線形時不変不確定システムの可制御不変性と可観測不変性

橋本 智昭*・雨宮 孝**・藤井 裕矩***

Invariance of Controllability and Observability for Linear Time-invariant Uncertain Systems

Tomoaki HASHIMOTO*, Takashi AMEMIYA** and Hironori A. FUJII***

The controllability and the observability of linear uncertain systems are investigated here. The systems under consideration contain time-invariant uncertain parameters, which may take arbitrarily large values. In this case, the locations of uncertain elements in the system matrices play an important role. It is shown that a linear uncertain system is controllability and observability invariant if and only if the system has a particular geometric configuration called a complete generalized antisymmetric stepwise configuration (CGASC), which includes GASC defined by Wei¹⁾.

Key Words: linear systems, uncertain systems, controllability, observability, robust control

1. はじめに

近年、線形不確定システムの定数係数状態フィードバックによる安定化条件が数多く報告されている。これらは大きく2つに分類される。1つは不確定変数の変動幅に依存した条件であり、もう1つはそれに依存しない条件である。前者では不確定変動幅が適当に大きくなると安定化可能性を判別できなくなるが、後者では、任意の大きさの不確定変数に対して安定化可能性を確認できる。

任意の大きさの不確かさを許容する場合、不確定要素の位置が重要な役割を果たす。Weiは線形時不変不確定システムが定数係数状態フィードバックにより安定化可能となるための必要十分条件を導出した¹⁾。この条件は、システムが Generalized Antisymmetric Stepwise Configuration (GASC) と呼ばれる幾何学的構造を有することが、不確定要素の大きさにかかわらず特性方程式の根をすべて複素左半平面に配置することが可能であるための必要十分であることを示している。Tsujiノらは GASC がもつ幾何学的構造の意味をシステムの可制御不変性という観点から考察している²⁾。線形時不変不確定システムが、任意の大きさの不確定要素に対して可制御であることを可制御不変と定義し、GASCをもつことが

可制御不変であるための必要十分条件であることを示している。つまり、システムの安定化可能性はその可制御不変性と等価であることが示されている。

上記の結果では、対象とするシステムの状態変数がすべて既知であるという前提で研究が行なわれている。しかし、状態変数の一部分のみが出力より観測されるシステムが多く存在する。全状態変数を観測できない線形不確定システムの安定化問題を考えた場合、任意の大きさの不確定要素に対して可観測であること、つまり、可観測不変であることが、少なくとも安定化可能であるための必要条件になっていることが容易に推測される。したがって、本稿では、任意の大きさの変動幅を許容する線形時不変不確定システムが可制御不変かつ可観測不変であるための必要十分条件を導出することを目的とする。また、1入力全出力システムが可制御不変であるために最大限許容できる不確定要素構造に対して、同時に可観測不変性を達成するための必要最小限度のシステム構成を明らかにすることを目的とする。これを達成するため、本稿では GASC を拡張した Complete Generalized Antisymmetric Stepwise Configuration (CGASC) と呼ばれる新しい幾何学的構造を導入する。

本稿の構成は以下のとおりである。2章では、扱うシステムの定義、および、基本事項について述べる。3章では、前提となる補題を準備し、4章で主要結果を示す。5章で結論を述べる。

2. システムの記述

【定義】 以下のように記述されるシステムの集合を不確定システム集合と呼び、 Σ で表わす。

* 信州大学大学院工学系研究科 長野市若里 4-17-1

** 摂南大学経営情報学部 寝屋川市池田中町 17-8

*** 日本大学総合科学研究所 船橋市習志野台 7-24-1

* Graduate School of Engineering, Shinshu University, 4-17-1 Wakasato, Nagano

** Faculty of Business Administration and Information, Setsunan University, 17-8 Ikedanaka-machi, Neyagawa

*** College of Science and Technology, Nihon University, 7-24-1 Narashinodai, Funabashi

(Received January 9, 2008)

(Revised May 12, 2008)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}\quad (1)$$

ただし, $x \in \mathbb{R}^n$ は状態変数, $u \in \mathbb{R}^m$ は制御入力, $y \in \mathbb{R}^s$ は出力とする. 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{s \times n}$ の各要素は不確定であり, その変動幅は任意の大きさのコンパクト集合と仮定する. つまり, $A = \{a_{ij}\}$ に対して $\bar{a}_{ij} \geq a_{ij} \geq \underline{a}_{ij}$ であり, 同様に, $B = \{b_{ij}\}$ に対して $\bar{b}_{ij} \geq b_{ij} \geq \underline{b}_{ij}$ であり, $C = \{c_{ij}\}$ に対して $\bar{c}_{ij} \geq c_{ij} \geq \underline{c}_{ij}$ である. ここで, 上限と下限は任意であり, A, B, C の各要素は独立に任意の値をとることができる. $\bar{a}_{ij} = \underline{a}_{ij} = 0$ であるとき, $a_{ij} \equiv 0$ と表わす. 同様に, $\bar{b}_{ij} = \underline{b}_{ij} = 0$ であるとき $b_{ij} \equiv 0$, $\bar{c}_{ij} = \underline{c}_{ij} = 0$ であるとき $c_{ij} \equiv 0$ と表わす. a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} が, それぞれ, $\bar{a}_{ij} \times \underline{a}_{ij} > 0$, $\bar{b}_{ij} \times \underline{b}_{ij} > 0$, $\bar{c}_{ij} \times \underline{c}_{ij} > 0$, を満足するとき, 各要素は符号不変と呼ばれる.

