未知波形の適応同定

樋口 清 伯・田 村 進 一・田 中 幸 吉

大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山町 1

(昭和 43 年 8 月 30 日受付)

Non-Supervised Adaptive Identification of Unknown Waveform

Seihaku HIGUCHI, Shinichi TAMURA and Kokichi TANAKA

(Faculty of Engineering Science University of Osaka, Toyonaka)

(Received August 30, 1968)

A non-supervised adaptive identification of unknown waveforms in the noisy environments is described in this paper. Adaptive correlating filter is proposed, which is constructed by means of linear combinations of orthogonal function filters. Its operation and statistical properties are stated in detail.

The output waveform of this filter represents the crosscorrelation function between the unknown waveform imbedded in noise and the impulse response waveform of this filter composed of linear combinations. By this result, this filter operates as follows. At the instant of the maximum value of cross-correlation function crossed over the threshold level, the combination weights are changed in accordance with the weighted average method so as to grow the filter output. If the above average process is repeated, it is numerically derived at large SN-ratio that the impulse response of this filter converges to the unknown waveform.

Finally the results obtained numerically and experimentally are discussed.

1. は し が き

情報処理における同定の問題は制御工学のみならず通信工学の分野でも重要な位置を占めている。システム同定に関しては多くの研究があり、その1つとしてモデル法¹⁾がある。これは同定しようとするシステムに対し、可変パラメータをもつモデルを仮定し、両者の特性が合うようにパラメータを定める方法である。また観測値に重畳している雑音の統計的性質が知られているときには未知パラメータに関する事後推定値を求める方法²⁾もある。これらの方法はシステムの動特性が未知のパラメータを含む形で完全に記述されているか、あるいは種々の事前知識から未知パラメータを含む形のモデルを仮定しても差支えないときに、おおむね適用される。しかしながらいつもモデルが仮定されるとは限らず、このようなときにはテスト信号を加え同定する方法³⁾、あるいはシステムのインパルスの応答関数を直交関数系により展開し、その係数により特徴づける方法⁴⁾などが報告されている。

いっぽう、システムの入力が急激な変化を繰り返しているとき、その変化を利用したシステムの動特性の同定、システムに不規則に起こる外乱波形を測定し、その原因を調べようとするときに必要な外乱波形の同定、あるいは通信における信号波形(1ビット)の同定などのような問題がある。これらは与えられた情報から必要なものを抽出し、この情報抽出をよりよくするために機械自身を改変する。いわゆる自己組織化機能をもつ機械が必要である。このためには上述した種々の同定方法をさらに発展拡張させなければならない。

本論文は、上述の場合に適用できる機械⁵⁾の一例として荷重を可変にした直交関数系により適応形相関フィルタを提案し、この構成法を述べた。さらにこのフィルタの同定過程を近似計算により評価し、シミュレーション実験により収束を確かめたものである。

2. 適応形相関フィルタの構成⁶⁾

対象とする波形 $x(t)$ はエネルギー有限、継続時間も有限であると考えられるから、つぎの条件をみたす

$x_T(t)$ を定義する.

$$\int_0^\infty x^2(t) dt < \infty$$

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases} \quad (1)$$

ここで T は継続時間である.

(1) 式で定義した波形 $x_T(t)$ は適当な直交関数系 $\{\varphi_i(t)\}$ により展開でき, 展開項数を l とすれば,

$$x_T(T-t) = \sum_{i=0}^{l-1} a_i \varphi_i(t) \quad (2)$$

ここで,

$$a_i = \int_0^T x_T(T-\tau) \varphi_i(\tau) d\tau \quad i=0, 1, 2, \dots, l-1 \quad (3)$$

$$\int \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \delta_{ij} \quad (3')$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \text{ のとき} \\ 1 & i = j \text{ のとき} \end{cases}$$

となる。(2) 式の直交関数系 $\{\varphi_i(t)\}$ はつぎのような事項に注意して選択しなければならない.

直交関数系 $\{\varphi_i(t)\}$ を回路で実現するためには (3') 式の積分領域は, $[0, T]$, $[0, \infty)$ のように変数の正の領域で定義されていなければならない. ところが区間 $[0, T]$ で定義されている関数系はこの区間以外では直交性の条件をみたさないし, また三角関数系では周期 T で波形を無限に繰返す. したがって適応形相関フィルタとして適用するときには積分領域は $(0, \infty)$ でなければならない. このような観点から代表的な直交関数系としてはつぎのものが考えられる.

