パラメータ同定誤差による線形フィルタ の性能の劣化とその改善†

榎 木 義 一*・片 山 徹**

* 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

** 京都大学大学院 京都市左京区吉田本町

(昭和 43 年 8 月 9 日受付)

On the Performance Loss and Its Improvement of Linear Filters in the Presence of Parameter Identification Errors

Yoshikazu SAWARAGI* and Tohru KATAYAMA**

(* Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto)

(** Faculty of Engineering, Graduate School, Kyoto)

(Received August 9, 1968)

This paper presents the method of evaluating the performance loss and of improving the performance of the Wiener-Kalman filter where identification errors exist in mathematical models of dynamic and observation systems.

The description is mainly divided into two parts. The first part is concerned with the performance loss of the discrete-time Wiener-Kalman filter designed on the basis of the model with errors in both transition and observation matrices. The difference equation which describes the evolution of the actual error covariance matrix is derived. For the first order system, it is shown that the Wiener-Kalman filter is more insensitive to parameter variation in observation model than in system model. The relation between the estimation and the noise free regulator problem is also examined. The second part is devoted to the development of a method of designing linear filter, when the elements of both the transition and observation matrices are randomly time-varying. For this purpose the result of the first part is utilized. Results of digital simulation studies are demonstrated to show the effectiveness of the linear filter presented here.

1. 緒 言

線形系の状態ベクトルを雑音に乱された観測データに基づいて推定する問題は、近年非常に多くの注目を集めてきた。この問題に対しては、Wiener-Kalman フィルタ¹⁾あるいは Bayes 推定理論²⁾が、不偏、最小分散推定値を与えることは良く知られている。この Wiener-Kalman フィルタは、制御対象の状態変数の推定、飛しょう体の追跡などを初めとして、数多くの問題に応用されてきた。この場合、最適フィルタの設計には、系の動特性および観測機構を表わす数学モデ

ル、さらに外乱、観測ノイズおよび初期条件に関する 1 次および 2 次の統計量を必要とするが、これら諸量のすべての正確な値が与えられることは少ないであろう。

Nishimura は、離散形フィルタについて、推定誤差の共分散行列である Riccati 方程式の初期条件を誤認した場合³⁾、および連続形フィルタにおいて、外乱および観測ノイズの共分散行列を誤認した場合⁴⁾、この誤差がフィルタの performance にどのような影響を与えるかについて考察している。また、筆者らも離散形フィルタにおいて同様の問題を考察した⁵⁾。

本論文では、まず 3. において系の状態遷移行列および観測行列を誤認して設計した近似最適 (sub-

† 第 7 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 43・9)

optimal) フィルタの performance loss について考察し、4. では、レギュレータ問題についても論及する。

最近 Neal⁶⁾ は、モデルのパラメータの値が実際のプラントのパラメータの値と異なる場合、離散形 Wiener-Kalman フィルタのゲインを決定する方法を提案している。この考え方を拡張し、6. では 3. の結果を用いて、制御対象および観測機構のパラメータが不規則に変動する場合の線形フィルタのゲインの決定法について述べる。5. および 7. では簡単な数値例が与えられる。

2. 問題の記述

動特性および観測機構が時間について離散的に、

$$x(k+1) = [\Phi(k) + \delta\Phi(k)]x(k) + w(k) \quad (2.1)$$

(A)

$$z(k) = [H(k) + \delta H(k)]x(k) + v(k) \quad (2.2)$$

で表わされる線形系について考察しよう。ここに、

x : n 次元状態ベクトル

w : n 次元ベクトル, 外乱, 正規性白色雑音

Φ : $n \times n$ 状態遷移行列

$\delta\Phi$: $n \times n$ 行列, 遷移行列の Φ からのずれ

z : p 次元ベクトル, 観測信号 ($p \leq n$)

v : p 次元ベクトル, 観測ノイズ, 正規性白色雑音

H : $p \times n$ 観測行列

δH : $p \times n$ 行列, 観測行列の H からのずれ

であり, w および v の平均値は零, 共分散行列は,

$$\left. \begin{aligned} E\{w(j)w'(k)\} &= Q(k)\delta_{jk} \\ E\{v(j)v'(k)\} &= R(k)\delta_{jk} \\ E\{w(j)v'(k)\} &= 0 \end{aligned} \right\} (j, k=0, 1, \dots) \quad (2.3)$$

とする。ただし, E は期待値, δ_{jk} はクロネッカの記号, プライム (') はベクトルあるいは行列の転置, Q および R は, $n \times n$ および $p \times p$ 非負定値対称行列である。つぎに, (2.1) および (2.2) 式において, $\delta\Phi \equiv 0$ および $\delta H \equiv 0$ とおいて得られる系,

$$\tilde{x}(k+1) = \Phi(k)\tilde{x}(k) + w(k) \quad (2.4)$$

(M)

$$\tilde{z}(k) = H(k)\tilde{x}(k) + v(k) \quad (2.5)$$

を, 実際の系 (A) に対する数学モデルと考えることにする。ここに, $\tilde{x}$ および $\tilde{z}$ はモデル系 (M) における状態ベクトルおよび観測信号を表わす。とうぜん, $\delta\Phi$ および δH の正確な値がわかっていない場合には, 実際の系 (A) に対する最適フィルタを構成することは不可能である。しかしながら, モデル系 (M) に基づいて, 実際の系 (A) に対する近似最適フィルタを設計することは可能である。実際にわれわれが設計し