本稿では便宜のため, 係数行列 A, B, C からなる不確定システム集合を $\Sigma(A, B, C)$ と表わす. このシステム集合において, 特に A と B の関係に注目するとき $\Sigma(A, B)$ を用いる. 同様に, A と C の関係に注目するとき $\Sigma(A, C)$ を用いる. 本稿で扱う添え字は要素番号を表わす整数とする. また, θ は符号不変要素, $*$ は不確定要素を常に表わすものとする. [命題] (Wei¹⁾) 不確定システム集合 $\Sigma(A, B)$ に属するシステムが線形状態フィードバックにより安定化可能であるためには,

$$M = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \quad (2)$$

に対して, すべての n 行と少なくとも n 列に符号不変要素が存在する必要がある.

この命題に基づいて, n 個の符号不変要素を有する標準形が以下のように定義されている.

[定義] (Wei¹⁾) $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ であると仮定し, (2) 式のように $M \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$ が与えられたとする. この $M = \{m_{ij}\}$ に対して m_{ii+1} ($i = 1, 2, \dots, n$) が符号不変であるとき, $\Sigma(A, B)$ を標準システム集合と呼び Σ_M で表わす.

Σ_M において, 以下に示すように M の上対角要素以外に制限がないことに注意する.

$$M = \begin{bmatrix} * & \theta & * & * \\ * & \ddots & \ddots & * \\ * & * & * & \theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

[定義] (Wei¹⁾) 標準システム集合 Σ_M に属するシステムが以下の条件をすべて満足するとき, システムは Generalized Antisymmetric Stepwise Configuration (GASC) をもつという.

(1) $g+2 \leq h$ に対して $m_{gh} \neq 0$ であるとき, すべての $u \geq v$, $u \leq h-1$, $v \leq g$ に対して $m_{uv} \equiv 0$ である.

(2) $\det(M^r) = m_{12}m_{23} \cdots m_{nn+1}$. ただし, M^r は M の右部分行列でありつぎのように定義される.

$$M^r = \begin{bmatrix} m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n+1} \\ m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nn+1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

GASC の一例を (5) 式に示す. M の上対角要素 θ 列の上側で不確定要素が与えられたとき ($m_{gh} \neq 0, g+2 \leq h$), 定義の条件 (1) より, θ 列下側の実線で囲まれた範囲の要素が, 0 要素として定められる ($m_{uv} \equiv 0, u \geq v, u \leq h-1, v \leq g$). 一方, 定義の条件 (2) から, 点線で囲まれた範囲の不確定要素の配置構造が定められる.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 & 0 & m_{gh} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \theta & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \theta \end{bmatrix} \quad (5)$$

[定義] (Tsujino²⁾) $\Sigma(A, B)$ に属するシステムが, 存在の許容された任意不確定要素がどのような値をとっても可制御であるとき, つまり, 任意の $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix} = n \quad (6)$$

であるとき, システムは可制御不変であるという.

[補題 1] (Tsujino²⁾) 標準システム集合 Σ_M に属するシステムが可制御不変であるための必要十分条件は, システムが GASC をもつことである.

3. 準備

可制御不変の定義と同様に, 可観測不変の定義を与える.

[定義] $\Sigma(A, C)$ に属するシステムが, 存在の許容された任意不確定要素がどのような値をとっても可観測であるとき, つまり, 任意の $a_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ A - \lambda I \end{bmatrix} = n \quad (7)$$

であるとき, システムは可観測不変であるという.

$\Sigma(A, C)$ に属するシステムが可観測不変であるためには,

$$N = \begin{bmatrix} C \\ A \end{bmatrix} \quad (8)$$

に対して, 少なくとも n 行とすべての n 列に符号不変要素が存在する必要があるのは明らかなので, Σ_M と同様にして, $\Sigma(A, C)$ に対する標準システム集合を以下のように定義する.

[定義] $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ であると仮定し, (8) 式のように $N \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$ が与えられたとする. この $N = \{n_{ij}\}$ に対して n_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$) が符号不変であるとき, $\Sigma(A, C)$ を標準システム集合と呼び Σ_N で表わす.

Σ_N において、以下に示すように N の対角要素以外に制限がないことに注意する。

$$N = \begin{bmatrix} \theta & * & * \\ * & \ddots & * \\ * & * & \theta \\ * & * & * \end{bmatrix} \quad (9)$$

[補題 2] Σ_N に属する任意システムが可観測不変であるためには、以下の条件をすべて満たす必要がある。

- (1) $g+1 \leq h$ に対して $n_{gh} \neq 0$ のとき、すべての $u \geq v-1, u \leq h, v \leq g-1$ に対して $n_{uv} \equiv 0$ かつ、 $n_{uv} \equiv 0 (u=h, v=g)$ である。
- (2) $g+1 \leq h$ に対して $n_{gh} \neq 0$ のとき、すべての $u \geq v-1, u \geq h+1$ に対して $n_{uv} \equiv 0$ である。
- (3) $\det(N^u) = n_{11}n_{22} \cdots n_{nn}$. ただし、 N^u は N の上部分行列でありつぎのように定義される。

$$N^u = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{21} & \cdots & n_{1n} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{n1} & n_{n2} & \cdots & n_{nn} \end{bmatrix} \quad (10)$$

(証明) 付録 A を参照。

$n_{gh} \neq 0 (g+1 \leq h)$ が与えられたとき、つまり、 N の対角要素 θ 列より上側で不確定要素が与えられたとき、補題 2 の条件 (1) および (2) により θ 列下側で 0 要素として定められる領域を (11) 式に示す。実線で囲まれた領域は補題 2 の条件 (1) に対応しており、点線で囲まれた範囲は補題 2 の条件 (2) に対応している。

$$N = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 & 0 & n_{gh} & 0 & 0 \\ 0 & * & \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここで、GASC をもつシステム集合を Σ_G で表わす。(5) 式で示されているように、GASC をもつシステムでは、点線で囲まれた領域は必ずしも 0 要素である必要がなく、不確定要素の存在を認めている。したがって、 Σ_G に属するシステムに対して、1 出力 ($C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$) では可観測不変にできないことが、補題 2 から理解できる。

