LMI条件に基づく Feedback/Anti-windup 補償器の統合化設計

— $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域に基づく設計条件の関係性について —

木 山 健*

LMI-based Integrated Design of Feedback and Anti-windup Controllers

— On the Relation between Synthesis Conditions Based on a Domain of
 $\mathcal{L}_2$ /Exponential Stability Performance —

Tsuyoshi KIYAMA*

This paper considers linear time-invariant continuous-time control systems with saturation and/or dead-zone nonlinearities, and proposes two synthesis methods satisfying a regional $\mathcal{L}_2$ and/or exponential stability performance for the system based on the generalized sector approach. One of them is an integrated design of dynamical output feedback and anti-windup controllers, while the other is an integrated design of static output and state feedback controllers. The two methods assume the output of the nonlinearities to be available for the control. In this case, this paper indicates that the synthesis problems using the two methods can be recast as linear matrix inequality (LMI) optimization problems, respectively. Furthermore, it is proved that the synthesis condition based on the former dynamical controller is a sufficient condition of the corresponding one based on the latter static controller. In the special case of the same class of the two controller input signals, it is also proved that two achievable control performances using the two controllers are exactly the same. In particular, it is clarified that the synthesis condition using the dynamical controller is composed of a synthesis condition of a state feedback gain for control systems with saturation and/or dead-zone nonlinearities, and a synthesis condition of an observer gain for linear control systems without the nonlinearities. Finally, this paper points out that the proposed synthesis method is helpful through numerical examples designing control systems with anti-windup control structures via the derived LMI conditions.

Key Words: saturation, dead-zone, anti-windup control, $\mathcal{L}_2$ performance, exponential stability

1. はじめに

アクチュエータには物理的な制約のため達成可能な最大の出力に必ず制限が存在する。したがって、もし性能の要求が厳しく非常に大きな制御入力が必要とすると、制御対象への入力が“飽和”してしまう。この飽和を考慮せずに制御系を設計すると、制御系は“ワインドアップ”現象や、大きなオーバーシュート、リミットサイクル、さらには発散など、望ましくない振る舞いを起こす可能性がある。したがって、この飽和の影響を考慮しつつコントローラを設計することは大変重要な課題の一つである。

最近、飽和を有するシステムに対し、線形行列不等式 (LMI)^{1)~13)} の枠組みでマルチプライアを用いて、ある範囲の飽和を許容する安定性や性能を解析したり、設計する新しい方

法が開発されてきている。これらの方法の基本的な考え方は、状態空間内のある領域のみで有効な Lyapunov 関数に基づくものである。解析法に関しては、2次形式以外の Lyapunov 関数やマルチプライアを導入しても凸最適化問題に帰着でき、解析における保守性の軽減が期待できることが示されている^{12), 13)}。特に、飽和への入出力直達成分を有する連続時間システムに関して文献¹³⁾では、文献^{5), 6)}のマルチプライア（一般化セクター条件）に基づきシステムの局所的な $\mathcal{L}_2$ 性能かつ指数安定性能を考慮する解析問題を取り扱っている。しかし、この解析結果¹³⁾に基づき、飽和を有するシステムの局所的な $\mathcal{L}_2$ 性能と指数安定性能の両方を同時に許容できる設計法は提案されていない。

本論文ではこの問題を解決するため、文献⁶⁾の $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能の設計問題に関する結果を飽和への入出力直達成分を有するシステムの $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能の設計問題に拡張し、その設計法を提案する。このとき、設計問題の可解条件が LMI 条件に帰着可能なことを明らかにする。これらの設計に関する結果が、まず一つの主結果である。さらに、これらの結果から静的出力および状態フィードバックコントローラと動的出

* 大阪大学大学院工学研究科 吹田市山田丘 2-1

* Graduate School of Engineering, Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita

(Received February 1, 2008)

(Revised July 10, 2008)

力フィードバックコントローラとにより達成される性能の包含関係について検討する。具体的には、以下の手順を行なう。まず、LMIに基づく状態空間での領域的な $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能解析法を紹介する。このとき、連続時間線形時不変 (LTI) 系と飽和要素のフィードバック結合からなる非線形系を解析の対象とし、文献 5), 6) でのマルチプライアを用いた解析の考え方に基づき、 $\mathcal{L}_{2t}$ ノルムがある与えられた値以下の外乱に対し、この非線形系の $\mathcal{L}_2$ 性能かつ指数安定性能を保証する初期状態の集合である状態空間領域を、 $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域^{6), 13)} とよぶ。つぎに、LTI 制御対象および解析の場合と同様の外乱に対し、つぎのそれぞれのコントローラを用いて制御入力飽和を考慮するつぎの二つの設計問題を考察する。 $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域の解析条件¹³⁾ に基づいて、

(S) アンチwindアップ機構^{1)~14)} を備えた静的出力および状態フィードバックコントローラ、もしくは、

(D) アンチwindアップ機構を備えた動的出力フィードバックコントローラ

により達成可能な $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域を特徴づけよ。問題 (S) は制御対象の状態が計測可能な静的コントローラ、問題 (D) は制御対象の状態が計測不可能な動的コントローラを用いており、これらのコントローラのクラスに包含関係は存在しない。しかしながら、問題 (S) から得られる領域の集合は、問題 (D) から得られる制御対象に関する領域の集合以上の大きさになることが保証される。このことを理論的に証明する。なお、問題 (D) の設計条件は、飽和のない通常の線形システムのオブザーバゲインの設計条件と、飽和を有するシステムの状態フィードバックゲインの設計条件とに、システム論的に明確に分離できることも明らかにする。これらが、本論文でのもう一つの主結果である。

