_\Sigma+1}^\Sigma = \bar{\theta}\}$ と記述し、 $A(\theta)$ 以外の行列も同じ分割 D^Σ をもつ区分線形関数とする。これは一般的な LPV システムを、パラメータに対し区分線形な行列値関数で近似したものといえる。近似誤差については、後述するとおり、ゲイン設計時に考慮に入れることも可能である。

まず Θ_{val} の分割のうち、 D^Σ の細分となるある分割 D

$$D = \{\underline{\theta} = \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N, \theta_{N+1} = \bar{\theta}\}, \quad N \geq N_\Sigma$$

を考える。これがパラメータ依存 Lyapunov 関数を構成する行列 $X(\theta)$ の分割となる。以下の手法により、 $X(\theta)$ は区分点 D をもつ θ の区分線形関数を平滑化したものとして導出される。 N が十分大きければ、 $X(\theta)$ は任意の連続な行列値関数を近似することができるため、設計における保守性を減じることができる。

そして別の分割として、 D の両端以外の区分点 $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$ のうち $N_\Gamma (\leq N)$ 個を区分点としてもつものを考え、 D^Γ と記述する。

$$D^\Gamma = \{\underline{\theta} = \theta_0^\Gamma, \theta_1^\Gamma, \dots, \theta_{N_\Gamma}^\Gamma, \theta_{N_\Gamma+1}^\Gamma = \bar{\theta}\} \quad (9)$$

$$(\theta_0^\Gamma < \theta_1^\Gamma < \dots < \theta_{N_\Gamma}^\Gamma < \theta_{N_\Gamma+1}^\Gamma, \quad \theta_*^\Gamma \in D).$$

つまり D^Γ は、 D の区分点の数 (つまり $X(\theta)$ の区分点の数) 以下の区分点をもつ Θ_{val} の分割である。後述するとおり、 D^Γ はフィードバックゲイン $F(\theta)$ の分割を表わす。

[例] $\Theta_{\text{val}} = [0, 6]$, $D^\Sigma = \{0, 6\}$ で、 $D = \{0, 2, 4, 6\}$, ($N_\Sigma = 0, N = 2$) の場合を考える。このとき D^Γ の候補は、 $\{0, 6\} (N_\Gamma = 0)$, $\{0, 2, 6\}$, $\{0, 4, 6\} (N_\Gamma = 1)$ および $\{0, 2, 4, 6\} (N_\Gamma = 2)$ である。

つぎの定理は、定理 1 の条件と等価な、有限個の行列不等式からなる条件を与える。文献 5) との対比のため、以下では

(7) 式中の $G(\theta, \omega)$ を ω に依存しない行列値関数 $G(\theta)$ とする (注 4)。

《定理 2》 つぎの (i) と (ii) は等価である。

(i) θ の連続値関数であるフィードバックゲイン $F(\theta)$, 1 回微分可能な対称行列値関数 $X(\theta)$, 正な行列値関数 $G(\theta)$ および正数 γ, ϵ が存在して、任意の $(\theta, \omega) \in (\Theta_{\text{val}} \times \Omega_{\text{val}})$ において (6), (7) 式を満たす。

(ii) Θ_{val} の分割 D^Σ , その細分となる分割 D , (9) 式で記述される分割 D^Γ , n 次対称行列 $X_k (k = \{0, 1, \dots, N+1\})$, n 次の正方行列 $G_j^\Gamma (j = \{0, 1, \dots, N_\Gamma+1\})$, 行列 $W_j^\Gamma (j = \{0, 1, \dots, N_\Gamma+1\})$ および正数 γ, ϵ が存在して、 $\omega = \underline{\omega}, \bar{\omega}$ について以下の不等式を満足する：