したがって、 Σ_G に属するシステムが可観測不変であるためには、出力係数 $C \in \mathbb{R}^{s \times n}$ がどのような条件を満たす必要があるのかを以下の補題に示す。

[補題 3] Σ_G に属する任意システムが可観測不変であるためには、以下の条件をすべて満たす必要がある。ここで、 $\underline{g}$ は上対角要素 θ 列の右上側部分における最下端不確定要素の行

番号を表わすものとする。

- (1) $1 \leq \underline{g} \leq n-2$ のとき、 C は (12)(13) 式で表わされる行ベクトルを両方もつ。

$$[\theta_1 \quad * \quad * \quad \cdots \quad \cdots \quad * \quad *], \quad (12)$$

$$[0 \quad \cdots \quad 0 \quad \theta_{\underline{g}+1} \quad 0 \quad \cdots \quad 0]. \quad (13)$$

- (2) $\underline{g} = n-1$ のとき、 C は (12) 式の行ベクトルをもつ。
- (3) $\underline{g} = 0$ のとき、 C は (14) 式の行ベクトルをもつ。

$$[\theta_1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad 0 \quad 0]. \quad (14)$$

(証明) 付録 B を参照。

$1 \leq \underline{g} \leq n-2$ のとき、つまり、 N^u の対角要素 θ 列の上下両側にすくなくとも 1 つ以上の不確定要素が存在するとき、1 出力のみでは可観測不変とできないことがわかる。一方、 $\underline{g} = n-1$ または $\underline{g} = 0$ のとき、つまり、 N^u の θ 列の片側部分の要素がすべて 0 要素であるとき、補題 3 の条件 (2) または (3) を満たす C のみが必要となる。

4. 主要結果

本章では、 Σ_M と Σ_N を包括する新しい標準システム集合 Σ_P を導入し、その Σ_P に対して GASC を拡張した CGASC という新しい幾何学的構造を導入する。そして、主要定理として、 Σ_P に属するシステムが可制御不変かつ可観測不変であるための必要十分条件を示す。補題 3 より、 Σ_G に属するシステムが可観測不変であるためには、少なくとも 2 出力必要であったので、以下では $s=2$ と仮定し、 C を以下のよう

$$C = \begin{bmatrix} C^1 \\ C^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times n} \quad (15)$$

以下で扱う不確定システム集合 $\Sigma(A, B, C)$ は、 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ から構成されるものとする。これは可制御不変性が成立する GASC に対して、同時に可観測不変性を達成するための必要最小限度のシステム構成である。

[定義] $\Sigma(A, B, C)$ において、 $P \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ を

$$P = \begin{bmatrix} C^1 & 0 \\ A & B \end{bmatrix} \quad (16)$$

と与える。この $P = \{p_{ij}\}$ に対して、 p_{ii} ($i=1, 2, \dots, n+1$) が符号不変であるとき、 $\Sigma(A, B, C)$ を標準システム集合と呼び、 Σ_P で表わす。

Σ_P において、以下に示すように P の対角要素と右上隅要素以外に制限がないことに注意する。

$$P = \begin{bmatrix} \theta & * & * & 0 \\ * & \ddots & * & * \\ * & * & \ddots & * \\ * & * & * & \theta \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} * & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} \quad (18)$$

つぎに、本稿で重要な役割を果たす幾何学的構造を定義する。

【定義】 Σ_P に属するシステムが、以下の条件をすべて満たすとき、システムは Complete Generalized Antisymmetric Stepwise Configuration (CGASC) をもつという。

- (1) $g+1 \leq h$ に対して $p_{gh} \neq 0$ のとき、すべての $u \geq v-1, u \leq h, v \leq g-1$ に対して $p_{uv} \equiv 0$ かつ、 $p_{uv} \equiv 0 (u=h, v=g)$ である。
- (2) $\det(P) = p_{11}p_{22} \cdots p_{n+1n+1}$ である。
- (3) $g := \min\{g | p_{gh} \neq 0 (g+1 \leq h)\}$ に対して、 $1 \leq g \leq n-1$ のとき、

$$C^2 = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad \theta_g \quad 0 \quad \cdots \quad 0].$$

ここで、CGASC の一例を以下に示す。

$$P = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 & 0 & p_{gh} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \theta & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \theta \end{bmatrix} \quad \leftarrow g \quad (19)$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

P の対角要素 θ 列の上側で不確定要素が与えられたとき ($p_{gh} \neq 0, g+1 \leq h$)、定義の条件 (1) より、 θ 列の下側の実線で囲まれた範囲の要素が 0 要素として定められ、さらに、定義の条件 (2) より θ 列下側の点線で囲まれた領域の要素配置構造が定められる。また、定義の条件 (3) より出力係数 C^2 の符号不変要素の位置が定められる。CGASC では、(11) 式の点線で囲まれた領域に不確定要素の存在を認めていることが確認できる。