(i) ラゲール直交関数系⁷⁾, (ii) Circular-Equi α 系⁸⁾, (iii) 直交化指数関数系, (iv) 変域を $[0, \infty)$ に変換したルジャンドル関数系.

波形の近似度の立場から, これらの直交関数系を調べた結果は付録にまとめてあるが, 近似度とはつぎの (4) 式で計算したものである.

$$\epsilon = \frac{\int_0^\infty x_T^2(t) dt - \sum_{i=0}^{l-1} a_i^2}{\int_0^\infty x_T^2(t) dt} \quad (4)$$

付録の Table A で示した近似度からは Circular Equi α 系は各種の波形に対して比較的良好な結果を示しているが (A.4) 式からわかるように回路として実現することがきわめてむずかしい. この点に関してはラゲール直交関数系のほうが都合よく, かつ種々の要求も比較的満たしていることから以下ではラゲール直交関数系を用いて議論を進めるが, 他の関数系についてもまったく同じに取扱うことができる.

ラゲール直交関数系は,

$$\varphi_i(t) = L_i(t) e^{-t/2}$$

$$L_i(t) = 1 - \binom{i}{1} t + \binom{i}{2} \frac{t^2}{2!} + \dots + (-1)^i \frac{t^i}{i!} \quad (5)$$

$$\text{ここで, } \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)! m!}$$

(5) 式に時定数 α (時間軸の伸縮パラメータ) を入れ, ラプラス変換を求めると,

$$\Phi_i(s) = \frac{\sqrt{\alpha}}{s + \alpha/2} \left(\frac{s - \alpha/2}{s + \alpha/2} \right)^i \quad i=0, 1, \dots \quad (6)$$

となりアナログ計算機の演算増幅器あるいは緩衝増幅器 (カソードフロア) と抵抗, コンデンサを用いて実現される. まずラゲール直交関数系を用いた相関フィルタの構成について考える. (3) 式で求めた a_i を荷重として (6) 式を考慮すれば相関フィルタのブロック線図は Fig. 1 で与えられる.

Fig. 1 Block diagram of correlating filter

この回路のインパルス応答関数を $h(t)$ とすれば,

$$h(t) = \sum_{i=0}^{l-1} a_i \varphi_i(t) \doteq x_T(T-t) \quad (7)$$

となり, $x_T(t)$ あるいは $z_T(t)$ を加えると, それぞれ

$$\phi_{xx}(T-t) = \int_0^t x_T(T-\tau) x_T(t-\tau) d\tau \quad (8)$$

$$\phi_{xz}(T-t) = \int_0^t x_T(T-\tau) z_T(t-\tau) d\tau$$

で, 自己および相互相関数が求められる. Fig. 1 の係数 a_i が入力波形を展開したものと同じなら自己相関数, そうでないときには相互相関数が求められることがわかる. いま Fig. 1 で示した相関フィルタには a_i が荷重されているが, この値を修正する機構を設けると適応形相関フィルタとなり Fig. 2 はそのブロック線図である. 決定機構はあらかじめ定めた閾値よりも $y(t)$ が大きくなりかつ最大となる時刻を検出する機能をもち, この詳細をつぎに述べる.

Fig. 2 Block diagram of adaptive correlating filter

3. 適応形相関フィルタの動作

前章で求めた適応形相関フィルタ（以下フィルタと略する）の適応動作の詳細について述べる。波形 $x_T(t)$ は未知であるが、時間的な変化がなく（time-invariant）かつ繰返しランダムに生起しているとする。いま未知波形の展開係数に関する事前情報に基づく係数値を推定パラメータ記憶コンデンサ（このコンデンサの記憶内容を以下推定値とする） $\rho c_0', \rho c_1', \dots$ に記憶させ、決定機構は可変閾値素子に適当な大きさの閾値 $\mathcal{F}_0$ を設定しておく。入力が増えられると、出力 $y(t)$ は事前情報に対する推定値と現在の入力との相互相関々数を表わし、 $y(t)$ が閾値 $\mathcal{F}_0$ をこえて最大になった時刻 t_1 を検出し*、この瞬間に決定機構から指令が出され、スイッチ $s_0, s_1, \dots$ は $\rho c_0', \rho c_1', \dots$ の一方の端子に接続される。時刻 t_1 における入力一時記憶コンデンサ（このコンデンサの内容を一時記憶値とする） $c_0, c_1, \dots$ の内容は（3）式を考えれば、時刻 t_1 までに与えられた入力の展開係数である。したがって、時刻 t_1 には雑音に汚された未知波形が入力として加えられていたと決定することになる。