これらの結果は、本論文の枠組み内では、飽和を有する制御において、達成可能な $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域の大きさをアンチwindアップ機構を備えた動的出力フィードバックコントローラに基づく結果以上に改善するため、アンチwindアップ機構を備えた静的出力および状態フィードバックコントローラを用いることは有効であることを示している。なお、この特別な場合として、アンチwindアップ機構を備えた出力および状態フィードバックゲインのクラスを、動的なアンチwindアップ機構を備えた出力および状態フィードバックのクラスにまで広げても、達成可能な $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域の大きさは改善されないことも証明する。これらは、アンチwindアップ制御系において、コントローラのクラスと性能の一つの関係を明らかにしたものである。

表記: $n \times m$ の実行列の集合を $\mathbb{R}^{n \times m}$ と記述する。行列 M に対し、 M' は転置行列を表わす。ベクトル x に対し、 x_i は x の i 番目の要素である。ベクトル x と y に対し、 $x > y$ はすべての i で $x_i > y_i$ となることを意味する。 $x \geq y$ も同様である。対称行列 X に対して、 $X > 0$ ($X \geq 0$) は (準)

Fig. 1 Linear fractional transformation $G \oplus K$

Fig. 2 Feedback system with saturation nonlinearity

正定行列を、 $\lambda_{\max}(X)$ ($\lambda_{\min}(X)$) は最大 (小) 固有値を意味する。正方行列 Y に対して、 $\text{He}(Y) := Y + Y'$ を定義する。また、信号 z の $\mathcal{L}_2$ ノルムを $\|z\|_{\mathcal{L}_2} := \left(\int_0^\infty z'(t)z(t)dt \right)^{1/2}$ 、 $\mathcal{L}_{2t}$ ノルムを $\|z\|_{\mathcal{L}_{2t}} := \left(\int_0^t z'(\tau)z(\tau)d\tau \right)^{1/2}$ と定義する。行列 G と K の線形分数変換 (LFT) は、Fig. 1 での w から z への写像を表現する行列として定義され、 $G \oplus K$ と記述する。最後に、伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ をつぎのように表記する。

$$G(s) =: \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right).$$

2. $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域の解析

2.1 問題設定と準備

Fig. 2 のフィードバック系で表わされるシステムを考える。ただし、 $H(s)$ は線形時不変 (LTI) システムで、

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ w_p \end{bmatrix}$$

により与えられ、 $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$, $w_p \in \mathbb{R}^k$, $z \in \mathbb{R}^m$, $z_p \in \mathbb{R}^l$ である。また $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ は飽和関数であり、

$$w = \phi(z) \Leftrightarrow w_i = \begin{cases} \sigma & (z_i \geq \sigma) \\ z_i & (|z_i| \leq \sigma) \\ -\sigma & (z_i \leq -\sigma) \end{cases} \quad (1)$$

により定義される。ここで、 $\sigma \in \mathbb{R}^m$ は各要素が正の与えられたベクトルである。また、与えられたスカラー $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$ に対して、

$$\mathcal{W}(\beta, \gamma) := \left\{ w_p : \|w_p\|_{\mathcal{L}_{2t}}^2 \leq \frac{1}{\gamma^2} \|z_p\|_{\mathcal{L}_{2t}}^2 + \beta^2 \right\}$$

を定義する。本論文では $\mathcal{W}(\beta, \gamma)$ に属する $\mathcal{L}_{2t}$ ノルムが有界な外乱 w_p を考える。

このようなシステムに対して、吸収領域および $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域の定義¹³⁾ をつぎのように紹介する。

【定義】 部分集合 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ が与えられているとする。この

とき、 $\mathbf{X}$ 内の任意の点を初期値とする状態軌道がすべての時間で $\mathbf{X}$ 内に留まり、かつ時間の無限への経過に伴い原点に収束する初期状態の領域 $\mathbf{X}$ を吸収領域と定義する。

【定義】 部分集合 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$, スカラー $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma > 0, \varepsilon \geq 0$ が与えられているとする。このとき、

(1) 任意の $w_p \in \mathcal{W}(\beta, \gamma)$ を加えた場合、 $\alpha^2 \mathbf{X}$ 内の任意の点を初期値とする状態軌道がすべての時間で $(\alpha^2 + \beta^2) \mathbf{X}$ 内に留まり、かつ $\mathcal{L}_2$ 性能条件

$$\|z_p\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \gamma^2 (\|w_p\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \alpha^2) \quad \forall t > 0 \quad (2)$$

を満たす。

(2) 特に $w_p = 0$ の場合、 $(\alpha^2 + \beta^2) \mathbf{X}$ 内の任意の点を初期値とする状態軌道がすべての時間で $(\alpha^2 + \beta^2) \mathbf{X}$ 内に留まり、かつ指数安定性能条件

$$\|x(t)\| \leq \mu \|x(0)\| e^{-\varepsilon t} \quad \forall t > 0 \quad (3)$$

を満たす $\mu > 0$ が存在する。

このときの初期状態の領域 $\alpha^2 \mathbf{X}$ をレベル $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ の $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域と定義する。ただし、以下では特にことわらない限り、このレベル $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ の $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域を単に $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域と記述する。

本論文で考える解析問題は、上記のシステムに対し $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域を求めることである。

次節での記述を簡単にするため、Fig.2 のシステムをループ変換しておく。つぎの不感帯関数 $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$\varphi(z) := -\phi(z) + z \quad (4)$$

を定義すると、 $w = \varphi(z)$ とおくことにより、Fig.2 の閉ループ系は $H(s) := C(sI - A)^{-1}B + D$ と φ のフィードバック結合、すなわち、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ z_p \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & 0 & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \times (I - D_{11})^{-1} \begin{bmatrix} C_1' \\ -I \\ D_{12}' \end{bmatrix} \left. \right\} \begin{bmatrix} x \\ w \\ w_p \end{bmatrix} \\ &=: \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ w_p \end{bmatrix} \\ &=: \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ w_p \end{bmatrix}, \quad (5) \\ w &= \varphi(z) \end{aligned}$$