本稿の主要結果について述べる。

《定理 1》 Σ_P に属するシステムが可制御不変かつ可観測不変であるための必要十分条件は、システムが CGASC をもつことである。

(証明) 要素 p_{gh} は a_{g-1h} に、 p_{1h} は c_h^1 に、 p_{gn+1} は b_g に、おのおの対応していることに注意して、出力係数 C に関する条件を無視し (A, B) の関係に着目すると、CGASC の条件は GASC の条件と等価であることがわかる。ただし、CGASC の条件 (1) は GASC の条件 (1) に比べて $p_{uv} \equiv 0 (u=h, v=g)$ という条件が付加されている。これは、GASC の条件 (2) に含まれるため文献 1) では明記されていないが、文献 2) ではこれも必要条件であることは示されている。したがって、補題 1 より、定理の条件は Σ_P に属するシステムが可制御不変であるための必要十分条件であることがわかる。

つぎに (A, C) の関係に着目する。補題 2 より、 Σ_P に属するシステムが可観測不変であるためには、CGASC の条件 (1)(2) を満たす必要があることが示されている。また、可制御不変で

あるシステムは GASC をもつ必要があり、 Σ_G に属するシステムが可観測不変であるためには、CGASC の条件 (3) を満たす必要があることは、補題 3 で示されている。したがって、 Σ_P に属するシステムが可観測不変であるためには、CGASC の条件をすべて満たす必要があること、つまり、定理の条件の必要性が示された。一方、 Σ_P に属するシステムが CGASC の条件を満たすならば、システムは可観測不変であること、つまり、定理の条件の十分性の証明は付録 C で示される。以上より、定理が証明される。

5. おわりに

本稿では、任意の大きさの不確定変動幅をもつ線形時不変不確定システムの可制御性と可観測性について考察した。従来の結果を包括する CGASC と呼ばれる新しい幾何学的構造を導入し、その構造をもつことが可制御不変かつ可観測不変であるための必要十分条件であることを証明した。本稿の結果は、必要最小限の入出力数を仮定した上で、システムの可制御性と可観測性が不確定要素の変動幅に依存するクラスとそれに依存しないクラスを判別するための指標を与えていると解釈できる。今後の課題として 2 つの方向性が考えられる。本稿で示した CGASC の条件を満たさないときには、システムの可制御性と可観測性は必ず不確定要素の変動幅に依存する。よって、どれほどの大きさの変動幅が許容できるか示すような、不確定変数の変動幅に依存した可制御不変かつ可観測不変であるための条件を導出することが 1 つの課題である。一方、CGASC は必要最小限のシステム構成 (1 入力 2 出力) で構成されているが、システムが CGASC の条件を満たさないとき、任意の大きさの不確定要素に対して可制御不変かつ可観測不変を実現するためには、どのような位置に入力または出力を増やせばよいかを指し示す条件を導出することがもう 1 つの課題である。

参考文献

- 1) K. Wei: Stabilization of Linear Time-Invariant Interval Systems via Constant State Feedback Control, IEEE Transaction on Automatic Control, **39**, 22/32 (1994)
- 2) T. Tsujino, T. Fujii and K. Wei: On the Connection Between Controllability and Stabilizability of Linear Systems with Structural Uncertain Parameters, Automatica, **29**, 7/12 (1993)
- 3) M.L.J. Hautus: Controllability and observability conditions of linear autonomous systems, Ned. Akad. Wetenschappen, **72**, 443/448 (1969)
- 4) T. Hashimoto, T. Amemiya and H.A. Fujii: Stabilization of Linear Uncertain Delay Systems with Antisymmetric Stepwise Configurations, Journal of Dynamical and Control Systems, **14**, 1/31 (2008)

《付 録》

A. 補題 2 の証明

(A.1) 式のようなシステムを考える。ただし、 $g < h, u > v$ とする。まず、システム (A.1) が対角要素の上側 ($g < h$) で不確定要素 n_{gh} をもつとき、対角要素の下側 ($u > v$) で補題

の条件 (1)(2) から 0 要素として定められる領域に 1 つでも不確定要素が存在すれば、システムの可観測不変性が失われることを示す。その結果、 Σ_N に属し不確定要素を (A.1) 式より多く含むシステムに対しても、そのシステムが可観測不変であるためには、補題の条件 (1)(2) を満足する必要があることが明らかとなる。符号不変要素 θ 列の下側で、単一の n_{uv} の存在のみを仮定し、どの範囲に n_{uv} が存在すれば可観測不変性が失われるかを示せばよい。

$$N = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \theta_2 & \cdot & n_{gh} & 0 \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & 0 \\ \cdot & n_{uv} & \cdot & \cdot & \theta_n \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$\bar{N}$ をつぎのように定義する。

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} C \\ A - \lambda I \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

さらに、 $\bar{N}$ の $k \times k$ 左上隅部分行列を $\bar{N}_k$ で表わす。ここで、 λ を A の固有値に選ぶと $\text{rank}[A - \lambda I] = n - 1$ なので、システムが可観測不変であるためには、 $\bar{N}$ の最下端行を取り除いた $\bar{N}_n$ がフルランク、つまり、 $\det(\bar{N}_n) \neq 0$ が成り立つ必要がある。以下では、便宜上 $\theta_1, \dots, \theta_n$ をすべて θ で表わすが証明の正当性は損なわれない。

ここで、[I] $g = 1$ と、[II] $g \neq 1$ に場合分けして考える。
[I] $g = 1$ の場合について考える。
このとき、 A の特性方程式はつぎのように与えられる。

$$(-\lambda)^{n-u+v-1} \{(-\lambda)^{u-v+1} + n_{uv}\theta^{u-v}\} = 0 \quad (\text{A.3})$$

