非線形要素の時系列相関解析に関する一考察

林 順 雄

日立製作所習志野工場 習志野市東習志野町 1-1

(昭和 43 年 7 月 20 日受)

On a Method of Correlation Analysis for Nonlinear Elements

Nobuo HAYASHI

(Narashino Works, Hitachi Ltd, Narashino)

(Received July 20, 1968)

In this paper, some applications of the method of correlation analysis for the identification of nonlinear elements with zero-memory property are discussed. The estimation of nonlinear characteristics by correlation methods is generally very difficult. It is well-known that the conventional correlation method gives the statistically linearized characteristics of general nonlinear systems, however further details about nonlinear characteristics of elements are not given by this method.

A convenient method for the estimation of the nonlinear characteristics of elements is proposed. An algebraic treatment of the equation for the evaluation of nonlinearity factors a_n is shown. The method proposed here is very easy and rational in comparison with the method of multiple regression analysis for this problem. Finally, some numerical examples are shown.

1. 緒 言

線形系の相関解析による動特性推定理論については、いちおうその成果もあがっているし文献も多い。これらの問題をひととおり考察した後における課題としてだれしも思いあたるのは、非線形特性を時系列相関解析によって推定し得ないであろうかという問題および分布常数系の相関解析の問題であろう。ここでは非線形要素の相関解析の問題に限定して考察を加える。はじめに相関法を用いて非線形特性または非線形度を推定することの意義、および相関法を用いない場合に比較してどのような長所があり得るものかについて考えてみる。

相関法を用いて自動制御系ないし自動制御要素の特性認知を行なう手法の長所としては、周知のとおり系の定常動作状態つまりオンラインにおける特性測定を可能ならしめることがある。また別の利点としては低レベルの信号を用い得るので、飽和形の非線形要素については、非線形性の影響を受けずにその線形部分特性の測定が可能であることがある。また反面実際の励

振振幅レベルにおける特性を知り得る利点も考えられる。さらにまたオンラインにおける定常励振振幅がその要素の飽和域にはいる場合や、非線形要素が $3/2$ 乗特性のごときものであるさいには、非線形安定論を適用するためにも、相関法による非線形要素の特性認知が行なえれば便利である。これに反し、過渡応答法や周波数応答法ではとくに励振振幅が大きくなりやすく、またオンライン測定ができない欠点がある。また非線形度を知ることの意義は、たとえば飽和形であることが既知の要素が、時間平均的にどの程度まで非線形領域まで励振されているかを示す尺度を得ることにある。

周知のように線形系の相関法による動特性推定手法を非線形系に適用した場合には、その統計的線形化特性を推定することになる。したがってこの統計的線形化特性のみ知れば十分な場合には、従来の相関法の適用のみで目的を達成できる。しかしながら、たとえば飽和形の非線形要素が時間平均的にどの程度線形領域で動作しているかの尺度を示す非線形度や、実際の励振範囲における非線形特性を知るためには、オンライン推定可能な相関法の開発が必要で従来の手法のみで

は不十分なのである．以下においてこの目的に沿った手法の一つを示すことにする．

2. 非線形系の相関解析の理論

ここでは簡単のため一変数開ループ系に限定して考察し、しかも非線形系は Fig. 1 のようにゼロメモリ

Fig. 1 Univariate nonlinear system

形非線形要素と線形要素とに分離できるものとする．このような場合には、線形要素については従来の相関法で特性認知できるので、問題は非線形関数 $f(z)$ の推定に帰着する．

さて入力 $Z(t)$ は正規確率過程に従う確率変数とする．この場合成立する周知の基本的諸関係式を導入して説明を加える．いま任意の時点 t_1, t_2 における $Z(t)$ の同時分布の確率密度 $W_2(z_1, z_2)$ は次式で与えられる．

$$W_2(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{z_1}\sigma_{z_2}\sqrt{1-\rho_z^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_z^2)}\right. \\ \left.\times\left\{\frac{(z_1-m_{z_1})^2}{\sigma_{z_1}^2} + \frac{(z_2-m_{z_2})^2}{\sigma_{z_2}^2} - 2\rho_z \frac{(z_1-m_{z_1})(z_2-m_{z_2})}{\sigma_{z_1}\sigma_{z_2}}\right\}\right] \quad (1)$$

これは2次元正規分布の一般式であるので、記号は自明であり説明を省略する．これを z_1 と z_2 との相関 ρ_z に関する直交多項式に展開して (2) 式を得る¹⁾．

$$W_2(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{z_1}\sigma_{z_2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{z_1-m_{z_1}}{\sigma_{z_1}}\right)^2 + \left(\frac{z_2-m_{z_2}}{\sigma_{z_2}}\right)^2\right\}\right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ \times \rho_z^n H_n\left(\frac{z_1-m_{z_1}}{\sigma_{z_1}}\right) H_n\left(\frac{z_2-m_{z_2}}{\sigma_{z_2}}\right) \quad (2)$$

ここで $H_n(\zeta)$ は ζ に関する n 次のエルミート多項式を示す．

さて線形系の場合には、入力の自己相関と入出力の相互相関のみを用いて動特性推定を行なうことができる．ただしスペクトル解析により周波数応答関数を推定するさいには、推定精度を統計的にはあくする尺度として coherency r を次式により求めることが多い．

$$r^2 = |A(f)|^2 S_{zz}(f) / S_{xx}(f) \quad (3)$$

ここで $S_{zz}(f)$, $S_{xx}(f)$ は入力および出力のパワースペクトル密度、 $A(f)$ は周波数応答関数である．その場合には $S_{xx}(f)$ を求めるため出力の自己相関を計算することになるが、この coherency 算出は本質的