$$X_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots, N+1, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{cl(k)} & B_k & S_k^T & R_k \\ B_k^T & -\gamma I & D_k^T & 0 \\ S_k & D_k & -\gamma I & -\epsilon D_{u(k)} W_k \\ R_k^T & 0 & -\epsilon W_k^T D_{u(k)}^T & -\epsilon(G_k + G_k^T) \end{bmatrix} \\ =: J_{cl(k)} < 0, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{cl(k)}^- & B_k & S_k^T & R_k \\ B_k^T & -\gamma I & D_k^T & 0 \\ S_k & D_k & -\gamma I & -\epsilon D_{u(k)} W_k \\ R_k^T & 0 & -\epsilon W_k^T D_{u(k)}^T & -\epsilon(G_k + G_k^T) \end{bmatrix} < 0, \\ k = 1, 2, \dots, N+1, \quad (12)$$

$$J_{cl(k)} + \frac{1}{2}(L_{cl(k)} + L_{cl(k)}^T) < 0, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (13)$$

$$\text{ただし, } G_k := G_j^\Gamma + \frac{\theta_k - \theta_j^\Gamma}{\theta_{j+1}^\Gamma - \theta_j^\Gamma} (G_{j+1}^\Gamma - G_j^\Gamma),$$

$$W_k := W_j^\Gamma + \frac{\theta_k - \theta_j^\Gamma}{\theta_{j+1}^\Gamma - \theta_j^\Gamma} (W_{j+1}^\Gamma - W_j^\Gamma), \\ (\text{for } k \text{ s.t. } \theta_j^\Gamma \leq \theta_k \leq \theta_{j+1}^\Gamma),$$

$$Q_{cl(k)} := A_k X_k + X_k A_k^T - \frac{\omega}{\Delta \theta_k} \Delta X_k \\ + B_{u(k)} W_k + W_k^T B_{u(k)}^T,$$

$$Q_{cl(k)}^- := A_k X_k + X_k A_k^T - \frac{\omega}{\Delta \theta_{k-1}} \Delta X_{k-1} \\ + B_{u(k)} W_k + W_k^T B_{u(k)}^T,$$

$$R_k := G_k - X_k - \epsilon B_{u(k)} W_k,$$

$$S_k := C_k X_k + D_{u(k)} W_k,$$

$$L_{cl(k)} := \begin{bmatrix} L_{cl(k)}^{11} & \Delta B_k & 0 & L_{cl(k)}^{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{cl(k)}^{31} & \Delta D_k & 0 & L_{cl(k)}^{34} \\ 0 & 0 & 0 & -2\epsilon \Delta G_k \end{bmatrix},$$

(注 4) 文献 6) の結果から、 G を ω にも依存した行列としても以下と同様の議論は可能と考えられるが、本稿の主旨から外れるためここでは扱わない。

$$\begin{aligned}
L_{cl(k)}^{11} &:= (\Delta A_k X_k + A_k \Delta X_k) \\
&\quad + (\Delta B_{u(k)} W_k + B_{u(k)} \Delta W_k), \\
L_{cl(k)}^{31} &:= (\Delta C_k X_k + C_k \Delta X_k) \\
&\quad + (\Delta D_{u(k)} W_k + D_{u(k)} \Delta W_k), \\
L_{cl(k)}^{14} &:= \Delta G_k - \Delta X_k - \epsilon (\Delta B_{u(k)} W_k + B_{u(k)} \Delta W_k), \\
L_{cl(k)}^{34} &:= -\epsilon (\Delta D_{u(k)} W_k + D_{u(k)} \Delta W_k),
\end{aligned}$$

である。\$A_k := A(\theta_k)\$ であり、\$B_k\$ など他のシステム行列についても同様に定義する。また \$\Delta\$ は差分を表わす (\$\Delta \theta_k := \theta_{k+1} - \theta_k\$, \$\Delta X_k := X_{k+1} - X_k\$, \$\Delta A_k := A_{k+1} - A_k\$ など)。(ii) が成り立つとき、(i) を満足する \$X(\theta)\$ と \$F(\theta)\$ の一つは、(10)–(13) 式を満足する \$X_k (k = 0, 1, \dots, N+1)\$ および \$W_j^\Gamma, G_j^\Gamma (j = 0, 1, \dots, N_\Gamma + 1)\$ を用いて以下のように与えられる。まず分割 \$D\$ をもつ行列 \$X_S(\theta)\$ を以下のように定義する：

$$X_S(\theta) = X_k + \frac{\theta - \theta_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} (X_{k+1} - X_k),$$

$$\text{for } \theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}], k = 0, 1, \dots, N.$$