以下では、任意の値を取る n_{gh} および上式の根 λ に対して $\det(\bar{N}_n) \neq 0$ であるならば、どの範囲の u, v に対して $n_{uv} \equiv 0$ である必要があるのかを示す。

n_{uv} の位置として、(i) $u \leq h$ と (ii) $u > h$ に場合分けする。

(i) $u \leq h$ のとき、 $\bar{N}_h$ は

$$\bar{N}_h = \begin{bmatrix} \theta & 0 & \cdot & 0 & n_{1h} \\ -\lambda & \theta & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \ddots & \ddots & \cdot & \cdot \\ \cdot & n_{uv} & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & -\lambda & \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

と与えられるので、 $\det(\bar{N}_n) = \theta^{n-h} \det(\bar{N}_h)$ である。さらに、 $\det(\bar{N}_h)$ は以下のように与えられる。

(a) $u \neq h, v \neq 1$ のとき、

$$\det(\bar{N}_h) = \theta^h + (-1)^{h+1} n_{1h} (-\lambda)^{h-u+v-2} \times \{(-\lambda)^{u-v+1} + n_{uv}\theta^{u-v}\}. \quad (\text{A.5})$$

(b) $u = h, v = 1$ のとき、

$$\det(\bar{N}_h) = \theta^h + (-1)^{h+1} n_{1h} \{(-\lambda)^{h-1} + n_{uv}\theta^{u-v}\}. \quad (\text{A.6})$$

(A.3) 式より、 $\lambda = \sqrt[u-v+1]{(-1)^{u-v+2} n_{uv} \theta^{u-v}}$ のとき、(a)(b) とともに右辺第 2 項は 0 となるので、 $\det(\bar{N}_n) = \theta^n \neq 0$ 。一方、 $\lambda = 0$ のとき、(a) は $\det(\bar{N}_n) = \theta^n \neq 0$ であるが、(b) においては、

$$\det(\bar{N}_n) = \theta^{n-h} \{ \theta^h + (-1)^{h+1} n_{1h} n_{uv} \theta^{u-v} \} \quad (\text{A.7})$$

である。よって、 $n_{1h} \neq 0$ に対して $\det(\bar{N}_n) = \theta^n \neq 0$ であるためには、 $n_{uv} \equiv 0$ ($u = h, v = 1$) である必要がある。

つぎに (ii) $u > h$ の場合について考える。このとき $\bar{N}_n$ は、

$$\bar{N}_n = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \theta & 0 & \cdot & n_{1h} & & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ -\lambda & \theta & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \ddots & \ddots & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & -\lambda & \theta & & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \hline 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & \theta & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & -\lambda & \theta & \cdot & \cdot \\ \cdot & n_{uv} & \cdot & \cdot & & \cdot & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & & 0 & \cdot & -\lambda & \theta \end{array} \right) \quad (\text{A.8})$$

のように与えられるので、

$$\begin{aligned} \det(\bar{N}_n) &= \theta^{n-h} \bar{N}_h \\ &= \theta^{n-h} \{ \theta^h + (-1)^{h+1} n_{1h} (-\lambda)^{h-1} \}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

である。(A.9) 式より、 $n_{1h} \neq 0$ に対して $\det(\bar{N}_n) = \theta^n \neq 0$ であるためには、 $\lambda = 0$ である必要がある。したがって、(A.3) 式の根がすべて $\lambda = 0$ であるためには、 $n_{uv} \equiv 0$ ($u > h$) を満たす必要がある。

[II] $g \neq 1$ の場合について、 $\bar{N}_n$ をつぎのようなブロックに分けて考える。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \theta & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ -\lambda & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \hline 0 & \cdot & -\lambda & \theta & \cdot & n_{gh} & 0 & \cdot & 0 \\ n_{uv} \ (u \leq h) & \cdot & \cdot & -\lambda & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & \ddots & \theta & 0 & \cdot & 0 \\ \hline 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \theta & 0 & \cdot \\ n_{uv} \ (u > h) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & -\lambda & \theta \end{array} \right)$$

ここで、中央にある第 (2,2) 要素ブロック行列を $\bar{N}_c$ とおく。 n_{uv} の位置として、(i) $u \leq h$ と (ii) $u > h$ に場合分けする。

(i) $u \leq h$ のとき、さらに、(a) $v < g$ と (b) $v \geq g$ に場合分けして考える。(a) のとき n_{uv} は第 (2,1) ブロックに存在し、(b) のとき n_{uv} は第 (2,2) ブロックに存在する。

(a) の場合,

$$\begin{aligned}\det(\bar{N}_n) &= \theta^{n-h} \det(\bar{N}_h) = \theta^{n-h+g} \det(\bar{N}_c) \\ &= \theta^{n-h+g} \{ \theta^{h-g} + (-1)^{h-g+1} n_{gh} (-\lambda)^{h-g-1} \}\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

である。よって, $n_{gh} \neq 0$ に対して $\det(\bar{N}_n) = \theta^n \neq 0$ であるためには, $\lambda = 0$ である必要がある。(a) の場合, A の特性方程式は

$$(-\lambda)^{v-1} \{ (-\lambda)^{n-v+1} + (-1)^{u+v} n_{uv} \theta^{u-v} (-\lambda)^{n-u} \} = 0 \quad (\text{A.11})$$

で与えられる。したがって, (A.11) 式の根がすべて $\lambda = 0$ であるためには, $n_{uv} \equiv 0$, ($u \leq h, v < g$) である必要がある。

一方, (b) の場合, $\bar{N}_c$ は (A.4) 式と同じ構造であることから, 同様に, $\det(\bar{N}_n) = \theta^{n-h+g} \det(\bar{N}_c) = \theta^n \neq 0$ であるためには, $n_{uv} \equiv 0$, ($u = h, v = g$) である必要がある。

(ii) $u > h$ のとき, $\det(\bar{N}_n)$ を計算すると (A.10) 式と一致することがわかる。それゆえ同様にして, $\det(\bar{N}_n) = \theta^n \neq 0$ であるためには, $n_{uv} \equiv 0$, ($u > h$) である必要がある。