で表現される。ここで、つぎのようにシステムを仮定^{12), 13)}する。

【仮定 1】 $H(s) := C(sI - A)^{-1}B + D$ と (4) 式で定義される φ のフィードバック結合、特に、 $\varphi(z)$ から z への代数

ループ

$$z = C_1 x + D_{11} \varphi(z) + D_{12} w_p \quad (6)$$

を考える。このとき、

$$D_{11} S + S D_{11}' - 2S < 0 \quad (7)$$

を満たす対角行列 $S > 0$ が存在すると仮定する。すなわち、代数ループ (6) の well-posedness 性 (の十分条件 (7)) を仮定する。

2.2 $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域解析の十分条件

本節では、 $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域を理論的に特徴づける。まず、Lyapunov 関数のクラスを

$$V(x) := x' P x$$

のような 2 次形式に限定する。ここで、 P は実対称正定行列とする。したがって、与えられたスカラー $\delta \geq 0$ に対して Lyapunov 関数のレベルセットを

$$\mathcal{E}^P(\delta) := \{x \in \mathbb{R}^n : x' P x \leq \delta\} \quad (8)$$

なる楕円領域として記述する。(8) 式で定義される楕円領域 $\mathcal{E}^P(\alpha^2)$ がシステム (5) の $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域となるための線形行列不等式 (LMI) による十分条件¹³⁾を紹介する。

この条件は、一般化セクター条件を用いる非線形解析^{5), 6), 9)~12)}に基づくものであり、2 次形式の Lyapunov 関数を用いた単数の飽和要素を有するシステムの安定解析において、必要十分条件を与えるものである¹³⁾。その鍵となるアイデアは、不感帯関数 φ が“領域的”セクター条件を満たすことである。なお、基本的考え方は文献 3)~12) などで使用されたものと同様である。

【補題 1】 $H(s) := C(sI - A)^{-1}B + D$ と (4) 式で定義される φ のフィードバック結合を考える。与えられた $Q > 0$ に対して

$$\text{He} \begin{bmatrix} (A + \varepsilon I)Q & B_1 S & B_2 & 0 \\ C_1 Q - R & (D_{11} - I)S & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -I/2 & 0 \\ C_2 Q & D_{21} S & D_{22} & -\gamma^2 I/2 \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} Q & \rho^i R' \\ \rho^i R & i\sigma^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \rho := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \forall i \in [1, m] \quad (10)$$

を満たす対角行列 $S > 0$, 行列 R が存在するならば、 $\mathcal{E}^{Q^{-1}}(\alpha^2)$ はレベル $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$, $\mu = (\lambda_{\max}(Q)/\lambda_{\min}(Q))^{1/2} > 0$ の $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域である。

3. $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域の設計

本章では、つぎの二つの設計問題を考える。

(I) 補題 1 の解析条件に基づいて、アンチワインドアップ機構

を備えた静的出力および状態フィードバックコントローラにより達成可能な $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域を特徴づけよ。
(II) 補題 1 の解析条件に基づいて、アンチwindアップ機構を備えた動的出力フィードバックコントローラにより達成可能な $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域を特徴づけよ。

まず、より具体的な問題設定を行ない、それぞれに対する解を与える。さらに、問題 (I) の解となる達成可能な $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域の集合は、問題 (II) の解となる達成可能な $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域内の制御対象の状態領域の集合以上の大きさになることを示す。すなわち、飽和を有する制御による領域的 $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能設計において、アンチwindアップ機構を備えた静的出力および状態フィードバックコントローラは、アンチwindアップ機構を備えた動的出力フィードバックコントローラより優れた結果をもたらすことを明らかにする。

3.1 問題設定

つぎの状態空間実現で与えられる LTI システム $G(s)$ を考える。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_p \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ w_p \\ u \end{bmatrix}. \quad (11)$$

ただし、 $x(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^q$, $w_p(t) \in \mathbb{R}^k$ はそれぞれ状態変数, 制御入力, 観測出力, 外乱であり, $z_p(t) \in \mathbb{R}^l$ は $\mathcal{L}_2$ 性能を評価するための信号である。この制御対象に対して、飽和を有する静的出力および状態フィードバックコントローラ $u = \mathcal{K}y$, さらに状態変数 $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ をもつ飽和を有する動的出力フィードバックコントローラ $u = \mathcal{K}y$ を考え、特に動的出力フィードバックコントローラの場合、閉ループ系の状態変数を $x(t) := [x'(t) \ x_c'(t)]' \in \mathbb{R}^n$ ($n := n_p + n_c$) とする。

この閉ループ系に対して、同様に動的出力フィードバックコントローラの場合、コントローラの状態を零に初期化したときの $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域を、制限付 $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域⁶⁾ とよぶことにする。すなわち、与えられた正定行列 X とスカラー $\delta \geq 0$ に対し、つぎの集合

$$\mathcal{E}_0^X(\delta) := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : x' X x \leq \delta, x \in \mathbb{R}^{n_p} \right\} \quad (12)$$

を定義すると、より厳密には、以下の三つの条件を満たす初期状態ベクトル $x(0) := [x'(0) \ x_c'(0)]'$ の集合を制限付 $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域と定義する。(i) $x_c(0) = 0$ かつ (ii) 任意の $w_p \in \mathcal{W}(\beta, \gamma)$ を加えた場合、任意の $x(0) \in \mathcal{E}_0^X(\alpha^2)$ に対し、 $x(t)$ はすべての $t \geq 0$ で $\|x(t)\| \leq d$ を満たすスカラー $d > 0$ が存在し、かつ $\mathcal{L}_2$ 性能条件 $\|z_p\|_{\mathcal{L}_{2t}}^2 \leq \gamma^2(\|w_p\|_{\mathcal{L}_{2t}}^2 + \alpha^2)$ を満たす。(iii) 特に $w_p = 0$ の場合、任意の $x(0) \in \mathcal{E}_0^X(\alpha^2)$ に対し、 $x(t)$ はすべての $t \geq 0$ で $\|x(t)\| \leq d$ を満たすスカラー $d > 0$ が存在し、かつ指数安定性能条件 $\|x(t)\| \leq \mu \|x(0)\| e^{-\varepsilon t}$ を満たす $\mu > 0$ が存在する。