また分割 \$D^\Gamma\$ をもつ行列 \$W_S^\Gamma(\theta), G_S^\Gamma(\theta)\$ を以下のように定義する：

$$W_S^\Gamma(\theta) = W_j^\Gamma + \frac{\theta - \theta_j^\Gamma}{\theta_{j+1}^\Gamma - \theta_j^\Gamma} (W_{j+1}^\Gamma - W_j^\Gamma),$$

$$G_S^\Gamma(\theta) = G_j^\Gamma + \frac{\theta - \theta_j^\Gamma}{\theta_{j+1}^\Gamma - \theta_j^\Gamma} (G_{j+1}^\Gamma - G_j^\Gamma),$$

$$\text{for } \theta \in [\theta_j^\Gamma, \theta_{j+1}^\Gamma], j = 0, 1, \dots, N_\Gamma.$$

行列 \$X(\theta)\$ は以下のようにおけばよい：

$$X(\theta) = \frac{1}{l} \int_{\theta - \frac{1}{2}}^{\theta + \frac{1}{2}} X_S(h) dh,$$

ここで \$l\$ は十分小さなある正数である。そしてフィードバックゲイン \$F(\theta)\$ は以下のように構成される：

$$F(\theta) = W_S^\Gamma(\theta) G_S^{\Gamma^{-1}}(\theta). \quad (14)$$

(証明) (6), (7) 式は、文献5) で扱われている不等式のクラスに含まれるため、(ii) \$\Rightarrow\$ (i) は当該文献と同様に、(6), (7) 式を \$X(\theta) \rightarrow X_S(\theta), G(\theta) \rightarrow G_S^\Gamma(\theta), F(\theta) \rightarrow W_S^\Gamma(\theta) G_S^{\Gamma^{-1}}(\theta)\$ と置き換えた不等式が、\$D\$ の各区分点間 \$\theta \in [\theta_k - \frac{1}{2}, \theta_{k+1} + \frac{1}{2}]\$ において成り立つことから示すことができる。ただし本稿では、\$X_S(\theta)\$ の分割 (\$D\$) と、\$W_S^\Gamma(\theta)\$ および \$G_S^\Gamma(\theta)\$ の分割 (\$D^\Gamma\$) が異なっているため、\$\theta_k \notin D^\Gamma\$ でも議論ができるように、\$G_j^\Gamma, W_j^\Gamma\$ の代わりに定理中で定義した \$G_k, W_k\$ を用いて議論する必要がある。

(i) \$\Rightarrow\$ (ii) も、\$D^\Gamma = D\$ と選ぶことで、十分細かな \$D\$ に対して (ii) が成り立つことが当該文献と同様に示される。 \$\square\$

4.2 制御系設計問題への適用

上記の条件は、\$L_2\$ ゲイン性能を満足する状態フィードバッ

クの存在条件であるが、(10)–(13) 式を解くことで^(注5) (14) 式のスケジュールドゲインを設計することができる。本手法の主な特徴はつぎの二点にまとめられる：

- フィードバックゲイン \$F(\theta)\$ の導出に、Lyapunov 関数を構成する行列 \$X_S(\theta)\$ が直接関与しない。

- \$G_*^\Gamma\$ を共通の行列 (\$G_*^\Gamma = G\$) として不等式 (10)–(13) を解くと、\$G_S^\Gamma(\theta)\$ がパラメータ非依存となり、\$\theta\$ に関して区分線形なフィードバックゲイン \$F(\theta)\$ を導出できる。