に必要なものではない．ところが非線形要素の特性を求める場合には、出力の自己相関もまた本質的に必要な情報源となるのである．ここではこの説明のため、出力の自己相関の計算式より出発する．

非線形要素のゼロメモリ形であるのが既知とすれば、時点 $t, t+\tau$ における出力値より2次モーメント $B_x(t, t+\tau)$ を求めれば以下になる．

$$B_x(t, t+\tau) = \varepsilon\{X(t)X(t+\tau)\} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z_1)f(z_2)W(z_1, z_2)dz_1dz_2 \quad (4)$$

ここで $f(z)$ は非線形特性を示し、 ε は期待値演算子である． $W_2(z_1, z_2)$ に直交展開式を用いて次式を得る²⁾．

$$B_x(t, t+\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_z^n(\tau) a_{1n}a_{2n} \quad (5)$$

ここで a_{in} ($i=1, 2$) は、 m_{z_i} , σ_{z_i} の関数でつぎで与えられる．

$$a_{in} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n!}\sigma_{z_i}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z_i) H_n\left(\frac{z_i-m_{z_i}}{\sigma_{z_i}}\right) \exp \\ \times \left[-\frac{(z_i-m_{z_i})^2}{2\sigma_{z_i}^2}\right] dz_i \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi n!}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta\sigma_{z_i}+m_{z_i}) H_n(\zeta) e^{-\zeta^2/2} d\zeta \quad (6)$$

またはつぎのように表現してもよい．

$$a_{in}(m_{z_i}, \sigma_{z_i}) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \varepsilon\left\{f(z_i) H_n\left(\frac{z_i-m_{z_i}}{\sigma_{z_i}}\right)\right\} \quad (7)$$

ここで $H_0(\zeta)=1$ に注意して、 $a_{10}=\varepsilon\{f(z_1)\}$, $a_{20}=\varepsilon\{f(z_2)\}$ を考慮すれば、出力 X の自己相関関数 $R_x(t, t+\tau)$ はつぎのようになる．

$$R_x(t, t+\tau) = B_x(t, t+\tau) - \varepsilon\{f(z_1)\}\varepsilon\{f(z_2)\} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_z^n(\tau) a_{1n}a_{2n} \quad (8)$$

さらに入力 $z(t)$ が定常的つまり正規定常過程であれば (これは実際上は多くの場合成立する)、 $m_{z_1}=m_{z_2}=m_z$, $\sigma_{z_1}=\sigma_{z_2}=\sigma_z$ であるから、 $a_{1n}=a_{2n}=a_n$ となり次式を得る．

$$R_x(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_z^n(\tau) a_n^2 \quad (9)$$

さていっぽう、入出力の相互相関 $R_{xz}(\tau)$ はどうか考えてみよう．定義により $R_{xz}(\tau)$ は以下のようになる．

$$R_{xz}(\tau) = \varepsilon\{X(t)Z(t+\tau)\} - \varepsilon\{X(t)\}\varepsilon\{Z(t+\tau)\} \quad (10)$$

$$B_{xz}(\tau) = \varepsilon\{X(t)Z(t+\tau)\} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z_1)z_2W_2(z_1, z_2)dz_1dz_2 \quad (11)$$

上述と全く同様の計算過程を経て、次式が得られる。

$$B_{xz}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1n} b_n \rho_z^n(\tau) \quad (12)$$

ここで b_n は次式で与えられる。

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n!} \sigma_z} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} z H_n\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right) \times \exp\left[-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right] dz \quad (13)$$

これを 2 つの部分に別けて計算する。

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n!} \sigma_z} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (z-m_z) H_n\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right) \times \exp\left\{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right\} dz \right. \\ \left. + m_z \int_{-\infty}^{\infty} H_n\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right) \exp\left\{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right\} dz \right] \quad (14)$$

$\zeta = \frac{z-m_z}{\sigma_z}$ とおき、 $H_0(\zeta)=1$, $H_1(\zeta)=\zeta$ に注意して、

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n!}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} H_1(\zeta) H_n(\zeta) e^{-\zeta^2/2} d\zeta \right. \\ \left. + m_z \int_{-\infty}^{\infty} H_0(\zeta) H_n(\zeta) e^{-\zeta^2/2} d\zeta \right] \quad (15)$$

ここでエルミート多項式 $H_n(\zeta)$ の直交性より次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= m_z, & b_1 &= 1, \\ b_n &= 0, & (n \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

けっきょく、つぎの関係が成立する ($a_0=m_z$, $R_z(\tau)=\sigma_z^2 \rho_z(\tau)$ に注意)。

$$B_{xz}(\tau) = a_0 m_z + a_1 \rho_z(\tau) \quad (17)$$

$$R_{xz}(\tau) = a_1 \rho_z(\tau) = \frac{a_1}{\sigma_z^2} R_z(\tau) \quad (18)$$

以上の結果は既知のことがらであるが、以下本題の考察に得る。上式から見られるとおり、相互相関および入力自己相関を用いたさいは、 a_1 の推定しか行なえない。つまり一般には任意の非線形系に対する統計的線形化動特性が推定されるだけである。このようにして非線形特性の推定には出力の自己相関が本質的な情報源となるのが諒解される。具体的には出力および入力の自己相関より非線形性の推定を行ない、相互相関より位相ないし遅延時間の推定を行なうとよいと考えられる。まず最初に (18) 式より a_1 を精度良く推定することを行なう。