Fig. 3 Static output and state feedback control system with anti-windup control structure

制限付 $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域は、明らかに $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域の部分集合である。特に、与えられた正定行列 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対し、(8) 式の $\mathcal{E}^P(\alpha^2)$ が閉ループ系の $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域ならば、 $\mathcal{E}_0^X(\alpha^2)$ は制限付 $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域である。ただし、 $X \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ は P の左上ブロック行列である。逆に、与えられた行列 $X \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ に対し $\mathcal{E}^P(\alpha^2)$ が $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域であり、かつあるブロック行列 $*$ に対して

$$P = \begin{bmatrix} X & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad (13)$$

が成立する行列 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在するならば、(12) 式の $\mathcal{E}_0^X(\alpha^2)$ は制限付 $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域である。

つぎに、問題 (I) および (II) におけるコントローラのクラスを明確に設定し、各問題を具体的に記述する。

問題 (I) では、飽和の制約条件を満たすコントローラ構造のうち、

$$u = \phi(z), \quad z = K \begin{bmatrix} y' & x' & z' - u' \end{bmatrix}', \quad K := \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

の構造 (Fig.3 参照) をもつ $\mathcal{K}$ を考える。ここで、 ϕ は (1) 式で定義される飽和関数であり、 K は定数行列である。飽和の度合を表わす信号 $z - u$ をフィードバックするこの構造は、アンチwindアップ機構として良く知られたものである (たとえば文献 1)~14) 参照)。この場合、すでに述べたループ変換を行なうと、閉ループ系は不感帯関数 φ と $H(s) := G(s) \oplus K$ のフィードバック結合 (Fig.4 参照) により記述される。ただし、 $w = \varphi(z)$ とおくと $G(s)$ の状態空間実現は

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ z_p \\ y \\ x \\ z - u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_2 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ C_1 & -D_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & 0 & D_{21} & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ w_p \\ z \end{bmatrix} \quad (15)$$

である。このとき、 $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域を特徴づける基礎として補題 1 を用いると、問題 (I) はつぎのように記述できる。

Fig. 4 Feedback control system with dead-zone nonlinearities

Fig. 5 Dynamical output feedback control system with anti-windup control structure

問題 (I) 実対称行列 Q と制御対象 (11) が与えられているとする。ある対角行列 $S > 0$, 行列 R に対して条件 (9), (10) を満たすコントローラ (14) が存在するための必要十分条件を求めよ。ここで, A, B, C, D は (15) 式を用いて得られる $G(s) \oplus K$ の状態空間行列である。

(注意 1) D_{21} が列フルランクの特別な場合, D_{21} の疑似逆行列 $D_{21}^\dagger$ を用いて, 外乱 $w_p = D_{21}^\dagger (y - C_2 x)$ は計測可能であり, 問題 (I) は FI (Full Information) 問題に帰着される。さらに, $D_{21} = 0$ の特別な場合, 問題 (I) は状態フィードバック制御問題に帰着される。したがって, 問題 (I) は FI 問題および状態フィードバック制御問題を特別な場合として包含する, より一般的な問題であることを注意しておく。

つぎに, 問題 (II) を具体的に設定する。ここでは, コントローラ $\mathcal{K}$ が

$$u = \phi(z), \quad z = K(s) \begin{bmatrix} y' & z' - u' \end{bmatrix}',$$

$$K(s) = \left(\begin{array}{c|cc} A_c & B_{c1} & B_{c2} \\ \hline C_c & D_{c1} & D_{c2} \end{array} \right) =: \left(\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right) \quad (16)$$

のような構造 (Fig.5 参照) をもつ場合について考える。ここで, $K(s)$ は伝達関数である。この構造は, 同様にアンチワインドアップ機構として良く知られたものである。この場合, すでに述べたループ変換を行なうと, 閉ループ系は Fig.4 で表わされ, 不感帯関数 ϕ と $H(s) := G(s) \oplus K(s)$ とのフィードバック結合とみなすことができる。ただし, $w = \phi(z)$ とおくと $G(s)$ の状態空間実現は

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ z_p \\ y \\ z - u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_2 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ C_1 & -D_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & 0 & D_{21} & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ w_p \\ z \end{bmatrix} \quad (17)$$

である。

以上より, 問題 (II) を記述するとつぎのようになる。

問題 (II) 実対称行列 X と制御対象 (11) が与えられているとする。あるブロック行列 $*$ に対して (13) 式が成立し, かつある対角行列 $S > 0$, 行列 R に対して条件 (9), (10) を満たす $Q > 0$ およびコントローラ (16) が存在する必要十分条件を求めよ。ここで, A, B, C, D は (17) 式を用いて得られる $G(s) \oplus K(s)$ の状態空間実現である。

問題 (II) の条件を満たす任意の X を用いて集合 $\mathcal{E}_0^X(\alpha^2)$ を (12) 式のように定義すると, それがコントローラ (16) で達成可能な制限付 $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域となることは明らかである。

(注意 2) 制御対象に含まれる制御入力端の飽和要素前後の信号は, 一般的に計測可能とは限らない。したがって, コントローラの出力側に同じ飽和要素を配置し, 飽和要素前後の信号はコントローラの内部信号とすることを注意しておく。