たとえば文献5) の設計法では、\$F(\theta)\$ の導出に \$X_S(\theta)\$ の逆行列を用いているため、\$F(\theta)\$ は \$X_S(\theta)\$ の分割 \$D\$ と同じ分割をもたざるを得なかった。保守的でない解を得るためには、\$X_S(\theta)\$ の分割を増やす必要があるため、制御性能と実装時に必要なメモリ量 (ゲインの区分点の数に比例) の間にトレードオフが存在した。しかし本手法では、\$X_S(\theta)\$ が分割 \$D\$ をもつ一方、\$F(\theta)\$ の導出に用いられるパラメータ依存行列 \$W_S^\Gamma(\theta)\$ および \$G_S^\Gamma(\theta)\$ は、\$D\$ の部分集合である分割 \$D^\Gamma\$ をもつ。結果的に、より保守的でない Lyapunov 関数を得るために \$X_S(\theta)\$ の区分点の数を増やしても、分割 \$D^\Gamma\$ の区分点の数を抑えることができれば、少ない区分点をもつ \$F(\theta)\$ の導出が可能となる。

また区分線形なフィードバックゲインが得られた場合には、スケジュール時に逆行列計算が不要となり、線形補間という単純な演算のみでスケジュールリングが可能となる。そのような区分線形なゲインは文献3) の手法でも導出可能であるが、本稿では Lyapunov 関数をパラメータ依存として導出することで保守性が大きく排除されている点が異なる。

上述の利点がある一方、(10)–(13) 式を解く際には、\$D\$ だけでなくゲインの分割である \$D^\Gamma\$ もあらかじめ与えておかなければならないことに注意が必要である。つまり、たとえばつぎのような問題：「閉ループの \$L_2\$ ゲインが \$\gamma_0\$ 以下となるスケジュールドゲインのうち、\$N_\Gamma\$ が最小となるものを導出せよ」に対しては、ヒューリスティックに \$D^\Gamma\$ を与えては解を求めるという繰り返し操作が必要となる。このような限界があるものの、実装上の制約などであらかじめ \$D^\Gamma\$ が決められている場合には、条件式を解くだけで \$L_2\$ ゲインを最小とするフィードバックゲインが得られる。メモリ量の制約から、\$N_\Gamma = 0\$ とする必要がある場合などに対しては、十分実用的であると考えられる。

4.3 一般的な LPV システムにおける設計手順

制御対象の各システム行列が、(8) 式のようにパラメータ \$\theta\$ に関して区分線形な場合は、(10)–(13) 式を直接解くことによって、(14) 式のスケジュールドゲインを求めることができる。より一般的な LPV システムに対しては、以下のように「区分線形なモデル」と近似誤差である「ノルム有界変動」の二つの項で制御対象を記述することで、上記の条件を適用できる。たとえば \$A\$ 行列ならば、区分線形関数で近似した行列

(注5) 不等式 (10)–(13) は \$\epsilon\$ を固定値とすれば LMI となるため、標準的な LMI ソルバを用いて、\$\epsilon\$ をパラメータとするラインサーチを実行することで解を得ることができる¹¹⁾。

Fig. 1 Generalized plant and perturbation Δ

$\bar{A}(\theta)$ を用いて,

$$A(\theta) = \bar{A}(\theta) + E_a \Delta_a F_a, \quad \|\Delta_a\| \leq 1$$

とモデル化する. ここで $\Delta_a \in \mathbf{R}^{n^2 \times n^2}$ は, A 行列の各要素の近似誤差を正規化した対角行列であり, 行列 E_a, F_a は近似誤差の最大値から求められる (文献 14) を参照). 他のシステム行列についても同様に記述すると, LPV システムは Fig. 1 のような LFT 形式で表現される. 図中 $\bar{\Sigma}$ は区分線形関数で近似されたシステムの拡大系である:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(\theta) & \bar{B}(\theta) & E_a & E_b & E_{bu} & 0 & 0 & 0 & \bar{B}_u(\theta) \\ \bar{C}(\theta) & \bar{D}(\theta) & 0 & 0 & 0 & E_c & E_d & E_{du} & \bar{D}_u(\theta) \\ F_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{bu} \\ F_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{du} \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