τ の 1 つの時点につき a_1 を求めるよりは、適当な M 個の τ につき (18) 式を作り、最小自乗法によって a_1 を推定するほうが精度上好しい。念のため書けば、

$$\left. \begin{aligned} R_{xz}(\tau_1) &= \hat{a}_1 \rho(\tau_1) + \varepsilon_1 \\ R_{xz}(\tau_M) &= \hat{a}_1 \rho(\tau_M) + \varepsilon_M \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

として $\sum \varepsilon_i^2$ が最小となるように $\hat{a}_1$ を推定する。ここで ε_i は正規分布に従う誤差として扱える。周知の手法でもあり、これ以上の説明は省略する。

つぎに $a_n (n=2, 3, \dots, l)$ を推定し、 a_n と a_1 とより非線形特性を推定する手法を考える。なお類形的な非線形要素については、 a_n が算出されているので (たとえば文献 2) 参照) これらの比較で大略の非線形性推定は a_n のみでも可能である。また a_n^2 は (6) の示すとおり $1/n!$ で評価され、いっぽう $\rho_z^n(\tau)$ は τ および n の大きい所できわめて小となるので、 τ の小さい部分の $R_x(\tau)$ が重要な情報を与えることに気がつく：つまり非線形性に基づく高周波の発生は $R_x(\tau)$ の $\tau=0$ の近傍で顕著となるので、 τ の 0 近傍は原理的には重要であるが、後に示す簡便推定法ではこの近傍はかえって使いにくいことがある。

3. 非線形特性認知の一手法

前述のとおりまず a_n の推定法を考え、つぎに (6) 式を用いて $f(z)$ を推定する方法について述べる。

3.1 a_n の推定の一手法

入力および出力の自己相関のみを用いるときは、 a_n^2 を大略はあくし得るに過ぎないことが検討の結果明らかとなったので、これは後に簡便推定法として述べることにし、ここでは Fig. 2 のような回路により特性

Fig. 2 The principle diagram of identification method

認知を行なうことを考える。

Fig. 2 のように $g(z)$ を特性既知の非線形要素とし、 $Y(t)$, $X(t)$, $Z(t)$ より $f(z)$ を推定する。この場合もしも $g(z)$ を可変にできれば、 $X(t) - Y(t) = 0$ (厳密には平均収束の意味) とする $g(z)$ で $f(z)$ を推定できるので、手法的になんの目新しさもない。しかし $g(z)$ を調整したりするのは機構的にも複雑であるので、ここでは $g(z)$ を最初から一定の非線形特性に固定した場合の $f(z)$ の推定法について考察する。すなわち $g(z)$ なる非線形要素は、有限個数のエルミート直交多項式を用いて、つぎのように表現されるよう構成する (すなわち、エルミート多項式の性質から考えて、 g は M 次多項式で表現される非線形要素となる)。

$$g(z) = g(m_z + \zeta \sigma_z) = g^*(\zeta) = \sum_{n=0}^M k_n H_n(\zeta) \quad (19)$$

実例として $k_0 = k_1 = \dots = k_6 = 1$, $M=6$ とすれば, この場合の $g^*(\zeta)$ はつぎようになる.

$$g^*(\zeta) = \sum_{n=0}^6 H_n(\zeta) = \zeta^6 + \zeta^5 - 14\zeta^4 - 9\zeta^3 + 40\zeta^2 - 13\zeta - 12 \quad (19)'$$

$m_z=0$ なるときは, アナログ素子で $g^*(\zeta)$ を構成し得る可能性もあるが, 一般には $m_z \neq 0$ なので $g^*(\zeta)$ はデジタル的に構成すべきであろう. いわばデータ処理用の数値フィルタに類似したものと考えてよい. これは一見複雑のようであるが, 前述の $g(z)$ 可変とし $\epsilon |X(t) - Y(t)|^2$ を最小にするような帰還方式パラメータ調整システムに比較すれば, 原理的にははるかに簡単なものである. さてこのようにデータ処理を行なつてから, $B_{xy}(t, t+\tau)$ と $R_{xy}(t, t+\tau)$ を求める.

$$B_{xy}(t, t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z_1) g(z_2) W_z(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \quad (20)$$

前述と同様にして, $W_z(z_1, z_2)$ の直交展開を用いると,

$$\begin{aligned} B_{xy}(t, t+\tau) &= \sum_{n', n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(m_{z_1} + \zeta_1 \sigma_{z_1}) k_n H_n(\zeta_2) \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{2}\right] \rho_z^n \\ &\quad \times \frac{1}{n!} H_n(\zeta_1) H_n(\zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 \\ &= \sum_{n', n} k_n \rho_z^n a_{1n} \frac{1}{\sqrt{2\pi n!}} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\zeta_2) \bar{H}_n(\zeta_2) e^{-\zeta_2^2/2} dy_2 \quad (21) \end{aligned}$$

ここで定常性を用いるとつぎの結果を得る.

$$B_{xy}(\tau) = \sum_{n'=0}^M k_n \rho_z^n a_{1n} \sqrt{n'!} \quad (22)$$

したがって $R_{xy}(\tau)$ はつぎで与えられる (n' を改めて n としてもよい).