得るフィルタはこのようなものであり, つぎのような差分方程式で与えられる¹⁾。

(i) 状態ベクトルの近似推定値は,

$$x_c^*(k+1|k) = \Phi(k)x_c^*(k|k-1) + \Gamma_c(k)[z(k) - H(k)x_c^*(k|k-1)] \quad (2.6)$$

で与えられる。ただし, $x_c^*(k+1|k)$ は $Z_k \triangleq \{z(0), z(1), \dots, z(k)\}$ に基づく状態ベクトル $x(k+1)$ の近似推定値である。また, 近似最適フィルタの入力は (2.2) 式で与えられる $z(k)$ であり, (2.5) 式の $\tilde{z}(k)$ ではないことに注意しておこう。

(ii) 近似最適ゲインは,

$$\Gamma_c(k) = \Phi(k)P_c(k)H'(k) \times [H(k)P_c(k)H'(k) + R(k)]^{-1} \quad (2.7)$$

で与えられる。ここに, Γ_c は $n \times p$ 行列である。

(iii) $n \times n$ 行列 $P_c(k)$ は, Riccati 方程式,

$$P_c(k+1) = [\Phi(k) - \Gamma_c(k)H(k)]P_c(k) \times [\Phi(k) - \Gamma_c(k)H(k)]' + \Gamma_c(k)R(k)\Gamma_c'(k) + Q(k) \quad (2.8)$$

の解である。

また, (2.6) および (2.8) 式に対する初期条件は, それぞれ $x_c^*(0|-1) = 0$ および $P_c(0) = E\{x(0)x'(0)\}$ とする。もちろん, (2.6)~(2.8) 式で定義される近似フィルタの, performance, すなわち, 推定誤差の共分散行列は, $\delta\Phi$ および δH の存在のため最適なものからずれる。

本論文では, まず 3. において, モデル系 (M) を基にして設計された近似フィルタの performance loss について考察する。ただし, (2.3) 式で与えられる雑音の共分散行列 Q および R , また (2.8) 式に対する初期条件 $P_c(0)$ は正確な値が与えられているものと仮定する。この点については, すでに報告したが⁵⁾, 文献 5) の結果と本文の結果を組合せることにより, さらに一般的な場合に拡張することも可能である。しかし, 数式がいたずらに複雑化するのみである。

また, 5. では, 3. の結果を応用して, $\delta\Phi$ および δH の各要素が正規性白色雑音である場合の線形フィルタのゲインの決定法を提案する。

3. 近似フィルタによる推定誤差の共分散行列の評価

(2.8) 式で定義される $P_c(k)$ はモデル系 (M) に対する最適な共分散行列であるが*, 近似最適フィルタによる実際の推定誤差の共分散行列はつぎのように

* より正確には, (2.5) 式で定義される $\tilde{z}$ が実際に得られるならば, $P_c(k)$ はモデル系 (M), すなわち $\tilde{x}$ に対する最適推定誤差の共分散行列を与えるということである。

評価される。いま、真の状態ベクトル $x(k)$ とその近似推定値 $x_c^*(k|k-1)$ の差を $e(k)$ 、すなわち、

$$e(k) = x(k) - x_c^*(k|k-1) \quad (3.1)$$

と定義すれば、(2.1) および (2.6) 式より、 $e(k)$ はつぎの差分方程式を満足する。

$$\begin{aligned} e(k+1) = & [\Phi(k) - \Gamma_c(k) H(k)] e(k) \\ & + [\delta\Phi(k) - \Gamma_c(k) \delta H(k)] x(k) \\ & - \Gamma_c(k) v(k) + w(k) \end{aligned} \quad (3.2)$$

(3.2) 式右辺の第 2 項の $x(k)$ に比例する項は、プラントのパラメータあるいは観測行列に変動のある (またはこれを誤認した) 場合に現われてくる一種の bias で、さきの報告の共分散行列 Q および R を誤認した場合には存在しなかった。したがって、さらに議論を展開するためには、(3.2) 式のみでは不可能で、(2.1) 式を組合せた $2n$ 次元の差分方程式、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \Phi(k) - \Gamma_c(k) H(k) & \delta\Phi(k) - \Gamma_c(k) \delta H(k) \\ 0 & \Phi(k) + \delta\Phi(k) \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} e(k) \\ x(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Gamma_c(k) v(k) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

を基礎にする必要がある。

ここで、3 種類の $n \times n$ 行列を定義しよう。

$$\left. \begin{aligned} \Pi(k) &= E\{e(k)e'(k)\} \\ \Psi(k) &= E\{e(k)x'(k)\} \\ \Sigma(k) &= E\{x(k)x'(k)\} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