また $\Delta_\Sigma = \text{diag}(\Delta_a, \Delta_b, \Delta_{bu}, \Delta_c, \Delta_d, \Delta_{du})$, Δ_p は制御性能を考慮するための架空のフルブロック, $\Delta = \text{diag}(\Delta_p, \Delta_\Sigma)$, κ は制御出力に対する定数重みである. 図の一般化制御対象について (10)–(13) 式を解き, 閉ループ系 $M(\theta)$ が $\|M(\theta)\| < 1$ となる解が存在すれば, メインループ定理から $\mathcal{F}_l\{\bar{\Sigma}, \Gamma\}$ は近似誤差 Δ_Σ に対して安定かつ $\|\mathcal{F}_l\{\mathcal{F}_l\{\bar{\Sigma}, \Gamma\}, \Delta_\Sigma\}\| = \|\mathcal{F}_l\{\Sigma, \Gamma\}\| < \kappa$ が成り立つ. ただし Δ_Σ はブロック対角構造をもつため, 解く際には構造を考慮して適切なスケーリング行列を導入することが望ましい.

5. 数値例

つぎの LPV システムを考える¹⁵⁾.

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)w + B_u(\theta)u, \\ z = C(\theta)x + D(\theta)w + D_u(\theta)u, \end{cases} \quad (15)$$

ただし

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \theta^2 \\ -4 + 0.1\theta & -5 + 0.2\theta + 0.1\theta^2 \end{bmatrix}$$

$$B(\theta) = B_u(\theta) = \begin{bmatrix} \theta \\ 1 + \theta^2 \end{bmatrix},$$

$$C(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_u(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

パラメータの領域は $\Theta_{\text{val}} = [-3, 3]$, $\Omega_{\text{val}} = [-1.5, 1.5]$ とする.

このシステムの安定性を保証し, L_2 ゲインを最小にする状態フィードバックゲイン $F(\theta)$ を, 第 4.3 節の手法を用いて求める. 制御対象の近似および Lyapunov 関数の区分点数を両端を含めて $31(N_\Sigma = N = 29)$ と設定し, 区分点は等間隔に配置する. このとき, $A(\theta)$ および $B(\theta) = B_u(\theta)$ は以下のようにモデル化される:

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \bar{A}(\theta) + E_a \Delta_a F_a \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 + \bar{f}(\theta) \\ -4 + 0.1\theta & -5 + 0.2\theta + 0.1\bar{f}(\theta) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \Delta_a \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} B(\theta) &= B_u(\theta) = \bar{B}(\theta) + E_b \Delta_b F_b \\ &= \begin{bmatrix} \theta \\ 1 + \bar{f}(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta_b \cdot 0.01, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\|\Delta_a\| \leq 1, \quad \|\Delta_b\| \leq 1.$$

ここで $\bar{f}(\theta)$ は, θ^2 を両端を含めて 31 の区分点を用いて区分線形に近似した関数である. 本例では $A(\theta)$ および $B(\theta)$ の構造から $\Delta_a = \Delta_b \in \mathbf{R}^{1 \times 1}$ であり, 摂動 Δ_Σ は repeated scalar ブロックとなる.

区分線形なゲインを得るために $G_S^\Gamma(\theta)$ はパラメータ非依存 ($G_S^\Gamma(\theta) = G_*^\Gamma = G$) とし, ゲインの区分点数については, $N_\Gamma = 0$ (区分点数 2: $D^\Gamma = \{-3, 3\}$), $N_\Gamma = 1$ (区分点数 3: $D^\Gamma = \{-3, 0, 3\}$) の 2 ケースについてゲインを求めた. 最小化した L_2 ゲインの上界値を, 従来の手法による結果と比較する形で Table 1 にまとめた.

5.1 文献 15) との性能比較

文献 15) では, 本稿と同様に伸張補題を用いて設計条件を導出している. ただし, 本稿の問題設定とは異なり, 各システム行列がスケジューリングパラメータの有理関数として記述される LPV システムを, 近似等を用いず直接取り扱うことができるという利点がある. この手法を用いて, (15) 式のシステムに対して直接スケジュールドゲインを求めた.