$$R_{xy}(\tau) = B_{xy}(\tau) - k_0 a_0 = \sum_{n'=1}^M k_n \rho_z^n a_{1n} \sqrt{n'!} \quad (23)$$

上記は線形連立方程式とすればつぎのように表現される.

$$\begin{bmatrix} R_{xy}(\tau_1) \\ R_{xy}(\tau_2) \\ \vdots \\ R_{xy}(\tau_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2^2 & \dots & \rho_1^M \\ \rho_2 & \rho_2^2 & \dots & \rho_2^M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_M & \rho_M^2 & \dots & \rho_M^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \sqrt{1!} & a_1 \\ k_2 \sqrt{2!} & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ k_M \sqrt{M!} & a_M \end{bmatrix} \quad (24)$$

ただし簡単のため $\rho_z(\tau_i)$ を ρ_i のように書いた. ところがこの場合 a_1 のみは, 以前に回帰分析で精度のよい推定値 $\hat{a}_1$ が得られているから, つぎのようにし

て (24) 式を書き換えてもよい.

$$\begin{bmatrix} R_{xy}(\tau_1) - k_1 \rho_1 \hat{a}_1 \\ \vdots \\ R_{xy}(\tau_{M-1}) - k_{M-1} \rho_{M-1} \hat{a}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1^2 & \dots & \rho_1^M \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{M-1}^2 & \dots & \rho_{M-1}^M \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_2 \sqrt{2!} & a_2 \\ \vdots \\ k_M \sqrt{M!} & a_M \end{bmatrix} \quad (25)$$

ところが ρ を要素とする行列の取扱いは, (24), (25) 式も以下に示すようにまったく同様に処理されるので, 解法としての難易の差はない. また (23) 式の条件式を未知数より多くとり, 重回帰モデルとして考えることは $\rho_z^n(\tau_i)$ の項の存在するのと誤差項が $\tau_i=0$ に近いほど大きいことなどからあまり適当でない. 考える. むしろ連立方程式として (24) または (25) 式をと, これをいくつかの τ の組について行ない, 最後に解を平均して精度を高めるべきと考える. よって連立方程式の解法について考察を加える.

3.2 a_n を求める連立方程式の代数的解法

入力は正規定常過程と仮定しているので, つぎの条件が成立する.

$$1 = \rho(0) > \rho(\tau_1) > \rho(\tau_2) > \dots > \rho(\tau_M) \\ (0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_M) \quad (26)$$

この条件により (24), (25) 式の行列は階数を多くすると特異行列に近くなるので (直観的には自明であるが後に示す), これら方程式を直接的に計算機でとくのは精度上あまり適当でなく, 代数解析的に解を求めた後計算機によるべきものとする. なお記号の便宜上 (24) 式の形の式の解法を以下に示す.

(24) 式の行列を P_M と書くと, Vandermonde の定理³⁾ を用い行列式 $|P_M|$ はつぎようになる.

$$|P_M| = \prod_{i=1}^M \rho_i \prod_{l>k} (\rho_l - \rho_k) \\ (l=2, \dots, M, k=1, \dots, M-1) \quad (27)$$

また (25) 式の行列を P_{M-1}' で示すと, 同様にして,

$$|P_{M-1}'| = \prod_{i=1}^{M-1} \rho_i^2 \prod_{l>k} (\rho_l - \rho_k) \quad (28)$$

したがって今後の考察は (24) 式のみに限定するが, 手法的には (25) 式にも使用できる.

さて (27) 式よりわかるとおり, 条件 (26) 式により $|P_M|$ の絶対値は M とともに減少するが有限項で打ち切る限り零ではないこと, すなわち行列 P_M は非特異で逆が存在することがわかる. また行列式 $|P_M|$ の符号は $1/2 M(M-1)$ が奇数ならば負, 偶数ならば正となる. 実際の計算では M を大にすると $|P_M|$ が零に近づくから, 直接に電子計算機で (24) 式を処理するのは誤差の点で不適当と考える. この誤差を除去するため, 以下に P_M の逆行列を求める.

逆行列 P_M^{-1} の j 行 i 列の要素を p^{ji} と書けば、これは行列 P_M の i 行 j 列の要素 p_{ij} の余因数行列 P_{ij} により一般に次式で与えられる。

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_1^2 & \dots & \rho_1^{j-1} & \rho_1^{j+1} & \dots & \rho_1^M \\ \rho_2 & \rho_2^2 & \dots & \rho_2^{j-1} & \rho_2^{j+1} & \dots & \rho_2^M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{i-1} & \rho_{i-1}^2 & \dots & \rho_{i-1}^{j-1} & \rho_{i-1}^{j+1} & \dots & \rho_{i-1}^M \\ \rho_{i+1} & \rho_{i+1}^2 & \dots & \rho_{i+1}^{j-1} & \rho_{i+1}^{j+1} & \dots & \rho_{i+1}^M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_M & \rho_M^2 & \dots & \rho_M^{j-1} & \rho_M^{j+1} & \dots & \rho_M^M \end{bmatrix}$$

(30) 式右辺の行列式は Vandermonde の行列式の変形であり、次式の形に帰着される。

$$P_{ij} = \frac{1}{\rho_i} \prod_{s=1}^M \rho_s \cdot \prod_{\substack{l>k \\ l \neq i \\ k \neq i}} (\rho_l - \rho_k) \cdot S_{M-j} \quad (31)$$