さて、(3.3) 式の転置ベクトルを (3.3) 式自身に後から掛けて、 w および v について両辺の期待値をとれば、 $\Pi(k)$ 、 $\Psi(k)$ 、および $\Sigma(k)$ に対する差分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \Pi(k+1) = & [\Phi(k) - \Gamma_c(k) H(k)] \\ & \times \Pi(k) [\Phi(k) - \Gamma_c(k) H(k)]' \\ & + [\Phi(k) - \Gamma_c(k) H(k)] \\ & \times \Psi(k) [\delta\Phi(k) - \Gamma_c(k) \delta H(k)]' \\ & + [\delta\Phi(k) - \Gamma_c(k) \delta H(k)] \\ & \times \Psi'(k) [\Phi(k) - \Gamma_c(k) H(k)]' \\ & + [\delta\Phi(k) - \Gamma_c(k) \delta H(k)] \\ & \times \Sigma(k) [\delta\Phi(k) - \Gamma_c(k) \delta H(k)]' \\ & + \Gamma_c(k) R(k) \Gamma_c'(k) + Q(k) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \Psi(k+1) = & [\Phi(k) - \Gamma_c(k) H(k)] \\ & \times \Psi(k) [\Phi(k) + \delta\Phi(k)]' \\ & + [\delta\Phi(k) - \Gamma_c(k) \delta H(k)] \\ & \times \Sigma(k) [\Phi(k) + \delta\Phi(k)]' + Q(k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \Sigma(k+1) = & [\Phi(k) + \delta\Phi(k)] \\ & \times \Sigma(k) [\Phi(k) + \delta\Phi(k)]' + Q(k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

(3.5) 式で計算される $\Pi(k)$ が、(2.6)~(2.8) 式で定義される近似フィルタの実際の推定誤差の共分散

行列であり、 $\delta\Phi$ および δH が存在することにより、 $\Psi(k)$ および $\Sigma(k)$ の影響を受ける。さきの報告の結果によれば、外乱および観測ノイズの共分散行列を誤認した場合にはこのような $\Psi(k)$ および $\Sigma(k)$ を評価することは不要であった。この点が、外乱および観測ノイズの共分散行列を誤認した場合の結果と著しく異なるのである。

いっぽう、実際には実現不可能であるが、実際の系 (A) に対して最適な Wiener-Kalman フィルタの最適推定誤差の共分散行列は、

$$\begin{aligned} P_o(k+1) = & [\Phi_o(k) - \Gamma_o(k) H_o(k)] \\ & \times P_o(k) [\Phi_o(k) - \Gamma_o(k) H_o(k)]' \\ & + \Gamma_o(k) R(k) \Gamma_o'(k) + Q(k) \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる¹⁾。ここに、 $\Gamma_o(k)$ は最適ゲインで、

$$\begin{aligned} \Gamma_o(k) = & \Phi_o(k) P_o(k) H_o'(k) \\ & \times [H_o(k) P_o(k) H_o'(k) + R(k)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.9)$$

で与えられる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_o(k) &= \Phi(k) + \delta\Phi(k) \\ H_o(k) &= H(k) + \delta H(k) \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

である。したがって、近似最適フィルタの performance の最適値からのずれは、

$$E_{ao}(k) = \Pi(k) - P_o(k) \quad (3.11)$$

の trace により計算される。もちろん、

$$E_{ca}(k) = P_c(k) - \Pi(k) \quad (3.12)$$

$$E_{co}(k) = P_c(k) - P_o(k) \quad (3.13)$$

なども評価できるが、(3.5) 式で与えられる $\Pi(k)$ が複雑なことに起因して、さきの報告で述べたような誤差行列 E_{ao} 、 E_{ca} および E_{co} に関する興味ある一般的な結果を得ることは困難である。

4. レギュレータ問題との関係

制御対象の動特性および最小にすべき評価関数が、それぞれ、

$$x(k+1) = F_o(k)x(k) + G_o(k)u(k) \quad (4.1)$$

および、

$$I_N = \sum_{j=0}^{N-1} \{ \|x(j+1)\|_{A(j+1)}^2 + \|u(j)\|_{\Theta(j)}^2 \} \quad (4.2)$$

で与えられるレギュレータ問題について考察する。ここに、 x は n 次元状態ベクトル、 u は p 次元操作量ベクトル、 A および Θ は重み行列である。さきの報告では、(2.3) 式で与えられる外乱および観測ノイズの共分散行列 Q および R を誤認した場合の推定問題は、評価関数の重み行列 A および Θ を誤認したレギュレータ問題と performance loss の立場から見ても、やはり互いに双対の関係にあることを示した⁵⁾。しかし、以下に見るように、この場合には双対の関係は成立し

ないことになる。

いまの場合、評価関数 I_N を最小にする最適操作量 $u_o(k)$ は

$$u_o(k) = -B_o(N-k)x(k), \quad (k=0, 1, \dots, N-1) \quad (4.3)$$

となり、フィードバック行列は、

$$B_o(N-k) = [G_o'(k)S_o(N-k+1)G_o(k) + \Theta(k)]^{-1} \times G_o(k)S_o(N-k+1)F_o(k) \quad (4.4)$$