3.2 主結果

まず, 以下の補題と定理で問題 (I) および (II) に対する解を与える。

まず, 問題 (I) の解は以下のとおりである。

[補題 2] 実対称行列 Y , 各要素が正のベクトル $\sigma \in \mathbb{R}^m$ および, 制御対象 (11) が与えられているとする。また, (8) 式により集合 $\mathcal{E}^{Y^{-1}}(\alpha^2)$ を定義する。このとき, 行列 Y が問題 (I) の条件を満たすための必要十分条件は,

$$\text{He} \begin{bmatrix} H_{22} & B_2(J-S) & H_{24} & 0 \\ F-R & J-S & MD_{21} & 0 \\ 0 & 0 & -I/2 & 0 \\ H_{52} & D_{12}(J-S) & H_{54} & -\gamma^2 I/2 \end{bmatrix} < 0,$$

$$H_{22} := (A + \varepsilon I)Y + B_2 F, \quad H_{24} := B_1 + B_2 M D_{21},$$

$$H_{52} := C_1 Y + D_{12} F, \quad H_{54} := D_{11} + D_{12} M D_{21}, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} Y & \rho^i R' \\ \rho^i R & i\sigma^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \rho := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \forall i \in [1, m] \quad (19)$$

を満たす対角行列 $S > 0$, 行列 F, J, M, R が存在することである。ただし, ${}^i R$ は行列 R の第 i 番目の行ベクトルである。また, この条件が成立するとき, レベル $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ の $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域 $\mathcal{E}^{Y^{-1}}(\alpha^2)$ を達成するコントローラ (14) が存在する。

(証明) 補題 1 の (9), (10) 式に変数変換 $Y := Q, F :=$

$(K_1 C_2 + K_2)Y$, $J := K_3 S$, $M := K_1$ を適用することにより (18), (19) 式を得る. ■

補題 2 を用い $\mathcal{E}^{Y^{-1}}(\alpha^2)$ を最大化するには, 対角行列 $S > 0$, 行列 $Y > 0$ および F, J, M, R を変数として, 制約条件 (18), (19) のもとで $\text{tr}(Y^{-1})$ を最小化すればよい. 残念ながらこの最適化問題は, 目的関数 $\text{tr}(Y^{-1})$ は変数に関し非線形なため凸性をもたない. そこで, ある実対称行列 $X > 0$ に対して, $\mathcal{E}^X(\alpha^2)$ で定義される楕円体を考え, 初期状態は $\mathcal{E}^X(\alpha^2)$ 内に存在するとする, すなわち,

$$\mathcal{E}^X(\alpha^2) \subseteq \mathcal{E}^{Y^{-1}}(\alpha^2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (20)$$

の関係を考慮すると, 楕円体 $\mathcal{E}^{Y^{-1}}(\alpha^2)$ の大きさを近似的に測る一つの指標として, たとえば $1/\text{tr}(X)$ を用いると, 目的関数 $\text{tr}(X)$ は変数に関し線形なため凸性をもつことになる. したがって, 対角行列 $S > 0$, 行列 $X > 0$, $Y > 0$ および F, J, M, R を変数として, 制約条件 (18), (19), (20) のもとで $\text{tr}(X)$ を最小化する場合には, 内点法により最適解を得ることができる. 以上より, 補題 2 を用いて最大の $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域を達成するコントローラの設計方法を手短に述べる.

設計方法:

1. LMI 条件を制約とする線形目的関数を最小化するつぎの問題を解く. ただし, S は対角行列である.

$$\underset{S>0, X>0, Y>0, F, J, M, R}{\text{minimize}} \quad \text{tr}(X) \text{ subject to (18) - (20).}$$

2. コントローラの定数行列 K (14) をつぎのように計算する.

$$K = \begin{bmatrix} M & FY^{-1} - MC_2 & JS^{-1} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

つぎの定理は問題 (II) の解を与える.

《定理 1》 実対称行列 X , 各要素が正のベクトル $\sigma \in \mathbb{R}^m$ および, 制御対象 (11) が与えられているとする. また, (12) 式により集合 $\mathcal{E}_0^X(\alpha^2)$ を定義する. このとき, 行列 X が問題 (II) の条件を満たすための必要十分条件は,

$$\text{He} \begin{bmatrix} X(A + \varepsilon I) + LC_2 & XB_1 + LD_{21} & 0 \\ 0 & -I/2 & 0 \\ C_1 + D_{12}MC_2 & H_{54} & -\gamma^2 I/2 \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

$$\text{He} \begin{bmatrix} H_{22} & B_2(J - S) & H_{24} & 0 \\ F - R & J - S & MD_{21} & 0 \\ 0 & 0 & -I/2 & 0 \\ H_{52} & D_{12}(J - S) & H_{54} & -\gamma^2 I/2 \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} Y & \rho^i R' \\ \rho^i R & \sigma^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \rho := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \forall i \in [1, m] \quad (25)$$

を満たす対角行列 $S > 0$, 対称行列 Y , 行列 F, J, L, M, R が存在することである. ただし, $^i R$ は, 行列 R の第 i 番目の行ベクトルである. また, この条件が成立するとき, レベル $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ の制限付 $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域 $\mathcal{E}_0^X(\alpha^2)$ を達成するコントローラ (16) が存在する.

(証明) 補題 1 の (9) 式に線形変数変換^{15), 16)} と変数消去^{17)~19)} の補題を適用し, 合同変換より (22), (23) 式を得る. また同様に, 補題 1 の (10) 式に線形変数変換と変数消去の補題を適用することにより (24), (25) 式を得る. ■

定理 1 を用いて最大の制限付 $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域を達成するコントローラの設計方法を手短に述べる.