ここで S_{M-j} は、

$$S_{M-j} = \sum_{t_1, t_2, \dots, t_{M-j}} \rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_{M-j}} (t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_{M-j}) \quad (32)$$

したがって逆行列の要素 p^{ji} は次式で与えられる。

$$p^{ji} = (-1)^{i+j} \frac{\frac{1}{\rho_i} \prod_{s=1}^M \rho_s \cdot \prod_{\substack{l>k \\ l \neq i \\ k \neq i}} (\rho_l - \rho_k) \cdot \sum_{t_1, t_2, \dots, t_{M-j}} \rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_{M-j}}}{\prod_{s=1}^M \rho_s \cdot \prod_{l>k} (\rho_l - \rho_k)} \\ = (-1)^{i+j} \frac{1}{\rho_i} \sum_{\substack{l>k \\ l \neq i \\ k \neq i}} \rho_{t_1} \dots \rho_{t_{M-j}} \\ \cdot \frac{1}{\prod_{l>i} (\rho_l - \rho_i) \prod_{l>k} (\rho_l - \rho_k)} \quad (33)$$

なお p^{ji} の特別な場合には、たとえば p^{11} については、(33) 式を用いなくても直接つぎのように計算できて (33) 式と一致する。

$$P_{11} = \begin{vmatrix} \rho_2^2 & \dots & \rho_2^M \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_M^2 & \dots & \rho_M^M \end{vmatrix} = \rho_2^2 \rho_3^2 \dots \rho_M^2 \prod_{\substack{l>k \\ l \neq 1}} (\rho_l - \rho_k) \\ p^{11} = \frac{p_{11}}{|P_M|} = \frac{\rho_2^2 \dots \rho_M^2 \prod_{\substack{l>k \\ l \neq 1}} (\rho_l - \rho_k)}{\prod_{s=1}^M \rho_s \prod_{l>k} (\rho_l - \rho_k)} \\ = \frac{1}{\rho_1} \rho_2 \rho_3 \dots \rho_M \frac{1}{(\rho_M - \rho_1)(\rho_{M-1} - \rho_1) \dots (\rho_2 - \rho_1)}$$

いっぽう (33) 式より計算してみると、 $S_{M-j} = \rho_2 \rho_3 \dots \rho_M$ となり同じ結果を得る。 p^{Mi} や p^{1i} も (33) 式によらず簡単に計算できて、結果はとうぜん (33) 式と一致する (付録には $M=5$ のときの逆行列要素を例題的に示してあるので参照願いたい)。

以上のようにして、一般に a_j はつぎの形にとかれた。

$$a_j = \frac{1}{k_j \sqrt{j!}} \sum_{i=1}^M p^{ji} R_{yx}(\tau_i) \quad (j=1, \dots, M) \quad (34)$$

上式から見られるとおり、 $|a_j|$ は j の大になるに従い

$$p^{ji} = \frac{P_{ij}}{|P_M|} (-1)^{i+j} \quad (29)$$

ところで余因数 P_{ij} はつぎの形になる。

$$P_{ij} = \frac{1}{\rho_i} \prod_{s=1}^M \rho_s \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_1^{j-2} & \rho_1^j & \dots & \rho_1^{M-1} \\ 1 & \rho_2 & \dots & \rho_2^{j-2} & \rho_2^j & \dots & \rho_2^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_{i-1} & \dots & \rho_{i-1}^{j-2} & \rho_{i-1}^j & \dots & \rho_{i-1}^{M-1} \\ 1 & \rho_{i+1} & \dots & \rho_{i+1}^{j-2} & \rho_{i+1}^j & \dots & \rho_{i+1}^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_M & \dots & \rho_M^{j-2} & \rho_M^j & \dots & \rho_M^{M-1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

通常は小さくなると考えられる。これは R_{xy} の形にも依存するので一般的にはいえないが、 p^{ji} の形と分母の $\sqrt{j!}$ の存在によりつぎのように説明できる。ひとことで表現すると、 p^{ji} は j とともに増大するけれども $\sqrt{j!}$ のほうがより大きくなることによる。付録と実例を見てもわかるとおり、 p^{ji} にはつぎの性質がある。まず条件 (26) 式より、

$$|p^{j1}| < |p^{j2}| < |p^{j3}| < \dots \quad (35)$$

が大きい場合成立し (後の実例参照)、 ρ に関する次数としては、これらはすべて同一次数ですべて $-j$ 乗のオーダーとなる。したがってつぎの関係式も成立する。

$$|p^{1j}| < |p^{2j}| < |p^{3j}| < \dots \quad (36)$$

ところが、 p^{ji} は 1 より小なるある値 δ により δ^{-j} で評価されるのに対し、分母の $\sqrt{j!}$ は Stirling の公式により $j^{(1/2)j} \cdot (2\pi j)^{1/4} \cdot e^{-j/2}$ で評価される。 $1/\delta = Q$ がどんなに大きくても、 Q^j と $\sqrt{j!}$ とでは対数をとって比較することにより、 $\sqrt{j!}$ のほうが j とともにより増大するのがわかる。よって $|a_j|$ は通常は j の大きい所ではきわめて小さく無視できると思われる。この事実に基づいた非線形特性推定方法についても以下で触れる。