で与えられる。また、 S_o は Riccati 方程式、

$$S_o(N-k) = [F_o(k) - G_o(k)B_o(N-k)]' \times S_o(N-k+1)[F_o(k) - G_o(k)B_o(N-k)] + B_o'(N-k)\Theta(k)B_o(N-k) + A(k)$$

$$\text{ただし, } S_o(0) = A(N) \quad (4.5)$$

の解である。これは、(3.8) 式に対応するものである(双対性)。つぎに、遷移行列 F_o および駆動行列 G_o をそれぞれ F および G と誤認した場合には、操作量は、

$$u_c(k) = -B_c(N-k)x(k) \quad (4.6)$$

となり、(4.4) および (4.5) 式に対応して、

$$B_c(N-k) = [G'(k)S_c(N-k+1)G(k) + \Theta(k)]^{-1} \times G'(k)S_c(N-k+1)F(k) \quad (4.7)$$

および、

$$S_c(N-k) = [F(k) - G(k)B_c(N-k)]' \times S_c(N-k+1)[F(k) - G(k)B_c(N-k)] + B_c'(N-k)\Theta(k)B_c(N-k) + A(k) \quad (4.8)$$

を得る。(4.7) および (4.8) 式はそれぞれ (2.7) および (2.8) 式に対応している。しかし、操作量 $u_c(k)$ を用いた場合の実際の評価関数の値は、(4.1)、および (4.6) 式を基にして計算され、

$$I_N = \|x(0)\|^2_{[S_a(N)-A(0)]} \quad (4.9)$$

となる。ただし、 S_a は、

$$S_a(N-k) = [F_o(k) - G_o(k)B_c(N-k)]' \times S_a(N-k+1)[F_o(k) - G_o(k)B_c(N-k)] + B_c'(N-k)\Theta(k)B_c(N-k) + A(k) \quad (4.10)$$

で与えられる。(4.10) 式は (3.5) 式に対応するものであるが、興味ある関係を見出すことはできない。本章の始めで、双対性が成立しないといったのはこの点である。

5. 数 値 例——1

3. で述べた performance loss の問題について簡単な数値例をあげる。(5.1) および (5.2) 式で表わされる1階の系、

$$x(k+1) = a_o x(k) + w(k) \quad (5.1)$$

および、

$$z(k) = h_o x(k) + v(k) \quad (5.2)$$

について考察する。ここに、 $a_o = a + \delta a$, $h_o = h + \delta h$ であり、また w, v は互いに独立な平均値零の白色雑音で、分散はそれぞれ q, r とする。さらに、簡単のために、 $a, \delta a, h, \delta h$ はすべて一定とする。もちろんこの系は、 $h_o \neq 0$ なるかぎり可観測である。

(3.5)~(3.7) 式から、

$$\begin{aligned} \Pi(k+1) &= [a - h\Gamma_c(k)]^2 \Pi(k) \\ &\quad + 2[a - h\Gamma_c(k)][\delta a - \delta h\Gamma_c(k)]\Psi(k) \\ &\quad + [\delta a - \delta h\Gamma_c(k)]^2 \Sigma(k) + r\Gamma_c^2(k) + q \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \Psi(k+1) &= [a - h\Gamma_c(k)][a + \delta a]\Psi(k) \\ &\quad + [\delta a - \delta h\Gamma_c(k)][a + \delta a]\Sigma(k) + q \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\Sigma(k+1) = [a + \delta a]^2 \Sigma(k) + q \quad (5.5)$$

を得る。ここに、

$$\Gamma_c(k) = ah\Gamma_c(k)/[r + h^2\Gamma_c(k)] \quad (5.6)$$

および、

$$P_c(k+1) = a^2 r P_c(k)/[r + h^2 P_c(k)] + q \quad (5.7)$$

である。いっぽう、最適フィルタの共分散行列は、

$$P_o(k+1) = a_o^2 r P_o(k)/[r + h_o^2 P_o(k)] + q \quad (5.8)$$

その場合の最適フィルタゲインは、

$$\Gamma_o(k) = a_o h_o P_o(k)/[r + h_o^2 P_o(k)] \quad (5.9)$$

となる。

Fig. 1 は数値例として、

$$a_o = 0.9, h_o = 1.0, h = 1.0, q = r = 1.0$$

$$P_c(0) = P_o(0) = \Pi(0) = \Sigma(0) = 4.0$$

を与えた場合の performance loss $E_{ao}(k)$ の時間的变化を示している。

Fig. 2 は同じ数値例に対して、 $k \rightarrow \infty$ における定常 performance loss E_{ao} を、 $a_o = 0.9$ を固定し a をパラメータとして描いたものである。また、Fig. 3 も同じ E_{ao} を、 h_o を固定し h をパラメータとして図示したものである。これらの図から、この例では、観測パラメータ h_o を誤認した場合よりも、制御対象のパラメ