このときのパラメータ修正法則は電荷保存則からつぎのとおりである。

$$\beta_j(t_i) = \frac{\rho \beta_j(t_{i-1}) e^{-\delta \tau} + \alpha_j(t_i)}{\rho + 1} \quad (9)$$

$$\mathcal{F}(t_i) = \eta y(t_i) \quad (10)$$

ただし、 $\mathcal{F}(t_0) = \mathcal{F}_0$ 、 $\beta_j(t_0)$ はそれぞれ事前情報として与えられた閾値および推定値、なお閾値 $\mathcal{F}(t)$ は時刻 t_i においては（10）式で与えられるが、 t_i 以後、時間とともに減衰する。すなわち、

$$\mathcal{F}(t) = \eta y(t_i) e^{-\sigma(t-t_i)} \quad t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (11)$$

ここで、（9）、（10）、（11）式中の各記号の説明をする。つぎのようである。すなわち

$\tau = t_i - t_{i-1}$ (t_{i-1} は第 $(i-1)$ 回目の決定時刻)

$\beta_j(t_i)$ は時刻 t_i で修正された j 番目の推定値

$\alpha_j(t_i)$ は時刻 t_i における j 番目の一時記憶値

ρ = 加重平均の重みで 2 つのコンデンサの容量比

$\eta = 0.5 \sim 1$ の定数

δ = 忘却量を表わす定数

$\sigma = \beta_j(t_0)$ が未知波形の情報をあまり含まない場合に $y(t)$ が大きくなりえないで長時間決定が行なわれないことを避けるための減衰効果を与える係数で忘却量とも関連している。

このときのフィルタのインパルス応答関数を $h_i(t)$ とすれば、

$$h_i(t) = \sum_{j=0}^{i-1} \beta_j(t_i) \varphi_j(t) \quad (12)$$

となる。ここで最大値決定時刻 t_i はフィルタが適応動作を開始するときから測ったものである。

いま、第 i 回目の決定が行なわれたとし（時刻 t_i ）、このときの入力の状態を考える。時刻 t_i と時刻 $(t_i - T)$ の時間内にある入力はつぎの 4 とおりに分けられる。

- (i) 波形の前半部がはいっている状態
- (ii) 波形が完全にはいっている状態
- (iii) 形の後半部がはいっている状態
- (iv) 波形はまったくはいっていない状態

いずれの場合にも雑音ははいっているが (ii) の状態が続けば収束には好都合であるが、一般には SN 比にも関連して 4 つの状態が生じる。このため解析は困難であるが、SN 比が非常に大きいときの評価を近似的に与える。極めて簡単化したフィルタ⁹⁾ については M. J. Hinich¹⁰⁾ が近似的に収束の評価をしている。

4. 収束性の検討

本章では、ランダムに波形 $x_T(t)$ が加えられているとき第 i 回目の最大値の決定時刻を t_i とし時間区間 $[t_i - T, t_i]$ の中に波形の前半部が入っていると仮定する。ここで時間軸をシフトさせ、 t_i' を導入する。 t_i' は第 i 回目の決定が行なわれたとき、さきの仮定から、波形 $x_T(t)$ が加えられているから、この印加時刻を基準として測った決定時刻である。したがって決定回数が増していくとき、このフィルタが収束するということは $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i' = T$ となることであるからフィルタの収束性は t_i' の変化の大きさを評価することにより確かめられる。