3.3 非線形特性推定の一手法

以上で求めた (34) 式を異なった τ_i の組について適用し、それぞれの a_j を平均して精度を高めた解 ($a_1, a_2, \dots, a_M$) を得たとする。これに a_0 を付加する。ちなみに $a_0 = \varepsilon[f(z)]$ であるから、 a_0 はサンプル平均をとることで求まり (正規定常過程を前提としているのでエルゴード性が成立するから)、また a_1 は回帰分析結果を用いたほうが精度的によい [(18') 式と (25) 式]。ここではかくして得られた a_j の推定値のベクトル ($\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_M$) より非線形特性を求めることを考える。1つの有力な方法は、 j の大なるとき a_j が極小であることを用い、有限次元ベクトル ($\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_M$) を既知の非線形要素のベクトル ($a_0, a_1, a_2, \dots, a_M$) と多次元的ななんらかの手法で比較を行なうことである。しかしここでは、(6) 式を用いた方程式

より $f(z)$ を推定する方法を提案する。ところで (6) 式は定常的な場合にはつぎの形になる。

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n!}} \cdot \frac{1}{\sigma_z} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(z) H_n\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right) \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right] dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n!}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta\sigma_z+m_z) H_n(\zeta) e^{-\zeta^2/2} d\zeta \end{aligned} \quad (36)$$

これを離散化して下記の連立方程式を作る。つまりこの場合 $e^{-\zeta^2/2}$ が ζ の増大とともに急速に零に近づくのを考慮して有限区間で方程式を作るのである。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=-N}^N f(\zeta_i \hat{\sigma}_z + \hat{m}_z) e^{-\zeta_i^2/2} \Delta\zeta_i \\ \sqrt{2\pi} \hat{a}_1 &= \sum_{i=-N}^N f(\zeta_i \hat{\sigma}_z + \hat{m}_z) \zeta_i e^{-\zeta_i^2/2} \Delta\zeta_i \\ \sqrt{2\pi n!} \hat{a}_n &= \sum_{i=-N}^N f(\zeta_i \hat{\sigma}_z + \hat{m}_z) H_n(\zeta_i) e^{-\zeta_i^2/2} \Delta\zeta_i \end{aligned} \right\} \quad (n=2N) \quad (37)$$

上式において $\hat{a}_n$ は n の増大とともに小となるが $\sqrt{2\pi n!} \hat{a}_n$ を用いるので、 N を大きくしても方程式が無意味になることはない。

さて (37) 式なる連立方程式をとくことによって、各 ζ_i 点つまり各点 $z_i (i=-N, -N+1, \dots, 0, \dots, N)$ における非線形関数値 $f(z_i)$ の値を得ることができる。そしてこの結果につき折線近似または平滑近似して $f(z)$ を推定し得る。なおこの連立方程式の非特異性が必要であるが、これは $H_n(\zeta) e^{-\zeta^2/2}$ の連続関数であることから考えて、かりにある ζ_i の組では特異行列になったとしても、別の ζ_i の組を適当に選定することによりつねに非特異化可能であるからこの点の問題はない。

以上でゼロメモリ形の非線形要素の特性推定の一手法が与えられた。ベクトル $(a_0, a_1, \dots, a_M)$ の比較による非線形要素のパターン認識の方法は、今後検討したい。

4. 非線形度チェックの簡便計算法と数値計算法例

ここでは、非線形特性そのものの推定問題から離れて、 a_j^2 の最初の部分すなわち a_1^2, a_2^2, a_3^2 をはあくする簡便法について述べ、数値計算例も併せ示した（非線形度は $R_x(0) - a_1^2$ ではばつかめるが、 a_2^2 も求めたいときがある）。

さて a_j^2 の最初の部分の推定法はつぎのとおりである。まず (9) 式に着目し、無限和を有限和で近似してつぎの連立方程式を作る。

$$\begin{bmatrix} R_x(\tau_1) \\ R_x(\tau_2) \\ \vdots \\ R_x(\tau_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \cdots \rho_1^M \\ \rho_2 \cdots \rho_2^M \\ \vdots \\ \rho_M \cdots \rho_M^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_M^2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

実際の計算では、 $\tau=0$ の近傍について有限近似をするのは無理で、この簡便法は直接的に $\tau=0$ 近傍の重要情報を取り出さない欠点がある。なお $R_x(\tau), \rho_z(\tau)$ は実験的に求めて既知とする。この方程式の解は、(33) 式の逆行列要素を転用すれば簡単に求まる。

実例として、この方法により a_j^2 の最初の部分がどの位の精度で求まるものが、リレー要素を例にとり考察してみる。ただし実際の実験的検討を行なう機会がないので、ここでは $\rho_z(\tau)$ および $R_x(\tau)$ の真値が求まった理想的な場合を仮定して検討した（したがって実測値ではこの場合より精度は多少落ちることになる）。すなわち実用上は $\rho_z(\tau)$ および $R_x(\tau)$ の観測値を用いるべきであるが、ここでは理論上既知である次式を用いた。

$$R_x(\tau) = \frac{2l^2}{\pi} \sin^{-1} \rho_z(\tau) \quad (39)$$

ちなみにヒステリシスや不感帯のない理想的なリレー要素の入力の自己相関と出力の自己相関との間には、入力が正規確率過程の場合には (39) 式の関係が成立するのが Price の定理により証明されている。この関係式を用いれば、リレー要素の場合の a_n は (6) 式で計算する代わりに、 $R_x(\tau)$ を $\rho_z(\tau)$ のべき級数に展開することで簡単に求められる。すなわち、

$$R_x(\tau) = \frac{2l^2}{\pi} \arcsin \rho_z(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \rho_z(\tau) \quad (40)$$