設計方法:

1. LMI 条件を制約とする線形目的関数を最小化するつぎの問題を解く. ただし, S は対角行列である.

$$\underset{S>0, F, J, L, M, R, X, Y}{\text{minimize}} \quad \text{tr}(X) \text{ subject to (22) - (25).}$$

2. 固定された上記の解 F, J, L, M, R, S, X, Y に対し, つぎの LMI 条件を制約とする行列 Q, U, R_1 を求める.

$$\text{He} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & 0 \\ H_{21} & H_{22} & B_2(J - S) & H_{24} & 0 \\ H_{31} & H_{32} & J - S & MD_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I/2 & 0 \\ H_{51} & H_{52} & D_{12}(J - S) & H_{54} & -\gamma^2 I/2 \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} X & I & \rho^i R'_1 \\ I & Y & \rho^i R' \\ \rho^i R_1 & \rho^i R & \sigma^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \rho := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \forall i \in [1, m],$$

$$\begin{aligned} H_{11} &:= X(A + \varepsilon I) + LC_2, & H_{12} &:= Q + \varepsilon I, \\ H_{13} &:= (U - XB_2)S, & H_{14} &:= XB_1 + LD_{21}, \\ H_{21} &:= A + B_2MC_2 + \varepsilon I, & H_{31} &:= MC_2 - R_1, \\ H_{32} &:= F - R, & H_{51} &:= C_1 + D_{12}MC_2. \end{aligned}$$

3. コントローラの伝達関数 $K(s)$ の状態空間行列 (16) をつぎのように計算する.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X - Y^{-1} & XB_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} Q - XAY & L & U \\ F & M & JS^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Y & 0 & 0 \\ C_2Y & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} * & * & * \\ MC_2 - FY^{-1} & M & JS^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} * & * & * \\ -K_2 & K_1 & K_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (26)$$

以下に示す本論文の主結果は、補題 2 で与えられる最大の達成可能な $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域が、定理 1 で与えられる最大の達成可能な $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域内の制御対象の状態領域以上の大きさになることを証明する。この事実をまとめると以下ようになる。

《定理 2》 与えられた行列 X に対し、定理 1 の条件が成立するならば、補題 2 の条件が成立する。結果として、補題 2 で特徴づけられる達成可能なレベル $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ の $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域のクラスは、定理 1 で特徴づけられる達成可能なレベル $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ の $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域内の制御対象の状態領域のクラス以上の大きさになる。

(証明) まず X を固定し、定理 1 の条件が成立すると仮定する。このとき、補題 2 の条件 (18), (19) および、一般性を失うことなく

$$P = \begin{bmatrix} X & X - Y^{-1} \\ X - Y^{-1} & X - Y^{-1} \end{bmatrix}$$

が成立する¹⁹⁾。したがって、

$$\begin{aligned} x'(0)Px(0) &= x'(0)Y^{-1}x(0) \\ &+ (x'(0) + x'_c(0))(X - Y^{-1})(x(0) + x_c(0)) \leq \alpha^2 \\ \Rightarrow x'(0)Y^{-1}x(0) &\leq \alpha^2 \end{aligned}$$

が成立する。すなわち、 $\{x \in \mathbb{R}^{n_p} : x \in \mathcal{E}^P(\alpha^2)\} \subseteq \mathcal{E}^{Y^{-1}}(\alpha^2)$ が成立する。■

以上より、「飽和を有する制御において、達成可能な $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域内の制御対象の状態領域の大きさをアンチwindアップ機構を備えた動的出力フィードバックコントローラ (16) に基づく結果 (定理 1) 以上に改善するため、アンチwindアップ機構を備えた静的出力および状態フィードバックコントローラ (14) を用いること (補題 2) は有効である。」と結論される。

本論文では、 $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域の最大化問題に焦点を絞ってアンチwindアップ機構を備えたコントローラの有効性を議論してきたが、定理 2 は与えられたいかなる $X > 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$, $\varepsilon \geq 0$ に対しても、定理 1 の条件が成立するならば補題 2 の条件が成立することを明らかにしている。したがって、除去可能な外乱 β 最大化問題、 $\mathcal{L}_2$ ゲイン γ 最小化問題、指数安定性 ε 最大化問題についても本論文と同様の結果、すなわち、アンチwindアップ機構を備えた動的出力フィードバックコントローラ (16) に基づく設計結果以上の結果を得るため、アンチwindアップ機構を備えた静的出力および状態フィードバックコントローラ (14) を用いることは有効であることになる。これは、定理 1 の条件を満たす各変数が存在するならば必ず補題 2 の条件を満たす各変数が存在することを定理 2 が証明しているからである。

なお、一般化制御対象 (17) が

$$\begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

の特別な場合について考える。このとき、コントローラ $\mathcal{K}$ のクラスは、

$$\mathcal{K}(14) \subseteq \mathcal{K}(16) \quad (28)$$

である。したがって、定理 2 よりただちに以下を得る。

[系 1] (27) 式により一般化制御対象 (17) が与えられているとする。このとき、与えられた行列 X に対し、定理 1 の条件と補題 2 の条件は等価である。結果として、補題 2 で特徴づけられる達成可能なレベル $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ の $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域のクラスは、定理 1 で特徴づけられる達成可能なレベル $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ の $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域内の制御対象の状態領域のクラスと一致する。

(証明) まず、定理 2 より

$$\{x \in \mathbb{R}^{n_p} : x \in \mathcal{E}^P(\alpha^2)\} \subseteq \mathcal{E}^{Y^{-1}}(\alpha^2)$$

が成立する。つぎに、(28) 式より

$$\{x \in \mathbb{R}^{n_p} : x \in \mathcal{E}^P(\alpha^2)\} \supseteq \mathcal{E}^{Y^{-1}}(\alpha^2)$$

が成立することは自明である。したがって、

$$\{x \in \mathbb{R}^{n_p} : x \in \mathcal{E}^P(\alpha^2)\} = \mathcal{E}^{Y^{-1}}(\alpha^2)$$

が成立する。■

以上より、「飽和を有する制御において、達成可能な $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域の大きさをアンチwindアップ機構を備えた静的出力および静的状態フィードバックコントローラ (14) に基づく結果 (補題 2) 以上に改善するため、アンチwindアップ機構を備えた動的出力および動的状態フィードバックコントローラ (16) を用いること (定理 1) は有効でない。」と結論される。これは、アンチwindアップ機構を備えた出力および状態フィードバックゲインのクラス (14) を、動的なアンチwindアップ機構を備えた出力および状態フィードバックのクラス (16) にまで広げても、達成可能な $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域の大きさは改善されないことを示し、従来の線形制御系の最適制御、 $\mathcal{H}_2$ 制御、 $\mathcal{H}_\infty$ 制御における結果²⁰⁾と同様の結果を明らかにしていることを注意しておく。なお、除去可能な外乱 β 最大化問題、 $\mathcal{L}_2$ ゲイン γ 最小化問題、指数安定性 ε 最大化問題についても前述のように系 1 と同様の結果になることも注意しておく。