Fig. 1 Evaluation of performance loss $E_{ao}(k)$

Fig. 2 Evaluation of stationary performance loss when a_0 is misidentified

Fig. 3 Evaluation of stationary performance loss when h_0 is misidentified

ータ a_0 を誤認した場合のほうが performance loss が大きいことがわかる。

6. パラメータが不規則に変動する場合の線形フィルタの設計

本章では、遷移行列および観測行列の要素が不規則に変動する場合の線形最適フィルタの設計について考察する。すなわち、 $\delta\Phi(k)$ および $\delta H(k)$ の各要素が互いに独立な白色雑音である場合、(2.7) で与えられるゲイン $\Gamma_c(k)$ を改善する方法について述べる。

さて、 $\delta\Phi(k)$ および $\delta H(k)$ の要素を ϕ_{ij} ($i, j=1, \dots, n$) および h_{ij} ($i=1, \dots, p; j=1, \dots, n$) とし、さらに、

$$E\{\phi_{ij}\} = 0, \quad (6.1)_1$$

$$E\{\phi_{jm}\phi_{jl}\} = \alpha_{lm}^2 \delta_{ij} \delta_{lm} \quad (6.1)_2$$

および、

$$E\{h_{ij}\} = 0 \quad (6.2)_1$$

$$E\{h_{im}h_{jl}\} = \beta_{lm}^2 \delta_{ij} \delta_{lm} \quad (6.2)_2$$

と仮定する。

まず、問題を明確にするために、5. で考察した系において $\delta a(k)$ および $\delta h(k)$ が互いに独立な平均値零、分散 σ_a^2 および σ_h^2 の正規性白色雑音である場合について考察する。Bayes の定理²⁾ を用いて、 Z_k を得たときの状態ベクトル $x(k+1)$ の事後確率密度関数は、

$$p(x(k+1)|Z_k) = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} p(x(k+1)|x(k)) p(z(k)|x(k)) \times p(x(k)|Z_{k-1}) dx(k) \quad (6.3)$$

となる。ただし、 $p(\cdot|\cdot)$ は条件付確率密度関数、 c_1 は正規化の定数である。(5.1) および (5.2) 式を用いて、(6.1) 式は、

$$p(x(k+1)|Z_k) = c_2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{[x(k+1)-ax(k)]^2}{2[q+\sigma_a^2 x^2(k)]}\right. \\ \left.-\frac{[z(k)-hx(k)]^2}{2[r+\sigma_h^2 x^2(k)]}\right\} p(x(k)|Z_{k-1}) dx(k) \quad (6.4)$$

となる。しかし、 $\sigma_a^2 = \sigma_h^2 = 0$ かつ $x(0)$ の先験的確率密度関数 $p(x(0)|Z_{-1})$ が正規性以外の場合には、右辺の積分を行なうことはひじょうにむずかしい。したがって、現段階ではこの問題に対する最適解を求めることはほとんど不可能である。

そこで、この問題に対する最適フィルタを構成することは断念し、つぎのような線形フィルタの設計について考察しよう。そして、線形フィルタの特性は、

$$x_s^*(k+1|k) = \Phi(k)x_s^*(k|k-1) + \Gamma_s(k)[z(k) - H(k)x_s^*(k|k-1)] \quad (6.5)$$

で表わされるものと仮定しよう。ここに、 $\Gamma_s(k)$ はこれから決定すべきゲインである。さて、この線形フィルタを用いた場合、真の状態とその推定値との差を、

$$e_s(k) = x(k) - x_s^*(k|k-1) \quad (6.6)$$

とすれば、(2.1) および (6.5) 式より、

$$e_s(k+1) = [\Phi(k) - \Gamma_s(k)H(k)]e_s(k) + [\delta\Phi(k) - \Gamma_s(k)\delta H(k)]x(k) - \Gamma_s(k)v(k) + w(k) \quad (6.7)$$

を得る。これは (3.2) 式と同じ形のもので、ただ $\Gamma_c(k)$ が $\Gamma_s(k)$ に変わっているだけである。したがって、(3.5)、(3.6) および (3.7) 式の両辺を $\delta\Phi(k)$ および $\delta H(k)$ に関して期待値をとれば、(6.5) 式で与えられる線形フィルタの実際の推定誤差の共分散行列を得ることができる。

さて、(6.1)₁ および (6.2)₂ 式を用いて、(3.5)、

(3.6) および (3.7) 式の期待値をとれば,

$$\begin{aligned}\tilde{H}(k+1) &= [\Phi(x) + \Gamma_s(k) H(k)] \\ &\times \tilde{H}(k) [\Phi(k) - \Gamma_s(k) H(k)]' \\ &+ \Gamma_s(k) [E\{\delta H(k) \Sigma(k) \delta H'(k)\} + R(k)] \\ &\times \Gamma_s'(k) \\ &+ E\{\delta \Phi(k) \Sigma(k) \delta \Phi'(k)\} + Q(k) \quad (6.8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(k+1) &= [\Phi(k) - \Gamma_s(k) H(k)] \tilde{\Psi}(k) \Phi'(k) \\ &+ E\{\delta \Phi(k) \Sigma(k) \delta \Phi'(k)\} + Q(k) \quad (6.9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}(k+1) &= \Phi(k) \tilde{\Sigma}(k) \Phi'(k) \\ &+ E\{\delta \Phi(k) \Sigma(k) \delta \Phi'(k)\} + Q(k) \quad (6.10)\end{aligned}$$