とおいて有名な $\sin^{-1} \rho_z$ の高次導関数漸化式を用いればつぎようになる。つまり、

$$R_x(\tau) = \frac{2l^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_x^{(n)}(\rho_z=0)}{n!} \rho_z^n \quad (41)$$

を考慮して a_n^2 はつぎのように定められる。

$$a_n^2 = \frac{2l^2}{\pi} \frac{(2m-1)!}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2m-2)^2 \cdot 2m \cdot (2m+1)} \quad (42)$$

$$n=2m+1 \text{ のとき} \quad (42)$$

$$a_n^2=0 \quad n=2m \text{ のとき} \quad (43)$$

簡単のためリレー要素の利得 $l=1$ としてこの場合の a_n^2 をいくつか求めてみるとつぎのとおりである。

$$a_1^2=0.636, \quad a_3^2=0.106, \quad a_5^2=0.0476$$

つぎに相関の真値がわかったとして、簡便法 (38) 式でどの程度の精度で a_1^2 らが求まるかしらべてみる。実例として $M=5$ としてみる。なお (38) 式を用いるときは、 $\rho_1, \dots, \rho_5$ の選定につぎのような配慮が必要である。

たとえば 5 個の ρ の選定をかりに、 $\rho_0=1, \rho_1=e^{-1/10}$,

$\rho_2=e^{-2/10}$, $\rho_3=e^{-3/10}$, $\rho_4=e^{-4/10}$ とすると, (39) 式より $R_x(0)=1$, $R_x(2)=0.611$, $R_x(3)=0.531$, $R_x(4)=0.467$ となる. このような ρ_i の選定に基づくデータ条件から, a_j^2 を求めるとどうなるか検討してみよう. いまかりに a_7 まで考えて無限和と有限和の差を考えてみると, $\sum_{j=1}^7 a_j^2=0.8182$ で $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2=1$ とには相当の差がある. したがってこのような ρ_i の選定で (38) 式をといても, 見当違いの結果しか得られない. つまり $\tau=0$ の付近には非線形性の情報が集積するのであるが, この近傍から簡便法の連立方程式を作成するのは不適当なのである. この例で $R(4)$ の両辺を比較してみると $\sum_{j=1}^5 a_j^2 \rho_j^4=0.435$ となり, 左右両辺の値が漸く 10% 以内になる.

上記の例からもわかるとおり, 要するに無限項を有限項で打切る誤差の程度を予めある範囲内に押えておく必要があり, 実は ρ_1 の値を 0.5 以上に選定するとよい推定を与えないのが種々の計算例から認められた.

なおこの場合のように, 非線形特性の原点に関し対称であるのがもしも既知であれば, (38) 式の代わりにつぎの式を用いればよい.

$$\left. \begin{aligned} R_x(\tau_1) &= a_1^2 \rho_1 + a_3^2 \rho_1^3 + a_5^2 \rho_1^5 + a_7^2 \rho_1^7 + a_9^2 \rho_1^9 \\ R_x(\tau_2) &= a_1^2 \rho_2 + a_3^2 \rho_2^3 + a_5^2 \rho_2^5 + a_7^2 \rho_2^7 + a_9^2 \rho_2^9 \\ &\vdots \\ R_x(\tau_5) &= a_1^2 \rho_5 + a_3^2 \rho_5^3 + a_5^2 \rho_5^5 + a_7^2 \rho_5^7 + a_9^2 \rho_5^9 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

この連立方程式の代数的解法は, 前述とまったく同様にして行なうことができ, ここでは得られた逆行列要素 p^{ji} の一般式を示すにとどめる.

$$p^{ji} = (-1)^{i+j} \frac{1}{\rho_i} \sum_{t_1, t_2, \dots, t_{M-j}} \rho_{t_1}^2 \rho_{t_2}^2 \dots \rho_{t_{M-j}}^2 \times \frac{1}{\prod_{i>l} (\rho_i^2 - \rho_l^2) \prod_{i>k} (\rho_i^2 - \rho_k^2)} \quad (45)$$

さて話しを戻して, 無限項を有限近似するさいの誤差を少なくするよう ρ_i を選定することは重要であるが, ρ_i を必要以上に小さくすると実際面では逆に周期的ノイズに埋没されて, a_n^2 の推定精度が悪くなる. したがって適切な ρ_i の選定はかなりむずかしい. これがこの簡便法の短所である. さて ρ_i の選定は場合に応じて個別に考えるべきことであるが, 実際上 0.3~0.1 の間にとることが多くなると考える. ここでは実例として $\rho_1=0.5$, $\rho_2=0.4$, $\rho_3=0.3$, $\rho_4=0.2$, $\rho_5=0.1$ と選定し, ゼロメモリ理想リレー要素であるのが既知の場合につき, 計算尺にて計算した結果をつぎに示す.