[I]-(i) と [II]-(i) より, 補題の条件 (1) の必要性が証明され, [I]-(ii) と [II]-(ii) より, 補題の条件 (2) の必要性が証明された。

上記の証明では, 補題の条件 (1)(2) より $n_{uv} \equiv 0$ と定められている領域に不確定要素が1つでも存在した場合, そのシステムの可観測不変性が失われることが示されている。つまり, $n_{gh} \neq 0$ が与えられたとき, (11) 式の実線と点線で囲まれた領域に1つでも不確定要素が存在すれば, 任意システムに対して $\det(\bar{N}_n) \neq 0$ が保証されないことが示されている。可観測不変性の定義に注意すると, Σ_N に属する任意システムが可観測不変であるためには, 少なくともシステム (A.1) が可観測不変である必要がある。したがって, Σ_N に属する (A.1) 以外のシステムにおいても, そのシステムが可観測不変であるためには, 補題の条件 (1)(2) を満たす必要があることがわかる。

[III] 最後に補題の条件 (3) の証明を示す。 Σ_N に属する任意システムが可観測不変であるためには, 少なくとも $\text{rank} N^u = n$ である必要がある。ただし, N^u は

$$N^u = \begin{bmatrix} \theta_1 & * & \cdots & * \\ * & \theta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ * & \cdots & * & \theta_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

とする。これを1行目に関して余因子展開すると次式を得る。

$$\det(N^u) = \theta_1 \Delta(\theta_1) + * \Delta(*) + \cdots + * \Delta(*) \quad (\text{A.13})$$

ただし, $\Delta(\cdot)$ は $\cdot$ の余因子を表わすものとする。上式において, 任意の $*$ がどのような値を取っても $\det(N^u) \neq 0$ であるためには, 少なくとも $\det(N^u) = \theta_1 \Delta(\theta_1)$ である必要が

ある。同様に, $\Delta(\theta_1)$ を1行目に関して余因子展開すると, 任意の $*$ に対して $\det(N^u) \neq 0$ であるためには, 少なくとも $\det(N^u) = \theta_1 \theta_2 \Delta(\theta_2)$ である必要性が示される。これを繰り返すと, 任意の $*$ に対して $\det(N^u) \neq 0$ であるためには $\det(N^u) = \theta_1 \cdots \theta_n$ である必要性が示される。したがって, Σ_N に属する任意システムが可観測不変であるためには, 補題の条件 (3) を満たす必要がある。

[I],[II],[III] より, 補題2が証明された。

B. 補題3の証明

[I] $1 \leq g \leq n-2$ の場合, Σ_G に属する任意システムが可観測不変であるためには, 出力係数 C は (12)(13) 式の行ベクトル両方をもつ必要があることを示す。

まず, (B.1) 式のシステムについて考える。ここで a_{gh} を上対角要素 θ 列より上側部分の最下端不確定要素とする。(5) 式を参考にして, GASC をもつシステムは (B.1) 式に示されるような位置に不確定要素の存在を認めていることがわかる。 Σ_G に属する任意システムが可観測不変であるためには, 少なくとも (B.1) 式のシステムが可観測不変である必要がある。ゆえに, (B.1) 式のシステムに対して, 出力係数 C が (12) 式と (13) 式の行ベクトルを両方ともなければ可観測不変性が損なわれることを示せばよい。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \theta & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \theta & \cdot & a_{gh} \\ \cdot & \cdot & a_{g+1g+1} & \theta & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \theta \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

ここで, 以下に示す PBH 定理³⁾を用いる。

[命題] つぎの条件は互いに等価である。

$$(1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ に対して, } \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ A - \lambda I \end{bmatrix} = n.$$

$$(2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ に対して, } Ay = \lambda y, Cy = 0 \Rightarrow y = 0.$$

以下では, (B.1) 式の A が命題の条件 (2) を満たすためには, 出力係数 C は (12)(13) 式の行ベクトルをもつ必要があることを示す。

$Ay = \lambda y$ の関係から次式を得る。

$$\theta y_2 = \lambda y_1 \quad (\text{B.2})$$

$$\theta y_3 = \lambda y_2 \quad (\text{B.3})$$

$$\vdots$$

$$\theta y_g = \lambda y_{g-1} \quad (\text{B.4})$$

$$\theta y_{g+1} + a_{gh} y_h = \lambda y_g \quad (\text{B.5})$$

$$a_{g+1g+1} y_{g+1} + \theta y_{g+2} = \lambda y_{g+1} \quad (\text{B.6})$$

$$\theta y_{g+3} = \lambda y_{g+2} \quad (\text{B.7})$$

$$\vdots$$

$$\theta y_h = \lambda y_{h-1} \quad (\text{B.8})$$

$$\vdots$$

$$\theta y_n = \lambda y_{n-1} \quad (\text{B.9})$$

$$a_{nn} y_n = \lambda y_n \quad (\text{B.10})$$

$\theta \neq 0$ より, 表記の煩雑を避けるため $\rho = \lambda/\theta$, $\tilde{a}_{gh} = a_{gh}/\theta$, $\tilde{a}_{g+1} = a_{g+1g+1}/\theta$ とおく. (B.10) 式は y_n に対して拘束をもたないので, (B.2)-(B.9) 式から次式が導かれる.