提案する手法で $N_\Gamma = 0$ のケースでは, 文献 15) の手法よりも L_2 ゲイン性能が若干 (0.5%程度) 悪くなっているが, $N_\Gamma = 1$ では約 20%性能が向上している. 文献 15) および $N_\Gamma = 1$ で求めたゲインを用いて, パラメータ $\theta(t)$ と外乱 $w(t)$ を以下のように与えた場合の応答を Fig. 2 および Fig. 3 に示す.

$$\theta(t) = 3 \sin(0.5t),$$

$$w(t) = \begin{cases} \exp(-2(t-2)) \sin(5(t-2)), & 2 \leq t \leq 6, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Table 1 Minimized upper bound of L_2 gain in each case

Reference 15)	Reference 5)	Proposed method ($G_S^\Gamma(\theta) = G_*^\Gamma = G$)	
		$N_\Gamma = 0$	$N_\Gamma = 1$
1.2441	0.9881	1.2501	0.9991

Fig. 2 Response of $z_1(t)$ **Fig. 3** Response of $z_2(t)$

特に $z_1(t)$ の応答において、性能の差が大きく現れているのがわかる。

5.2 文献 5) との性能比較

本稿の定理 2 の基礎となる文献 5) の手法を用いても、ある種のスケジュールドゲインを設計することが可能である。提案する手法と同様に、 $N_\Sigma = N = 29$ と設定して、(16), (17) 式を用いて設計を行なった。なお、この手法では N_Γ は常に N と同じ値となる。

Table 1 にあるとおり、約 1% の差ではあるが、提案する手法 ($N_\Gamma = 1$) は文献 5) の手法よりもやや劣った性能となっている。

制御性能という観点では、提案する手法は従来手法から必ずしも改善されていないということになるが、以下では実装の容易さという観点から、従来手法との比較を行なう。

5.3 スケジュール則の構造に関する考察

上で述べたスケジュールドゲインの構造について考察する。スケジュール則はそれぞれ以下のような式で表わされる：

文献 15) の手法

$$F(\theta) = (Y_0 + \theta Y_1)(X_0 + \theta X_1)^{-1}, \quad (18)$$

$$(X_* \in \mathbf{R}^{2 \times 2}, Y_* \in \mathbf{R}^{1 \times 2}).$$

文献 5) の手法

$$F(\theta) = W_S(\theta) X_S^{-1}(\theta), \quad (19)$$

$$\text{where } X_S(\theta) = X_k + \frac{\theta - \theta_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} (X_{k+1} - X_k),$$

Table 2 Number of real parameters required for implementation

Reference 15)	Reference 5)	Proposed method ($N_\Gamma = 1, G_*^\Gamma = G$)
$n(2m_u + n + 1)$ =10	$n(m_u + \frac{n+1}{2})(N+2)$ =155	$m_u n (N_\Gamma + 2)$ =6

$$W_S(\theta) = W_k + \frac{\theta - \theta_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} (W_{k+1} - W_k),$$

$$\text{for } \theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}], k = 0, \dots, 29.$$

$$(X_* \in \mathbf{R}^{2 \times 2}, W_* \in \mathbf{R}^{1 \times 2}).$$

提案する手法 ($N_\Gamma = 1, G_S^\Gamma(\theta) = G_*^\Gamma = G$)

$$\begin{aligned} F(\theta) &= W_S^\Gamma(\theta) G_S^{\Gamma^{-1}}(\theta) \\ &= \begin{cases} \{W_0^\Gamma + \frac{\theta+3}{3}(W_1^\Gamma - W_0^\Gamma)\} G^{-1}, & -3 \leq \theta \leq 0, \\ \{W_1^\Gamma + \frac{\theta}{3}(W_2^\Gamma - W_1^\Gamma)\} G^{-1}, & 0 \leq \theta \leq 3, \end{cases} \\ &= \begin{cases} F_0 + \frac{\theta+3}{3}(F_1 - F_0), & -3 \leq \theta \leq 0, \\ F_1 + \frac{\theta}{3}(F_2 - F_1), & 0 \leq \theta \leq 3, \end{cases} \quad (20) \end{aligned}$$