——(簡便法によるリレー要素非線形度計算例, $\rho_1=0.5$, $\rho_2=0.4$, $\rho_3=0.3$, $\rho_4=0.2$, $\rho_5=0.1$)——

$$p^{11}=0.0159, \quad p^{12}=-0.198, \quad p^{13}=1.22, \quad p^{14}=-4.76, \quad p^{15}=16.65$$

$$\begin{aligned} a_1^2 &\doteq 0.0159 \times 0.334 - 0.198 \times 0.262 + 1.22 \times 0.193 \\ &\quad - 4.76 \times 0.128 + 16.65 \times 0.0637 \\ &= 0.00535 - 0.0521 + 0.236 - 0.609 + 1.06 \\ &\doteq 0.64 \end{aligned}$$

これは a_1^2 の真値 0.636 とよく一致している. a_3^2 の推定はつぎのとおりである.

$$p^{21}=2.2618, \quad p^{22}=27.8, \quad p^{23}=-161, \quad p^{24}=577, \quad p^{25}=-771.9$$

$$\begin{aligned} a_3^2 &= -0.334 \times 2.2618 + 0.262 \times 27.8 - 0.193 \times 161 \\ &\quad + 0.128 \times 577 - 0.0637 \times 771.9 \\ &= -0.756 + 7.28 - 31.1 + 73.8 - 49.1 = 0.1 \end{aligned}$$

これは a_3^2 の真値 0.106 とほぼ一致する.

a_5^2 よりも高次の a_n^2 の値は, この 5 元方程式では誤差が大きく, 意味ある推定が行なえなかった. これは逆行列要素がつぎのようなぼう大な値となるためである.

$$\begin{aligned} p^{31} &= 668, \quad p^{32} = -882, \quad p^{33} = 4530, \quad p^{34} = -10750, \quad p^{35} \\ &= 11170, \quad p^{41} = -7460, \quad p^{42} = 8610, \quad p^{43} = -34200, \\ p^{44} &= 67300, \quad p^{45} = -62400, \quad p^{51} = 2.483 \times 10^4, \quad p^{52} = \\ &= -2.204 \times 10^4, \quad p^{53} = 7.44 \times 10^4, \quad p^{54} = -1.32 \times 10^5, \\ p^{55} &= 1.157 \times 10^5 \end{aligned}$$

ここで p^{3i} は a_3^2 に対応し, p^{4i} は a_7^2 に p^{5i} は a_9^2 に対応する.

上記の結果より簡便法について類推すると, ρ_i として 0.4~0.1 の間に M 個を選び方程式を作れば, 最初の数個は a_n^2 の真値とよく一致しそうに思われる. そして逆行列の要素の値の大きさ, および $p^{ji} R_x(\tau_i)$ の各項のバランスに注意をすれば, 各推定値を信用してよいかどうかの判断は可能なのである. これは種々の実際の検討の結果得た結論である. しかしながら簡便法は理論的裏付けが不十分であるから, 本来は (34) 式による正統的方法を用いるべきであろう.

5. 結 言

以上で, ゼロメモリ形非線形要素の定常運転時における特性同定一手法について述べた. 測定される非線形要素 $f(z)$ に対し, 基準用非線形変換素子 $g(z)$ は固定したままでよいのが本方法の特長と考える. ただし $g(z)$ は M 次多項式 (エルミート多項式より誘導される) であり, 専用デジタル機構で実現されることになる.

また非線度の尺度である a_n^2 の最初の部分の推定簡便法について述べた. これには誤差の問題等根本的な欠点もあり, 数値計算例も併せ述べたが, 精密法では

なによえ 3. のようなデータ処理機構 $g(z)$ が必要か
とゆうことがこれにより逆に明確になったと考える。
終わりに種々討論いただいた日立京浜工業専門学校大
金正芳教授に謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) H. Cramer : Mathematical Methods of Statistics,
pp. 133-134, Princeton Univ. Press (1949)
- 2) A. A. Первозванский : Случайные процессы в
нелинейных автоматических системах, pp. 37-39,
Москва, Ф. М. И. (1962)
- 3) 遠山 : 行列論, 67/68 (共立全書-1952)

— 付 録 —

 $M=5$ のときの逆行列要素計算結果

例題として, (33) 式の一般式を $M=5$ の場合につ
いて示す. 全要素を記載するのもむだであるから, 3
列目の要素を例として, $p^{13}, p^{23}, p^{33}, p^{43}, p^{53}$ のみ示し
た. 他の諸要素は番号を置換すれば, 簡単に求められ

る.

$$p^{13} = \frac{1}{\rho_3} \rho_1 \rho_2 \rho_4 \rho_5 \frac{1}{(\rho_5 - \rho_3)(\rho_4 - \rho_3)(\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \rho_1)}$$

$$p^{23} = -\frac{1}{\rho_3} [\rho_1 \rho_2 \rho_4 + \rho_2 \rho_4 \rho_5 + \rho_1 \rho_4 \rho_5 + \rho_1 \rho_2 \rho_5]$$

$$\times \frac{1}{(\rho_5 - \rho_3)(\rho_4 - \rho_3)(\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \rho_1)}$$

$$p^{33} = \frac{1}{\rho_3} [\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_4 + \rho_1 \rho_5 + \rho_2 \rho_4 + \rho_2 \rho_5 + \rho_4 \rho_5]$$

$$\times \frac{1}{(\rho_5 - \rho_3)(\rho_4 - \rho_3)(\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \rho_1)}$$

$$p^{43} = -\frac{1}{\rho_3} [\rho_1 + \rho_2 + \rho_4 + \rho_5]$$

$$\times \frac{1}{(\rho_5 - \rho_3)(\rho_4 - \rho_3)(\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \rho_1)}$$

$$p^{53} = \frac{1}{\rho_3} \cdot \frac{1}{(\rho_5 - \rho_3)(\rho_4 - \rho_3)(\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \rho_1)}$$

ここで付号は $(-1)^{i+j}$ で定るのに注意する.