を得る. ここに, $(\sim)$ は期待値を示す. (6.8) 式の $\tilde{H}(k)$ が $e_s^*(k|k-1)$ の共分散行列である. また, 上式における期待値 $E\{\delta \Phi \Sigma(k) \delta \Phi'\}$ は (6.1)₂ 式を用いてつぎのように計算される. すなわち, その (i, j) 要素は,

$$\begin{aligned}E\{\Phi \Sigma(k) \delta \Phi'\}_{ij} &= E\left\{\sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \phi_{il} \Sigma_{lm}(k) \phi_{jm}\right\} \\ &= \delta_{ij} \sum_{m=1}^n \alpha_{im}^2 \tilde{\Sigma}_{mm}(k) \quad (6.11)\end{aligned}$$

となる. したがって, $E\{\delta \Phi \Sigma(k) \delta \Phi'\}$ は $n \times n$ 対角行列となり, その (i, j) 要素は,

$$\sum_{m=1}^n \alpha_{im}^2 \tilde{\Sigma}_{mm}(k), i=1, \dots, n, \quad (6.12)$$

で与えられる. 同様に, $E\{\delta H \Sigma(k) \delta H'\}$ も (6.2)₂ 式を用いて計算され, $p \times p$ 対角行列となり, その (j, j) 要素は,

$$\sum_{m=1}^n \beta_{jm}^2 \tilde{\Sigma}_{mm}(k), j=1, \dots, p \quad (6.13)$$

となる.

さて, ゲイン $\Gamma_s(k)$ を決定する問題について考察しよう. 離散形 Wiener-Kalman フィルタの最適ゲインは, 推定誤差の共分散行列を最小にするように決定されていることから¹⁾, ここでも, (6.8) 式で与えられる $\tilde{H}(k+1)$ を最小にするように $\Gamma_s(k)$ を決定しよう. このためには, (6.8) 式右辺を $\tilde{H}(\Gamma_s)$ と略記すれば, 任意の変分 $\delta \Gamma$ に対して,

$$\tilde{H}(\Gamma_s + \delta \Gamma) - \tilde{H}(\Gamma_s) \geq 0 \quad (\text{非負定値}) \quad (6.14)$$

が成立つことが必要十分である. (6.7) 式を用いて, (6.14) 式は,

$$\begin{aligned}\delta \Gamma [H \tilde{H} H' + E\{\delta H \Sigma(k) \delta H'\} + R] \Gamma_s' - H \tilde{H} \Phi' \\ + [\Gamma_s [H \tilde{H} H' + E\{\delta H \Sigma(k) \delta H'\} + R] - \Phi \tilde{H} H'] \delta \Gamma' \\ + \delta \Gamma [H \tilde{H} H' + E\{\delta H \Sigma(k) \delta H'\} + R] \delta \Gamma' \geq 0\end{aligned} \quad (6.15)$$

となる. 上式第3項は非負定値であるから, $\delta \Gamma$ の1次の微小項を零とおいて,

$$\Gamma_s(k) = \Phi(k) \tilde{H}(k) H'(k)$$

$$\begin{aligned}&\times [H(k) \tilde{H}(k) H'(k) \\ &+ E\{\delta H(k) \Sigma(k) \delta H'(k)\} + R(k)]^{-1}\end{aligned} \quad (6.16)$$

を得る. この $\Gamma_s(k)$ が, 本章で提案する遷移行列および観測行列の要素がランダムに変動する場合の線形フィルタの最適ゲインである.

またこの解は, (6.4) 式からつぎの仮定,

$$\sigma_a^2 x^2(k) \simeq \sigma_a^2 E\{x^2(k)\} \quad (6.17)_1$$

および,

$$\sigma_h^2 x^2(k) \simeq \sigma_h^2 E\{x^2(k)\} \quad (6.17)_2$$

を設けることにより導くことができる. すなわち, (6.4) 式の $\exp\{\}$ において, $x^2(k)$ がすべての k についてその期待値 $E\{x^2(k)\}$ で近似的に表わされると仮定し, $p(x(0)|Z_{-1})$ を正規性とすれば, 積分は容易に実行され通常の Wiener-Kalman フィルタを得る. ただし

$$q \rightarrow q + \sigma_a^2 E\{x^2(k)\} \quad (6.18)_1$$

および,

$$r \rightarrow r + \sigma_h^2 E\{x^2(k)\} \quad (6.18)_2$$

という置換を施さなければならぬ. (6.8), (6.9) および (6.10) 式は正に Wiener-Kalman フィルタにおいて, (6.18) 式のような置換を施して得られるものである. 以上は Bayes 推定の立場からの本章で提案した線形フィルタに対する解釈である.