$$(F_* \in \mathbf{R}^{1 \times 2}).$$

これらの実装時に必要なメモリ量について考える。Table 2 は各ゲインの実装に必要な実数パラメータの数を表わしている。本例題では、(18) 式のゲインの実装に必要なパラメータ数は 10 であるのに対し、提案する手法である (20) 式では 6 と、データ量として 40% 減となっており、性能面だけではなく実装の観点からも有効であることがわかる。

また、(19) 式との比較では、パラメータ数 155 と約 25 倍もの差となっている。この大きな差の原因は、文献 5) の手法では、Lyapunov 関数の区分の数 N とゲインの区分の数 N_Γ が常に等しくならざるを得ない点にある。確かに文献 5) の手法では、Lyapunov 関数の区分を細かく取ることにより良い制御性能を得ることが可能であるが、それと同時に細かいゲインの区分も要求することになる。結果的に、オンボード計算機への実装が困難なほどのメモリ量を必要とするゲインを導出してしまいうこともあり得る。それに対してわれわれの手法は、ゲインの区分の数 N_Γ も設計パラメータとして扱えるため、Lyapunov 関数に起因する保守性を排除しつつ、ゲインの区分点の数を抑えた設計が可能という利点をもつ。ゲインの区分点の数を、要求される制御性能と実装可能性から総合的に判断して、設計時に設定することができる。

またオンラインでスケジュールする際に必要な演算についても言及しておく。(18), (19) 式で表わされるゲインは、 θ に依存する逆行列を含んでいるため、スケジュールリングサイクルごとに逆行列演算を行なう必要があり、逆行列のサイズによっては搭載計算機に多大な演算負荷をかけることになる。それに対して、(20) 式で必要とされる演算は、単純な線形補間のみであり、貧弱な搭載計算機でも実装が可能である。この点においても、提案する手法により導出されたスケジュール則は、従来手法によるものと比較して優れているといえる。

6. おわりに

パラメータに対し区分線形なスケジュールドゲインを、パラメータ依存二次形式の Lyapunov 関数を用いて導出する設計手法を提案した。本手法により、従来手法と比較しても制御性能を大きく劣化させることなく、実装が容易なスケジュールドゲインを導出することが可能となる。

今後の課題としては、ゲインの区分点を適切に設定する手法の開発が挙げられる。本稿の例題では、区分点数3の場合の区分点として、先験的に $D^r = \{-3, 0, 3\}$ として設計を行ったが、必ずしもこの組み合わせが最適とはいえないため、同数の区分点の中でも最適な区分点の組み合わせをゲインと同時に設計できることが望ましい。また本稿の手法は、ラインサーチパラメータを含む LMI を解く必要があるため、設計に必要な計算量の改善についても検討の余地がある。

本稿では状態フィードバック系のみを取り扱っているが、出力フィードバック系でも限定的ながら類似の結果を得ることは可能である。柔軟構造衛星の出力フィードバック型姿勢制御系への適用についてはすでに検討を始めており、シミュレーションにおいて良好な結果を得ている¹⁶⁾。詳しい成果については今後報告する予定である。