第 i 回目の適応時におけるフィルタのインパルス応答関数を $h_i(\tau)$ とし、入力を $v_i(t)$ とすれば、

$$v_i(t) = x_T(t) + n_i(t) \quad (13)$$

となり、時刻 t におけるフィルタの出力 $y_i(t)$ はつぎの（14）式で与えられる。

$$y_i(t) = \int_0^{T_i} h_i(\tau) v_i(t-\tau) d\tau \quad (14)$$

ここで（13）式の $n_i(t)$ は第 i 回目の適応時における雑音、（14）式の T_i は $h_i(\tau)$ の継続時間である。

（9）式において $\delta = 0$ としたときにはフィルタのインパルス応答関数 $h_{i+1}(\tau)$ は $h_i(\tau)$ と $v_i(t)$ を用いてつぎのように修正される。

$$h_{i+1}(\tau) = a h_i(\tau) + b v_i(t_i - \tau) \quad (15)$$

ただし、

$$a = \frac{\rho}{\rho + 1}, \quad b = \frac{1}{\rho + 1}$$

第 i 回目の適応時には $t = t_i$ において $y_i(t)$ は最大値をとるから、 $v_i(t)$ は t に関して 2 回まで微分可能とすると、

$$\left. \frac{dy_i(t)}{dt} \right|_{t=t_i} = \int_0^{T_i} h_i(\tau) v_i'(t_i - \tau) d\tau = 0 \quad (16)$$

* 厳密には $y(t)$ が $\mathcal{F}(t_i)$ を越えている間 $y(t)$ を観測して最大値と決定しなければならない。実際には $y(t)$ を微分し、雑音による高周波成分を除去して極大値をみつける。このとき $\mathcal{F}(t_i)$ を大きく、すなわち（11）式で η を 1 に近くとっておけば極大値は最大値とみなして差し支えない。

$$\left. \frac{dy_{i+1}(t)}{dt} \right|_{t=t_{i+1}} = \int_0^{T_{i+1}} h_{i+1}(\tau) v_{i+1}'(t_{i+1}-\tau) d\tau = 0 \quad (17)$$

$$\left. \frac{d^2 y_{i+1}(t)}{dt^2} \right|_{t=t_{i+1}} = \int_0^{T_{i+1}} h_{i+1}(\tau) v_{i+1}''(t_{i+1}-\tau) d\tau < 0 \quad (18)$$

となる。ここに ' は微分を表わす。

第 i 回目の決定時刻 t_i と第 $(i+1)$ 回目の決定時刻 t_{i+1} との差 $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ を求める。この Δ_i は最大値決定時刻の移動を表わしているが、簡単のため雑音の影響を無視し、すべての i に対して、

$$v_i(t) \doteq v_{i+1}(t) \doteq h_{i+1}(T_{i+1}-t) \doteq x_T(t) \\ T_i \doteq T_{i+1} \doteq t_i \quad (19)$$

なる近似が成立するとし、さらに Δ_i は小さいとして (17) 式につぎの近似式 (20) を適用すると、

$$v_{i+1}'(t_{i+1}-\tau) \doteq v_{i+1}'(t_i-\tau) + \Delta_i v_{i+1}''(t_i-\tau) \quad (20)$$

$$\Delta_i \doteq - \frac{\int_0^{T_{i+1}} h_{i+1}(\tau) v_{i+1}'(t_i-\tau) d\tau}{\int_0^{T_{i+1}} h_{i+1}(\tau) v_{i+1}''(t_i-\tau) d\tau} \quad (21)$$

となり、(15)、(16) 式を用い、(19) 式を考慮すれば、

$$\Delta_i \doteq - \frac{b \{x_T^2(t_i) - x_T^2(t_i - T_{i+1})\}}{2 \frac{d^2 y_{i+1}(t_i)}{dt^2}} \quad (22)$$

$$\doteq - \frac{b \{x_T^2(t_i) - x_T^2(0)\}}{2 \int_0^{t_i} x_T(\tau) x_T''(\tau) d\tau} \quad (23)$$

となる。したがって $x_T(0) = 0$ を仮定すると、(18) 式より $x_T(t_i) \doteq 0$ に対して (23) 式は正となる。

(23) 式の Δ_i から t_i の移動が与えられた $x_T(t)$, b に対して求める。さらに $x_T(T) = 0$ とすれば、 $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta_i =$

0 となり収束することがわかる。 $x_T = x_T(T) = 0$ という仮定はシステムのインパルス応答あるいは信号波形などでは満足されていると考えられる。

つぎにフィルタのインパルス応答関数は $x_T(T-\tau)$ に収束したとし、入力 $v(t)$ による最大値の決定時刻の統計的性質を SN 比が非常によいときについて調べる。

$$y(t) = \int_0^T x_T(T-\tau) \{x_T(t-\tau) + n(t-\tau)\} d\tau \quad (24)$$

最大値をとる時刻 t はつぎの (25) 式から求まる。

$$y'(t) = \int_0^T x_T(T-\tau) \{x_T'(t-\tau) + n'(t-\tau)\} d\tau = 0 \quad (25)$$