最後に、定理 1 の可解条件をシステム論的に説明する。条件 (22) は、おもに $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能を満たすオブザーバゲイン L の設計条件、条件 (23) は、おもに $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能を満たす状態フィードバックゲイン F の設計条件、条件 (24) は Lyapunov 行列の正定性の条件、条件 (25) は Lyapunov 関数を考察する状態空間上の局所領域の条件を意味する。条件 (22), (24) は飽和のない通常の線形システムの制御系設計条件と等価である。一方、条件 (23), (25) は条件 (18), (19) と等価であり、飽和を有するシステムの制御系設計条件となっている。このとき、条件 (25) は X を含まないため、制御対象の状態は局所領域の制約を受けることなく、コント

Fig. 6 An example of dynamical output feedback control system with anti-windup control structure

ローラの状態のみが制約を受けることに注意を要する。すなわち、アンチwindアップ機構を備えた動的出力フィードバックコントローラの設計条件は、飽和のない通常の線形システムのおもにオブザーバゲインの設計条件と、飽和を有するシステムのおもに状態フィードバックゲインの設計条件に明確に分離でき、この結果はシステム論的意味において重要である。なお、円板条件に基づく設計の場合⁸⁾、以上の明確な分離性は成立せず、この分離性は一般化セクター条件に基づく設計での特有な性質であることを注意しておく。また、コントローラ (14), (16), (21), (26) の結果 ($C_c = -K_2$) より、アンチwindアップ機構を備えた動的出力フィードバックコントローラ (16), (26) の状態 x_c は、制御対象 (11) の状態 x の -1 倍された推定値と考えられ、この結果にも注意を要する。

4. 数値実験

定理 2 より、補題 2 は定理 1 を特別な場合として包含している。したがって、領域の大きさを測る指標にかかわらず、前者から得られる最大の $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域は、後者から得られる最大の $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域内の制御対象の状態領域以上の大きさになることが保証される。

実際、補題 2 を用いることにより、定理 1 で与えられる $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域よりも大きな領域を得ることができる。以下では、数値例を用いてこれを示す。Fig.6 の制御系、すなわち、

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

により与えられる制御対象および、状態実現データ

$$\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

により与えられる一般化制御対象 (11) を考える。飽和リミットを $\sigma = 1$ 、初期状態に依存するパラメータを $\alpha = 1$ 、指数安定性能レベルを $\varepsilon = 1$ 、簡単化のため $\mathcal{L}_2$ 外乱の上界を $\beta = 0$ 、 $\mathcal{L}_2$ ゲイン性能レベルを $\gamma = +\infty$ とする。このとき、 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ である。補題 2 と条件 (20) および、定理 1 の条件のもとで $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域の大きさ $1/\text{tr}(X)$ を最大化すると、それぞれ $\text{tr}(X) = 2.0000$, $\text{tr}(X) = 4.0001$ を得る。したがって、補題 2 により得られる最大領域 ($\text{tr}(X) = 2.0000$)

は、定理 1 によるもの ($\text{tr}(X) = 4.0001$) よりも (行列のトレースの意味で) 大きいことがわかる。以上より、動的出力フィードバックコントローラを用いた設計 (定理 1) に比べ、静的出力および状態フィードバックコントローラを用いた設計 (補題 2) は最大 $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域をより大きく高性能に設計ができるといえる。

つぎに、時間応答をシミュレーションにより確認するため、同じ一般化制御対象 (29) および $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能レベル $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon) = (1, 0, +\infty, 1)$ に対し、定理 1 と

$$\begin{aligned} FF' \leq 10000 & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 10000 & F \\ F' & I \end{bmatrix} \geq 0, \\ L'L \leq 10000 & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 10000 & L' \\ L & I \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (30)$$

の条件のもとで達成可能な出力 $y(t) = x_1(t)$ の大きさ $1/([1 \ 0]X[1 \ 0]')$ を最大化する。このとき、 $[1 \ 0]X[1 \ 0]' = 1.0032$ ($|y(0)| = |\{1/([1 \ 0]X[1 \ 0]')\}^{1/2}| = 0.9984$),

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{85.35 \times 10^{-7}s^2 - 7.267s - 7.27}{10^{-7}s^2 + 8.402 \times 10^{-2}s + 7.351} \\ \frac{10^{-7}s^2 + 8.402 \times 10^{-2}s + 7.351}{10^{-7}s^2 + 8.402 \times 10^{-2}s + 7.351} \end{bmatrix} \quad (31)$$

を得る。条件 (30) はハイゲインによるシミュレーションの長時間化を避ける条件である。初期状態 $x(0) =$

Fig. 7 $y(t)$ and $-x_{c1}(t)$ v.s. t

Fig. 8 $x_2(t)$ and $-x_{c2}(t)$ v.s. t

Fig. 9 $z(t)$ v.s. t

Fig. 10 $u(t)$ v.s. t

$[y(0) \ x_2(0) \ x_{c1}(0) \ x_{c2}(0)]' = [0.9 \ 0 \ 0 \ 0]' \in \mathcal{E}^X(1)$ に対し、時間応答を Fig.7~10 に示す。Fig.7, 8 で、実線は制御対象の状態軌道 $x(t)$ で、破線はコントローラの -1 倍の状態軌道 $-x_c(t)$ である。したがって、 $y(t) = x_1(t)$ を $-x_{c1}(t)$ で、 $x_2(t)$ を $-x_{c2}(t)$ で状態推定可能であることがわかる。また、Fig.9, 10 で、それぞれ実線はコントローラ出力 $z(t)$ と制御入力 $u(t)$ である。明らかに、飽和を許容した制御入力を生成させることが可能であることがわかる。

(注意3) コントローラ (31) により,

$$D_{11} = D_{c_2} = 0.99999999997071 < 1$$

であり, 制御系は well-posedness 性の十分条件 (7) を満たしていることを注意しておく.