参考文献

- 1) G. Becker and A. Packard: Gain-Scheduled State-Feedback with Quadratic Stability for Uncertain Systems, Proceedings of the American Control Conference, 2702/2703 (1991)
- 2) A. Packard: Gain Scheduling via Linear Fractional Transformation, Systems & Control Letters, **22**-2, 79/92 (1994)
- 3) P. Apkarian and P. Gahinet: A Convex Characterization of Gain-Scheduling H_∞ Control, IEEE Transactions on Automatic Control, **40**-7, 853/864 (1995)
- 4) R. Watanabe, K. Uchida, M. Fujita and E. Shimemura: L_2 Gain and H_∞ Control of Linear Systems with Scheduling Parameter, Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, 1412/1414 (1994)
- 5) 増淵, 久米, 示村: スプライン型のパラメータ依存二次形式を用いたゲインスケジューリング制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, **35**-3, 319/325 (1999)
- 6) I. Masubuchi: Numerical Solution to a Class of Parameter-Dependent Convex Differential Inequalities, Transaction of the Society of Instrument and Control Engineers, **36**-3, 248/254 (2000)
- 7) T. Azuma, R. Watanabe and K. Uchida: An Approach to Solving Parameter-Dependent LMI Conditions Based on Finite Number of LMI Conditions, Proceedings of the American Control Conference, 510/514 (1997)
- 8) P. Gahinet, P. Apkarian and M. Chilali: Affine Parameter-Dependent Lyapunov Functions and Real Parametric Uncertainty, IEEE Transactions on Automatic Control, **41**-3, 436/442 (1996)
- 9) H.D. Tuan and P. Apkarian: Relaxations of Parameterized LMIs with Control Applications, International Journal of Robust and Nonlinear Control, **9**-2, 59/84 (1999)
- 10) Y. Ebihara and T. Hagiwara: New Dilated LMI Characterizations for Continuous-Time Control Design and Robust Multiobjective Control, Proceedings of the American Control Conference, 47/52 (2002)
- 11) T. Shimomura, M. Takahashi and T. Fujii: Extended-Space Control Design with Parameter-Dependent Lyapunov Functions, Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2157/2162 (2001)
- 12) M.C. de Oliveira, J.C. Geromel and J. Bernussou: Extended H_2 and H_∞ norm characterizations and controller parameterizations for discrete-time systems, International Journal of Control, **75**-9, 666/679 (2002)
- 13) P. Apkarian, H.D. Tuan and J. Bernussou: Continuous-Time Analysis, Eigenstructure Assignment, and H_2 Synthesis With Enhanced Linear Matrix Inequalities (LMI) Characterizations, IEEE Transactions on Automatic Control, **46**-12, 1941/1946 (2001)
- 14) 渡辺亮: ゲインスケジューリングによる設計法とその応用事例, 第19回制御技術部会研究会資料, 19/30 (1997)
- 15) Y. Ebihara and T. Hagiwara: A Dilated LMI Approach to Continuous-Time Gain-Scheduled Controller Synthesis with Parameter-Dependent Lyapunov Variables, Transaction of the Society of Instrument and Control Engineers, **39**-8, 734/740 (2003)
- 16) Y. Hamada, T. Ohtani, T. Kida and T. Nagashio: Gain Scheduling Controller Design for Engineering Test Satellite-VIII, Proceedings of the 17th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace (2007)

[著者紹介]

濱田 吉郎 (正会員)

1972年3月8日生。96年東京大学大学院工学系研究科修士課程修了(計数工学専攻)。同年博士後期課程進学。98年同課程中途退学。同年より科学技術庁航空宇宙技術研究所(現・宇宙航空研究開発機構(JAXA)研究開発本部)研究員。航空宇宙機のロバスト制御の研究に従事。

大谷 崇 (正会員)

2005年早稲田大学大学院理工学研究科修士課程修了(電気・情報生命専攻)。同年宇宙航空研究開発機構(JAXA)入社。現在、研究開発本部誘導・制御グループ開発員。宇宙機の姿勢・軌道制御系の研究開発に従事。

木田 隆 (正会員)

1949年7月2日生。73年東京大学工学部計数工学科卒業。同年科学技術庁航空宇宙技術研究所(現・宇宙航空研究開発機構)研究員。84年同所宇宙研究グループ主任研究官。96年電気通信大学機械制御工学科(現・知能機械工学科)教授。制御工学と宇宙工学の研究に従事。博士(工学)。

長塩 知之 (正会員)

2001年電気通信大学大学院電気通信学研究科機械制御工学専攻博士後期課程修了。同年同大学知能機械工学科助手。2007年同大学助教, 現在に至る。ロバスト制御の研究に従事。博士(工学)。