$n(t) = 0$ とすれば (24) 式は時刻 $t = T$ において最大値をとり、かつこの点に対して左右対称である。したがって (25) 式の右辺第 1 項は $t = T$ で 0 となり、第 2 項はランダムな成分であるから最大値の生じる時刻の平均値は T である。雑音があるときには最大値は $t = T$ の近傍で生じるとし、(25) 式をテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} & \int_0^T x_T(T-\tau) \{x_T'(T-\tau) + n'(T-\tau)\} d\tau \\ & + (t-T) \int_0^T x_T(T-\tau) \{x_T''(T-\tau) + n''(T-\tau)\} d\tau \\ & + \frac{(t-T)^2}{2} \int_0^T x_T(T-\tau) \{x_T'''(T-\tau) + n'''(T-\tau)\} d\tau \\ & + \dots = 0 \end{aligned}$$

となる。SN 比がよいという仮定から $(t-T)$ の 2 次以上の項を無視し、 $x_T(0) = x_T(T) = 0$ とすると、(26) 式から、

$$t-T \doteq \frac{\int_0^T x_T(T-\tau) n'(T-\tau) d\tau}{\int_0^T x_T(T-\tau) x_T''(T-\tau) d\tau} \quad (27)$$

分散は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(t-T)^2} \\ & \doteq \frac{\int_0^T \int_0^T x_T(T-\tau) x_T(T-\sigma) \overline{n'(T-\tau) n'(T-\sigma)} d\tau d\sigma}{\left[\int_0^T x_T(T-\tau) x_T''(T-\tau) d\tau \right]^2} \quad (28) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで $\overline{\quad}$ は平均を表わす。

(28) 式の意味を考えるため周波数領域に変換すると、

$$(t-T)^2 \doteq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X_T(j\omega)|^2 \Phi_{nn}(\omega) d\omega}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X_T(j\omega)|^2 d\omega \right]^2} \quad (29)$$

(29) 式において $\Phi_{nn}(\omega)$ は雑音のパワースペクトル、 $X_T(j\omega)$ は $x_T(t)$ のフーリエ変換である。 $\Phi_{nn}(\omega)$ は波形 $X_T(j\omega)$ の周波数帯域に比べて広く、かつ一定 N_0 であると仮定し、波形の等価帯域をつぎの (30) 式で定義する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X_T(j\omega)|^2 d\omega = \overline{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j\omega)|^2 d\omega \quad (30)$$

(30) 式を用いて (29) 式を書き直すと、

$$(t-T)^2 \doteq \frac{N_0}{\overline{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j\omega)|^2 d\omega} = \frac{1}{\overline{\omega^2} K^2} \quad (31)$$

$$\text{ここで、} \quad K \doteq \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j\omega)|^2 d\omega}{N_0} \right)^{1/2}$$

となり、最大値決定時刻のゆらぎの分散は波形の帯域と、SN 比の自乗との積に逆比例することがわかる。物理的には SN 比が大きくなればゆらぎが小さくなり、また、 $\overline{\omega^2}$ が大きくなれば波形は高周波成分を含むため自己相関数が鋭くなり雑音による影響が小さくなることを示している。2 次以上のモーメントを簡単な形で求めることは困難であるから実験的に確めた結果によると SN 比が大きいたときにはフィルタが収束した段階での最大値の生じる時刻のゆらぎはほぼ正規分布で仮定してよいと思われる¹¹⁾。このときの平均値は T 、分散は (31) 式で求めたものである。

以上の結果から、(23) 式は収束の1つの保障であり、最終状態 ($\lim_{t \rightarrow \infty} t_i' = T$) に収束していく。この結果は (19) 式からもわかるように雑音がないという仮定に基づいているから、雑音のあるときについて考える。雑音があるときに観測される $y(t)$ の最大値の生じる時刻を t_i'' とする。この t_i'' が雑音がないときに最大値の生じる時刻 t_i' のまわりで正規分布していると近似できるなら、(23) 式の結果を適用することが可能である。SN 比がわるいときには最大値決定と同時に一時記憶値を推定記憶値に繰込まないで、さらに記憶素子を設けて、一時記憶値のみを多数回平均して推定記憶値に繰込むなどの方法を考えなければならない。この解析は t_i'' の分布が複雑となり、また $x_T(t)$ にも依存するため困難である。つぎに収束したときのフィルタのインパルス応答を (23) 式が適用でき、(31) 式が成立するとして考える。(31) 式から最大値決定時刻は正規分布 $p(t) = \text{Nor}\left(T, \frac{1}{\omega^2 K^2}\right)$ でゆら