$$y_2 = \rho y_1 \quad (\text{B.11})$$

$$y_3 = \rho^2 y_1 \quad (\text{B.12})$$

$$\vdots$$

$$y_g = \rho^{g-1} y_1 \quad (\text{B.13})$$

$$y_{g+1} = \rho^g y_1 - \tilde{a}_{gh} \{ \rho^{h-g-2} (\rho - \tilde{a}_{g+1}) y_{g+1} \} \quad (\text{B.14})$$

$$y_{g+2} = (\rho - \tilde{a}_{g+1}) y_{g+1} \quad (\text{B.15})$$

$$y_{g+3} = \rho(\rho - \tilde{a}_{g+1}) y_{g+1} \quad (\text{B.16})$$

$$\vdots$$

$$y_h = \rho^{h-g-2} (\rho - \tilde{a}_{g+1}) y_{g+1} \quad (\text{B.17})$$

$$\vdots$$

$$y_n = \rho^{n-g-2} (\rho - \tilde{a}_{g+1}) y_{g+1} \quad (\text{B.18})$$

(i) $\rho = 0$ のとき, $y_2 = \dots = y_n = 0$ である. このとき, $y = 0$ が唯一解として導かれるためには, $Cy = 0$ から $y_1 = 0$ が定まる必要がある. したがって, $y_2 = \dots = y_n = 0$ に注意すると, (B.1) 式の A が命題の条件 (2) を満足するためには, C は少なくとも (12) 式の行ベクトルをもつ必要があることがわかる.

(ii) $\rho \neq 0$ のとき, (B.14) の関係に注目し,

$$y_1 = \rho^{-g} [1 + \tilde{a}_{gh} \{ \rho^{h-g-2} (\rho - \tilde{a}_{g+1}) \}] y_{g+1} \quad (\text{B.19})$$

を (B.11)-(B.13) 式に代入すると, 次式を得る.

$$y_2 = \rho^{1-g} [1 + \tilde{a}_{gh} \{ \rho^{h-g-2} (\rho - \tilde{a}_{g+1}) \}] y_{g+1} \quad (\text{B.20})$$

$$y_3 = \rho^{2-g} [1 + \tilde{a}_{gh} \{ \rho^{h-g-2} (\rho - \tilde{a}_{g+1}) \}] y_{g+1} \quad (\text{B.21})$$

$$\vdots$$

$$y_g = \rho^{-1} [1 + \tilde{a}_{gh} \{ \rho^{h-g-2} (\rho - \tilde{a}_{g+1}) \}] y_{g+1} \quad (\text{B.22})$$

(B.14)-(B.22) 式から $y = 0$ が唯一解として導かれるためには, $Cy = 0$ から $y_{g+1} = 0$ が定まる必要がある. したがって, (B.1) 式の A が命題の条件 (2) を満足するためには, C は少なくとも (13) 式の行ベクトルをもつ必要があることがわかる.

以上より, 少なくとも補題の条件 (1) を満たす必要があることが示された.

[II] $\underline{g} = n-1$ の場合について考える. このとき, A の上対角要素 θ 列より下部はすべて 0 要素となる.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \theta & * & * \\ . & \ddots & \ddots & * \\ . & . & \ddots & \theta \\ 0 & . & . & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.23})$$

$Ay = \lambda y$ からつぎの関係が得られる.

$$y_2 = \rho y_1 - (*y_3 + *y_4 + \dots + *y_n), \quad (\text{B.24})$$

$$y_3 = \rho y_2 - (*y_4 + *y_5 + \dots + *y_n), \quad (\text{B.25})$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1} = \rho y_{n-2} - *y_n, \quad (\text{B.26})$$

$$y_n = \rho y_{n-1}, \quad (\text{B.27})$$

$\rho = 0$ のとき, (B.24)-(B.27) 式から $y_2 = \dots = y_n = 0$ を得る. したがって, $y = 0$ が唯一解として導かれるためには, $Cy = 0$ から $y_1 = 0$ が導かれる必要がある. ゆえに, (B.23) 式の A が命題の条件 (2) を満足するためには, C は少なくとも (12) 式の行ベクトルをもつ必要がある.

[III] $\underline{g} = 0$ の場合について考える. このとき, A の上対角要素 θ 列より上部はすべて 0 要素となる.

$$A = \begin{bmatrix} * & \theta & 0 & 0 \\ . & \ddots & \ddots & 0 \\ . & . & \ddots & \theta \\ * & . & . & * \end{bmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

$Ay = \lambda y$ からつぎの関係が得られる.

$$y_2 = q(\rho, *) y_1 \quad (\text{B.29})$$

$$y_3 = q(\rho, *) y_1 \quad (\text{B.30})$$

$$\vdots$$

$$y_n = q(\rho, *) y_1 \quad (\text{B.31})$$

ただし, $q(\rho, *)$ は ρ と $*$ からなる多項式を表わす. したがって, (B.28) 式の A が命題の条件 (2) を満足するためには, $Cy = 0$ から $y_1 = 0$ が導かれる必要がある. ゆえに, C は少なくとも (14) 式の行ベクトルをもつ必要がある.

以上 [I],[II],[III] より, 補題 3 が証明された.

C. 可観測不変性の十分性

本章では, Σ_P に属するシステムが CGASC の条件を満足するならば, システムは可観測不変であることを示す. ここで, $D \in \mathbb{R}^{(n+2) \times n}$ をつぎのように定義する.

$$D = \begin{bmatrix} C^1 \\ A - \lambda I \\ C^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

以下では, 証明を大きく [I] $1 \leq \underline{g} \leq n-1$ と [II] $\underline{g} = n$ と [III] $\underline{g} = 0$ に分けて行なう.