5. おわりに

飽和 (等価的に不感帯) 要素を有する非線形系に対し, 一般化セクター条件に基づき, 初期状態と $\mathcal{L}_2$ 外乱を考慮した $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域の設計方法を提案した. (16) 式の構造をもつアンチwindアップ機構を備えた動的出力フィードバックコントローラおよび, (14) 式の構造をもつアンチwindアップ機構を備えた静的出力および状態フィードバックコントローラの設計問題の可解条件が, それぞれ LMI 条件に帰着可能なことを明らかにした. また, 前者のコントローラから得られる達成可能な $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域内の制御対象の最大の状態領域に比べ, 後者のコントローラはより大きな領域を与えることも明らかにした. さらに, この特別な場合として, アンチwindアップ機構を備えた出力および状態フィードバックゲインのクラス (14) を, 動的なアンチwindアップ機構を備えた出力および状態フィードバックのクラス (16) にまで広げても, 達成可能な $\mathcal{L}_2$ /指数安定性能保証領域の大きさは改善されないことも明らかにした.

なお, 前者のコントローラの設計条件は, 飽和のない通常の線形システムのオブザーバゲインの設計条件と, 飽和を有するシステムの状態フィードバックゲインの設計条件とに, システム論的に明確に分離できることを注意しておく.

参考文献

- 1) E.F. Mulder and M.V. Kothare: Static anti-windup controller synthesis using simultaneous convex design, *Proceeding of ACC*, 651/656 (2002)
- 2) 鷹羽浄嗣: 追従性能を考慮した Anti-Windup 制御, 計測自動制御学会第 32 回制御理論シンポジウム, 139/144 (2003)
- 3) C. Pittet, S. Tarbouriech and C. Burgat: Output feedback synthesis via the circle criterion for linear systems subject to saturating inputs, *IEEE Conf. Decision Contr.*, 401/406 (1998)
- 4) M. Saeki and N. Wada: Synthesis of a static anti-windup compensator via linear matrix inequalities, *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, **12**, 927/953 (2002)
- 5) J.M. Gomes da Silva Jr. and S. Tarbouriech: Anti-windup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach, *IEEE Conf. Decision Contr.*, 4451/4456 (2003)
- 6) T. Kiyama and K. Sawada: LMI-based $\mathcal{L}_2$ analysis/synthesis with saturating control via generalized sector approach, *IFAC/IFORS/IMACS/IFIP symposium on large scale systems: theory and applications*, 504/510 (2004)
- 7) F. Wu, Z. Lin and Q. Zheng: Output feedback stabilization of linear systems with actuator saturation, *Proc. 2005 Amer. Control Conf.*, 3385/3390 (2005)
- 8) T. Kiyama, S. Hara and T. Iwasaki: Effectiveness and

limitation of circle criterion for LTI robust control systems with control input nonlinearities of sector type, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **15**, 873/901 (2005)

- 9) T. Kiyama and K. Sawada: On the relation between analysis and synthesis conditions for discrete-time systems with saturation nonlinearities, *IEEE Conf. Decision Contr.*, 8124/8131 (2005)
- 10) T. Hu, A. Tell and L. Zaccarian: Control of saturated linear plants via output feedback containing an internal deadzone loop, *Proceeding of ACC*, 5239/5244 (2006)
- 11) 竹川, 木山: LMI に基づく分散型アンチwindアップ制御系設計, 計測自動制御学会論文集, **43-8**, 705/707 (2007)
- 12) T. Hu, A.R. Teel and L. Zaccarian: Stability and performance for saturated systems via quadratic and non-quadratic Lyapunov functions, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **51-11**, 1770/1786 (2006)
- 13) 木山 健: 飽和を有する制御系の解析条件の関係性について—マルチプライア/ポリトープ的方法に基づく $\mathcal{L}_2$ /指数安定性解析, 計測自動制御学会論文集, **44-5**, 425/433 (2008)
- 14) 渡辺, 内田, 示村, 藤田: 制御入力制限を受ける制御系に対する Anti-Windup and Bumpless Transfer の新しい設計法, 計測自動制御学会論文集, **30-6**, 660/668 (1994)
- 15) C. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali: Multiobjective output-feedback control via LMI optimization, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **42-7**, 896/911 (1997)
- 16) I. Masubuchi, A. Ohara and N. Suda: LMI-based controller synthesis: a unified formulations and solution, *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, **8**, 669/686 (1998)
- 17) P. Finsler: Über das vorkommen definiter und semidefiniter formen in scharen quadratischer formen, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **1**, 19/28 (1937)
- 18) P. Gahinet and P. Apkarian: A linear matrix inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control, *Int. J. Robust Nonlin. Contr.*, **4**, 421/448 (1994)
- 19) T. Iwasaki and R.E. Skelton: All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas, *Automatica*, **30-8**, 1307/1317 (1994)
- 20) K. Zhou and P.P. Khargonekar: An algebraic Riccati equation approach to H_∞ optimization, *Syst. Contr. Lett.*, **11-2**, 85/91 (1988)

[著者紹介]

木山 健 (正会員)

2001 年東京工業大学大学院理工学研究科博士後期課程修了 (制御工学専攻). 東京大学大学院情報理工学系研究科特任研究員, 大阪大学大学院工学研究科研究員, 同研究科特任教員, 同研究科助手, 同研究科特任助手などを経て, 2006 年同研究科招聘研究員. ロバスト制御を中心に研究に従事. 2007 年度システム制御情報学会賞論文賞受賞. システム制御情報学会などの会員. 博士 (工学).