またこの場合, (2.7) 式で定義される Γ_c を (6.17) 式の Γ_s の代わりに用いた場合のフィルタの推定誤差の共分散行列を $\tilde{H}_c(k)$ とすれば, (6.8) 式から,

$$\begin{aligned}\tilde{H}_c(k+1) &= [\Phi(k) - \Gamma_c(k) H(k)] \\ &\times \tilde{H}_c(k) [\Phi(k) - \Gamma_c(k) H(k)]' \\ &+ \Gamma_c(k) [E\{\delta H(k) \Sigma(k) \delta H'(k)\} + R(k)] \Gamma_c'(k) \\ &+ E\{\delta \Phi(k) \Sigma(k) \delta \Phi'(k)\} + Q(k) \quad (6.19)\end{aligned}$$

となる. したがって, Γ_s を用いた場合の共分散行列を記号的に $\tilde{H}_s(k)$ と表わせば, 線形フィルタの performance loss $\tilde{E}_{cs}(k) \triangleq \tilde{H}_c(k) - \tilde{H}_s(k)$ は (6.20) 式で与えられる. その計算には先の報告⁵⁾の結果を応用することができ,

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{cs}(k+1) &= [\Phi(k) - \Gamma_c(k) H(k)] \\ &\times \tilde{E}_{cs}(k) [\Phi(k) - \Gamma_c(k) H(k)]' \\ &+ T(k) S_c^{-1}(k) S_o(k) S_c^{-1}(k) T'(k) \quad (6.20)\end{aligned}$$

となる. ただし,

$$\begin{aligned}T(k) &= [\Phi(k) - \Gamma_s(k) H(k)] [P_c(k) - \tilde{H}_s(k)] \\ &+ \Gamma_s(k) E\{\delta H(k) \Sigma(k) \delta H'(k)\} \quad (6.21)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_o(k) &= H(k) \tilde{H}_s(k) H'(k) + E\{\delta H(k) \Sigma(k) \delta H'(k)\} \\ &+ R(k) \quad (6.22)\end{aligned}$$

$$S_c(k) = H(k) P_c(k) H'(k) + R(k) \quad (6.23)$$

であり, $P_c(k)$ は (2.8) 式で与えられる. したがって, (6.20) 式の第 2 項は非負定値であるから, $\tilde{E}_{cs}(0)$ が非負定値であれば, $\tilde{E}_{cs}(k)$ はつねに非負定値となる.

7. 数 値 例——2

5. の例と同じ 1 階の系,

$$x(k+1) = [a + \delta a(k)]x(k) + w(k) \quad (7.1)$$

および,

$$z(k) = [h + \delta h(k)]x(k) + v(k) \quad (7.2)$$

について, $\Gamma_c(k)$, $\Gamma_s(k)$ および $\Gamma_0(k)$ の 3 種類のゲインの比較を行なうことにしよう. ここに, $\delta a(k)$ および $\delta h(k)$ は互いに独立な平均値零の白色雑音で, その分散はそれぞれ σ_a^2 , σ_h^2 であるとする. (5.3)~(5.5) 式の δa , δh に関する期待値をとれば,

$$\begin{aligned} \tilde{H}(k+1) &= [a - h\Gamma_s(k)]^2 \tilde{H}(k) \\ &\quad + [\sigma_a^2 + \sigma_h^2 \Gamma_s^2(k)] \tilde{\Sigma}(k) + r\Gamma_s^2(k) + q \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\tilde{\Psi}(k+1) = a[a - h\Gamma_s(k)]\tilde{\Psi}(k) + \sigma_a^2 \tilde{\Sigma}(k) + q \quad (7.4)$$

$$\tilde{\Sigma}(k+1) = [a^2 + \sigma_a^2]\tilde{\Sigma}(k) + q \quad (7.5)$$

となる. 上式において, $\tilde{\Psi}(k)$ は以下の計算には不用である. (6.16) 式より近似最適ゲイン $\Gamma_s(k)$ は,

$$\Gamma_s(k) = ah\tilde{H}(k)/[r + \sigma_h^2\tilde{\Sigma}(k) + h^2\tilde{H}(k)] \quad (7.6)$$

となる.

したがって, (5.6) および (5.9) 式で定義されるゲイン Γ_c および Γ_0 と合せて, 3 種類のゲインが得られた. これらのゲインを用いた場合のフィルタの方程式は, それぞれ,

$$\begin{aligned} x_c^*(k+1|k) &= ax_c^*(k|k-1) \\ &\quad + \Gamma_c(k)[z(k) - hx_c^*(k|k-1)] \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} x_s^*(k+1|k) &= ax_s^*(k|k-1) \\ &\quad + \Gamma_s(k)[z(k) - hx_s^*(k|k-1)] \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1|k) &= a_0\hat{x}(k|k-1) \\ &\quad + \Gamma_0(k)[z(k) - h_0\hat{x}(k|k-1)] \end{aligned} \quad (7.9)$$

となる. ここに, $a_0 = a + \delta a(k)$ および $h_0 = h + \delta h(k)$ である. また,

$$\Gamma_c(k) = ahP_c(k)/[r + h^2P_c(k)] \quad (7.10)$$

$$\Gamma_0(k) = a_0h_0P_0(k)/[r + h_0^2P_0(k)] \quad (7.11)$$

であり, $P_c(k)$ および $P_0(k)$ は, それぞれ (5.7) および (5.8) 式で与えられる.