ぐため実際には $p(t)$ を有限区間 (通常 3σ (シグマ) で呼ばれる区間) で切ったインパルス応答をもつフィルタに、 $x_T(t)$ を加えたときの出力波形に収束すると考えられる。このため雑音が大きいきの対策として、収束した波形を上述の $p(t)$ に対する逆フィルタに通した出力波形を真の入力波形と考えなければならない。もちろん代数的には $p(t)$ および収束波形を適当な間隔でサンプルし、逆マトリックスを求めれば真の入力波形を同定することができる。

5. 実験結果とその検討

前章で求めた収束過程を示す (23) 式で $b=0.1$ とし、ガウス雑音を重畳させてデジタル計算機実験を行なった結果を Fig. 3 (a), (b) に示す。SN 比はつぎのように定義する。

Fig. 3 Convergence process of adaptive correlating filter

$$SN = 10 \log \left[\frac{\int_0^T x_T^2(t) dt}{\int_0^T n^2(t) dt} \right]$$

つぎに Fig. 2 で示すフィルタとアナログ計算機と付加決定機構を用いて収束過程を確かめたものが Fig. 4 である。Fig. 4 において第 1 行目の 3 つの波形は順に未知波形 (機械には教えられていない) の自己相関々数、および入力における雑音との共存状態である第 2 行目の一連の波形はこのフィルタの学習進行状況で、インパルス応答の変化の様子を示す。各波形の下

Fig. 4 Convergence process of adaptive correlating filter

にある数字は決定が行なわれた回数を示しているが、ほぼ 40 回ぐらいの決定でインパルス応答は入力の未知波形 (もちろん、 $x_T(t)$ の時間軸を逆転した波形) に収束していると考えられる。第 3, 4 行目 (B) についてもほぼ同様のことがいえる。この実験では (9), (10) および (11) 式において、 $\rho=3, \eta=1, \sigma=0.002, \delta=0, x_T(t)$ の継続時間は 3 秒とし、展開項数は $l=10$ 、時定数 $\alpha=2$ 、SN 比 $=5$ dB である。

つぎに波形が理想的に収束した状態 ($x_T(t)$ の展開係数値をコンデンサ $\rho c_0', \rho c_1' \dots$ に記憶させる) を構成し、最大値のゆらぎを 2 種類の SN 比について求めたものが Fig. 5 である。この実験では項数 $l=10$ 、時定数 $\alpha=2$ 、 $x_T(t)$ としては Fig. 4 の A の実験に

Fig. 5 Frequency distribution of the fluctuation of decision time

利用したものと同一である。実験データとしての頻度分布は 0 に対して左右対称となるべきであるが、項数を $l=10$ としているため、たとえ理想状態でも近似誤差があるため生じたものである。

以上の実験結果から SN 比が比較的大きいときには収束することが示されたが、確実に収束するとはいえず、その解析は非線形な動作を含むため困難である。しかし最大値の決定時刻が適応過程の最初から、3. の最後に述べた状態すなわち「(iii)」波形の後半部がはいっている状態であるなら、4. の冒頭に述べた仮定も満たさないため収束はしない。したがって (9) 式における事前に与える推定値 $\beta_j(t_0)$, $j=0, 1, \dots, (l-1)$ には十分注意しなければならない。ラゲール直交関数系の性質として $\beta_j(t_0)$ を全部 1 としておけばフィルタのインパルス応答は δ -関数となる (付録 (A・4) 式)。このフィルタに雑音に埋れた未知波形が加えられると、出力 $y(t)$ が最大となる時刻の近傍で生じ、上述の (iii) の状態は避けられる。もちろん $x_T(t)$ が負の値のみを取るときもあるため、Fig. 2 の adder のつぎに絶対値回路を入れておく方法がある。