[I] $1 \leq \underline{g} \leq n-1$ のとき. まず, P が 1 段の CGASC をもつ場合について考える. 1 段の CGASC とは, P の符号不変

要素 θ 列の上側の不確定部分の最右端の要素が、その最下端行の右端の要素より右側に存在しないことをいう。(C.2) 式にその概観が示されている。

ここで、 P の (g_1, h_1) 要素を θ 列の上側の不確定部分における最下端行の右端の要素とする。 (g_1, h_1) の添え字 “1” は θ 列の上側で下から第 “1” 番目の角に対応する要素であることを強調している。以下では、 P が j 段の CGASC をもつとき $P^j (1 \leq j \leq g_1)$ と表わし、 (g_i, h_i) 要素 $(1 \leq i \leq j)$ は θ 列の上側で下から第 i 番目の角に対応する要素を表わすものとする。(C.2) 式や (C.5) 式の (g_1, h_1) 要素、 (g_2, h_2) 要素が、ここでいう角に対応している。

$$D = \begin{matrix} & & & g_1 & & & h_1 \\ & & & \downarrow & & & \downarrow \\ \begin{matrix} \theta & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \theta & * & \cdots & * & \cdot \\ \vdots & \ddots & 0 & \theta & * & * & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & * & \theta & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & * & \theta & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & * & * & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & * & * & \ddots & \theta \\ * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \theta_{g_1} & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \leftarrow g_1 \\ \end{matrix} \quad (C.2)$$

P が 1 段の CGASC をもつ P^1 であるとき、 D は (C.3) 式のように与えられる。

以下では、(i) $\lambda = 0$ と (ii) $\lambda \neq 0$ に場合分けして、 $\text{rank} D = n$ であることを示す。

(i) $\lambda = 0$ のとき、(C.3) 式の D は (C.2) 式となる。(C.2) 式の D の最下端 2 行を取り除いた部分行列の行列式は、CGASC の条件 (2) を満足するため、 θ^n であることがわかる。 $\theta^n \neq 0$ より、 $\text{rank} D = n$ であることが示される。

(ii) $\lambda \neq 0$ のとき、(C.3) 式の D の 2 行目から g_1 行目までのすべての行を 1 行だけ上にずらし、それと同時に最初の行を最後の行に、最後の行を g_1 行目に移動させると、(C.3) 式の D は (C.4) 式で与えられる。

(C.4) 式の D の最下端 2 行を取り除いた部分行列の行列式は、 $(-\lambda)^{g_1-1} \times \theta^{n-g_1+1} \neq 0$ である。ゆえに、 $\text{rank} D = n$ であることが示される。

(i)(ii) より、任意の λ 、* に対して $\text{rank} D = n$ であることが示された。

つぎに、 P が 2 段の CGASC をもつ P^2 である場合について考える。これは、不確定要素から成る部分行列 $P_s^2 \in \mathbb{R}^{q \times r}$ 、 $(q = g_2 < g_1, r - 1 = h_2 - h_1 < n - h_1)$ が、1 段の CGASC をもつ P^1 に、 P^1 の上部不確定部分における 1 行目右端の $(1, h_1)$ 要素と P_s^2 の $(1, 1)$ 要素が一致するように、付け加え

られて得られる行列のことである。ただし、CGASC の条件を満足するため、部分行列 P_s^2 が付け加えられると同時に、 P^1 の θ 列の下側で対応する不確定要素は 0 要素に置き換えられる。このとき、 D は (C.5) 式で与えられる。(C.5) 式の D も P^1 の場合と同様の方法により、 $\text{rank} D = n$ であることが示される。

以上の作業を $P^j (1 \leq j \leq g_1)$ に対して、条件 $0 < q = g_{i+1} < g_i$, $0 < r - 1 = h_{i+1} - h_i < n - h_i$, $(i = 1, 2, \dots, j)$ が満足される限りくり返すことにより、任意の $j (1 \leq j \leq g_1)$ に対して $\text{rank} D = n$ であることが示される。

$$D = \begin{matrix} & & & g_1 & & & h_1 \\ & & & \downarrow & & & \downarrow \\ \begin{matrix} \theta & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & 0 \\ -\lambda & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \theta & * & \cdots & * & \cdot \\ \vdots & \ddots & -\lambda & \theta & * & * & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & * - \lambda & \theta & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & * & * - \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & * & * & \ddots & \theta \\ * & \cdots & * & * & * & \cdots & * - \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \theta_{g_1} & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \leftarrow g_1 \\ \end{matrix} \quad (C.3)$$

$$D = \begin{matrix} & & & g_1 & & & h_1 \\ & & & \downarrow & & & \downarrow \\ \begin{matrix} -\lambda & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \theta & * & \cdots & * & \cdot \\ \vdots & \ddots & -\lambda & \theta & * & * & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \theta_{g_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & * - \lambda & \theta & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & * & * - \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & * & * & \ddots & \theta \\ * & \cdots & * & * & * & \cdots & * - \lambda \\ \theta & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & 0 \end{matrix} & \leftarrow g_1 \\ \end{matrix} \quad (C.4)$$

[II] $g = n$ のとき、 P の θ 列より下側のすべての要素は 0 要素となり、 D から C_2 を取り除いた行列 $\tilde{D}$ は (C.6) 式のように与えられる。 $\lambda = 0$ のとき、(C.6) 式の $\tilde{D}$ から最下端行を取り除いた部分行列の行列式は $\theta^n \neq 0$ となり、 $\text{rank} \tilde{D} = n$ 。 $\lambda \neq 0$ のとき、(C.6) 式の $\tilde{D}$ の最初の行を取り除いた部分行列の行列式は $\lambda^n \neq 0$ となり、 $\text{rank} \tilde{D} = n$ 。

したがって、任意の λ 、* に対して $\text{rank} \tilde{D} = n$ であることが示された。