Fig. 4 は, 数値例として,

Fig. 4 Comparison of behaviors of three different gains

$$a=0.9, h=1.0, q=0.01, r=0.09$$

$$\sigma_a^2=0.09, \sigma_h^2=0.0,$$

$$P_c(0)=P_0(0)=\tilde{H}(0)=\tilde{\Sigma}(0)=4.0$$

を与えた場合の 3 種類のゲインの挙動の相違を比較したものである. $\Gamma_0(k)$ は不規則に変動するパラメータ $\delta a(k)$ の影響を受け, 不規則に変動するが, これはその一例である. $\Gamma_c(k)$ は $\delta a \equiv 0$ としたモデルによって完全に決定される. $\Gamma_s(k)$ も与えられた統計量から完全に決定されるが, $\Gamma_c(k)$ とは異なった挙動を示す. これは, 実際の状態 $x(k)$ の分散 $\tilde{\Sigma}(k)$ が σ_a^2 を通して $\Gamma_s(k)$ に影響を与えるからである.

Fig. 5 および Fig. 6 は, (7.7)~(7.9) 式で定義される 3 種類のフィルタの performance を擬乱数を用いて, 実験的に評価した結果を示している. ここに,

Fig. 5 Experimental evaluation of the filters performances

* $\sigma_h^2 \neq 0$ であれば, とうぜん $\delta h(k)$ の影響を受ける.

Fig. 6 Experimental evaluation of the filter performances

$$I_c = E' \left\{ \sum_{k=1}^{50} [x(k) - x_c^*(k|k-1)]^2 \right\} \quad (7.12)_1$$

$$I_s = E' \left\{ \sum_{k=1}^{50} [x(k) - x_s^*(k|k-1)]^2 \right\} \quad (7.12)_2$$

$$I_o = E' \left\{ \sum_{k=1}^{50} [x(k) - \hat{x}(k|k-1)]^2 \right\} \quad (7.12)_3$$

である。 $x(k)$ は(7.1)式で与えられる実際の状態であり、 E' は異なる乱数による 100 回の試行の平均を示している。Fig. 5 および Fig. 6 からわかるように、 $\Gamma_s(k)$ を用いることにより、フィルタの performance を $\Gamma_c(k)$ を用いた場合に対して改善することが可能である。とくに、パラメータ変動の分散 σ_a^2 あるいは σ_n^2 がそれぞれ外乱あるいは観測ノイズの分散よりも大きいときに、改善される割合は大きくなっている。

8. 結 言

本論文では、まず状態遷移行列および観測行列のパラメータを誤認して設計されたフィルタの performance loss について考察した。3. では、実際の推定誤差の共分散行列の時間的変化を表わす差分方程式を導

いた。この場合、実際の系の状態ベクトルの分散が、近似フィルタの performance に影響を与えることが判明した。また、さきの報告に述べたように、外乱および観測ノイズの共分散行列を誤認した場合には、評価関数の重み行列を誤認したレギュレータ問題と performance loss の意味で双対の関係にあるが、4. で述べたように、この場合には、そのような双対の関係は成立しないことがわかった。

また本稿後半では、遷移行列および観測行列の各要素が不規則に変動する場合の線形フィルタのゲインを決定する方法について考察した。3. の結果を応用して、共分散行列 $\tilde{\Gamma}(k+1)$ を最小にするゲイン $\Gamma_s(k)$ を求めた。

デジタル・シミュレーションの結果も $\Gamma_s(k)$ は $\Gamma_c(k)$ を用いた場合に比較して、かなりフィルタの性能の改善に役立つことを示している。

さきの論文と本稿の結果を合わせると、さらに一般的な離散形 Wiener-Kalman フィルタの performance loss の問題を取り扱うことができる。

最後に、本文を読んで有益な御討論をいただいた京都工芸繊維大学砂原善文教授に感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) R. E. Kalman: New Methods in Wiener Filtering Theory, Proc. of the 1st Symp. on Eng. Applications of Random Function Theory and Probability, 270/388, John Wiley (1963)
- 2) Y. C. Ho and R. C. K. Lee: A Bayesian Approach to Problems in Stochastic Estimation and Control, IEEE Trans., Vol. AC-9, No. 4, 333/339 (1964)
- 3) T. Nishimura: On the a priori Information in Sequential Estimation Problems, IEEE Trans., Vol. AC-11, No. 2, 197/204 (1966)
- 4) T. Nishimura: Error Bounds in Continuous Kalman Filters and the Application to Orbit Determination Problems, IEEE Trans., Vol. AC-12, No. 3, 268/274 (1967)
- 5) 榎木・片山: 逐次推定過程における誤差の解析とその双対問題, 計測自動制御学会論文集 4-3, 248/255(1968)
- 6) S. R. Neal: Linear Estimation in the Presence of Errors in Assumed Plant Dynamics, IEEE Trans., Vol. AC-12, No. 5, 592/594 (1967)