6. む す び

適応形相関フィルタを直交関数系により構成し、雑音にうもれた未知波形がランダムに生起しているような状況のもとで、このフィルタが適応同定し、未知波形に近づく過程を考察した。

まず波形が有限継続時間をもつことに注意して直交関数系による展開を行ない、この直交関数系によって相関フィルタを構成し、相互相関関数の最大値が大きくなるように相関フィルタの荷重を変更させる機能をもたせた適応形相関フィルタを提案した。そして理想状態での収束過程については実験的に確かめた。

なおこのフィルタの動作は一種の自己組織化機能をもつフィルタ、あるいは教師なしの non-parametric machine ともいうことができ、興味ある問題を多く含んでいる⁵⁾。

参 考 文 献

- 茅：“プロセス動特性の統計的推定”，計測と制御，6-4, 266/279 (1967)
- R. Lee：“Optimal estimation, identification and control”，The M. I. T. Press (1964)
- K. Izawa and K. Furuta：“Simultaneous Identification of Multi-Input and Output Systems”，Proc of IFAC Tokyo Symp., 229/236 (1965)
- T. Kitamori：“Applications of Orthogonal Functions to the Determination of Process Dynamic Characteristics and to the Construction of Self-optimizing Control”，1 st IFAC Moscow, 613/618 (1960)
- 樋口，志村：“学習機械 V. (解説)”，制御工学，12-3, 33/42 (1968)
- K. Tanaka, S. Higuchi and S. Maekawa：“An Identification Method of System Characteristics using a New Type of Adaptive Correlating Filter”，Proc. of IFAC Tokyo Symp., 245/254 (1965)
- J. W. Head and W. P. Wilson：“Laguerre Functions: Tables and Properties”，PIEE, 103 C, 428/440 (1956)
- W. H. Kautz：“Transient Synthesis in the Time Domain” IRE Trans. on CT (1954)
- C. V. Jakowatz, R. L. Shuey and G. M. White：“Adaptive Waveform Recognition”，4 th International Symp. on Information Theory, London (1960)
- M. J. Hinich：“A Model for a Self-Adapting Filter”，Information and Control, Vol. 5, 185/203 (1962)
- C. W. Helstrom：“Statistical Theory of Signal Detection”，Pergamon Press (1960)

□ 付 録 □

代表的な直交関数系をあげてみる。定義域は $[0, \infty)$ である。

(i) ラゲール直交関数系

$$\phi_n(t) = L_n(t) e^{-\frac{t}{2}} \quad (\text{A} \cdot 1)$$

ここで， $L_n(t) = 1 - \binom{n}{1}t + \binom{n}{2}\frac{t^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{t^n}{n!}$

ラプラス変換すると，

$$\phi_n(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2}} \left(\frac{s - \frac{1}{2}}{s + \frac{1}{2}} \right)^n \quad (\text{A} \cdot 2)$$

なおつぎの関係がある。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t) = \delta(t) \quad (\text{A} \cdot 3)$$

(ii) Circular Equi- α 系 この関数系はく形波のように原点以外の点で急激な変化をする波形の近似に利用される。

Fig. A.1 Pole location of circular equi- α set

s 平面の左半面で半径 $\alpha \doteq \sqrt{2}^n/T$ の半円周上に極をもつ関数系である。ここで n は極の数、 T は原点以外の不連続点の時刻である。一例として半径 $\alpha=1+\sqrt{5}$ とし、実数部を整数とする極をもつように決める。極の配置を Fig. A・1 に示す。

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} s_1 \\ \bar{s}_1 \end{matrix} \right\} &= -1 \pm 3.07771 i \\ \left. \begin{matrix} s_2 \\ \bar{s}_2 \end{matrix} \right\} &= -2 \pm 2.54405 i \\ \left. \begin{matrix} s_3 \\ \bar{s}_3 \end{matrix} \right\} &= -3 \pm 1.21328 i \end{aligned}$$

ここで $i^2 = -1$

この場合の不連続点の時刻は $t \doteq 2.5$ である。さらに s 平面での直交関数系はつぎのようである。

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} \Phi_1(s) \\ \Phi_2(s) \end{matrix} \right\} &= \sqrt{2} \frac{s \pm \alpha}{(s+1)^2 + \beta_1^2} \\ \left. \begin{matrix} \Phi_3(s) \\ \Phi_4(s) \end{matrix} \right\} &= \sqrt{4} \frac{s \pm \alpha}{(s+1)^2 + \beta_1^2} \cdot \frac{(s-1)^2 + \beta_1^2}{(s+2)^2 + \beta_2^2} \\ \left. \begin{matrix} \Phi_5(s) \\ \Phi_6(s) \end{matrix} \right\} &= \sqrt{6} \frac{s \pm \alpha}{(s+1)^2 + \beta_1^2} \cdot \frac{(s-1)^2 + \beta_1^2}{(s+2)^2 + \beta_2^2} \cdot \frac{(s-2)^2 + \beta_2^2}{(s+3)^2 + \beta_3^2} \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 4)$$

ただし、 $\alpha = 1 + \sqrt{5}$

$$\beta_1^2 = 9.472136$$

$$\beta_2^2 = 6.472136$$

$$\beta_3^2 = 1.472136$$

(iii) 減衰三角波直交系 フーリエ直交系の極の位置を s -平面上で左へ移動させたもので $1/2$ だけ移動した場合の一例を示すとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \Phi_1(s) &= \frac{\sqrt{2} s}{s^2 + s + \frac{5}{4}} \\ \Phi_2(s) &= \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{s^2 + s + \frac{5}{4}} \\ \Phi_3(s) &= \frac{\sqrt{2} s}{s^2 + s + \frac{5}{4}} \cdot \frac{s^2 - s + \frac{5}{4}}{s^2 + s + \frac{17}{4}} \\ \Phi_4(s) &= \frac{\sqrt{\frac{17}{2}}}{s^2 + s + \frac{5}{4}} \cdot \frac{s^2 - s + \frac{5}{4}}{s^2 + s + \frac{17}{4}} \\ \Phi_5(s) &= \frac{\sqrt{2} s}{s^2 + s + \frac{5}{4}} \cdot \frac{s^2 - s + \frac{5}{4}}{s^2 + s + \frac{17}{4}} \cdot \frac{s^2 - s + \frac{17}{4}}{s^2 + s + \frac{37}{4}} \\ \Phi_6(s) &= \frac{\sqrt{\frac{37}{2}}}{s^2 + s + \frac{5}{4}} \cdot \frac{s^2 - s + \frac{5}{4}}{s^2 + s + \frac{17}{4}} \cdot \frac{s^2 - s + \frac{17}{4}}{s^2 + s + \frac{37}{4}} \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 5)$$

(iv) 変形ルジャンドル多項式系 ルジャンドル多項式,

$$p_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (\text{A} \cdot 6)$$

$$\int_{-1}^1 p_m(t) p_n(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases} \quad (\text{A} \cdot 7)$$

(A・6) 式で積分範囲を $[0, \infty)$ に変換すると (A・7) 式は,

$$\begin{aligned} &\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} p_m(2e^{-\alpha t} - 1) p_n(2e^{-\alpha t} - 1) dt \\ &= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2n+1} & m = n \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 8)$$

となる。

いま,

$$\phi_n(t) = \sqrt{\alpha(2n+1)} e^{-\frac{\alpha t}{2}} p_n(2e^{-\alpha t} - 1) \quad (\text{A} \cdot 9)$$

とすれば、正規直交系となり、

$$\Phi_n(s) = \sqrt{\alpha(2n+1)} \cdot \frac{\left(s - \frac{\alpha}{2}\right) \left(s - \frac{3\alpha}{2}\right) \cdots \left(s - \frac{2n-1}{2}\alpha\right)}{\left(s + \frac{\alpha}{2}\right) \left(s + \frac{3\alpha}{2}\right) \cdots \left(s + \frac{2n+1}{2}\alpha\right)} \quad (\text{A} \cdot 10)$$

が得られる。

以上の直交関数系により種々の波形の近似度をまとめたものがつぎの Table A である。

orthogonal set waveform	laguerre set	circular Equi- α set	damped Trigono- metric set	dimension
rectangular	7%	1%	11%
saw-tooth #1	1.8%	7.5%	0.73%
saw-tooth #2	9.2%	0.7%	20.3%
half-wave rectified	2.2%	5.4%	7.3%
sinusoidal	1.6%	7.3%	4.4%

Table A Goodness of approximation for various waveforms

なお展開係数はラゲール直交関数系に対しては8項まで、他は6項まで採っている。