計測のための狭帯域通過最適空間フィルタ

小 林 彬*・内 藤 正**

* 東京工業大学大学院 東京都目黒区大岡山 1-12-1

** 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 1-12-1

(昭和 43 年 10 月 21 日受付)

Narrow-Band-Pass Optimal Spatial Filter for Measurement

Akira KOBAYASHI* and Masashi NAITOO**

(* Tokyo Institute of Technology, Graduate School, Meguro-ku, Tokyo)
(** Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo)

(Received October 21, 1968)

In the velocity measurement using spatial filter, the parallel-slit forms a kind of narrow-band-pass spatial filter, and its selectivity is defined by the ratio of center frequency to frequency width about spatial frequency characteristics. And it is desirable that the selectivity is as large as possible.

In this paper, from the above point of view, the problem of the narrow-band-pass optimal spatial filter is considered.

The optimal problem is to maximize the selectivity for the fixed slit-number N , with which the frequency width is defined like a standard deviation of frequency characteristics.

It is shown that this problem is equivalent to minimizing the quadratic form about a certain matrix A , and its solution is the eigen vector corresponding to the minimum eigen value of matrix A .

Besides, the change of the selectivity is discussed when the random error exists in realizing the weighting function as a spatial filter.

1. ま え が き

最近さまざまな分野で空間パターンなどの空間情報を空間的に処理する方法が開発されつつある^{1),2)}。

一般に空間フィルタリングと呼ばれるものであるが、計測の分野でも速度計測などにおいてこの種の手法が用いられている^{3),4)}。

空間フィルタは時間的フィルタに比べ、因果律の要請を受けない。したがってかなり任意の重み関数を実現することができる。また實際上その大きさが限定されるために有限整定なフィルタになっているなどの特徴をもっている。

速度計測の場合にはスリット列が空間フィルタになっていてその狭帯域通過特性が計測原理上本質的役割を果たしている⁴⁾。

この場合空間フィルタの選択度 Q をなるべく大きくすることが望ましい。スリット個数 N を大きくして

も Q を増加させることができるが、一定の N に対し最大の Q を与える空間フィルタを構成しておくことがより効果的である。

小川、磯道両氏は n 次元空間フィルタの最適特性を低域フィルタの場合につき一般的に考察しており、空間フィルタの広がりや低域特性の広がりとの間に1種の不確定性関係が成立することを指摘している⁵⁾。

本論文ではスリット列を一般化した形、すなわち N 個のスリットのそれぞれに $w_1, w_2, \dots, w_N$ の重みを掛けたものとして狭帯域通過空間フィルタを考え、 Q を最大にするには $w_1, w_2, \dots, w_N$ をどのように決めればよいかという最適問題を考察した。

Q は帯域通過特性の広がり $\Delta\mu$ に逆比例するものとして定義されるが、 $\Delta\mu$ を小川氏らと同じような式で与えると $(\Delta\mu)^2$ はある特定の行列 A の $w_1, w_2, \dots, w_N$ に関する2次形式として表わされ、最適問題は A の最小固有値とそれに対応する固有ベクトルを求める

ことに帰着される。

実際に固有値問題をといた結果と、その場合の狭帯域通過特性につき述べ、さらに求められた $w_1, w_2, \dots, w_N$ にあるランダムな誤差が混入した場合それが Q におよぼす影響を説明する。

なお低域フィルタの場合、小川氏らは空間領域が無限の場合と有限の場合のそれぞれにつき最適フィルタを求めている。帯域通過フィルタの場合、空間領域が無限のとき解は明らかであり考察の必要はない。

2. 狭帯域通過 (Narrow-Band-Pass) 空間フィルタ

空間フィルタという用語は種々の分野で用いられているがここでは速度計測に利用されている形のもの、すなわち Fig. 1 に示すような系における空間的に広がった重み関数 $h(x, y)$ をさすものとする。

Fig. 1 Schematic model of spatial filtering

2.1 空間フィルタの帯域通過特性

上のような空間フィルタの一般的特性はすでに筆者らにより考察されており、その要点を以下に述べる⁴⁾。

対象を $f(x, y)$ とし、 $h(x, y)$ は x 方向に X , y 方向に L の広がりをもつとすると、検出される信号の瞬時値 $g(x_0, y_0)$ は次式で与えられる。

$$g(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{x_0+X} dx \int_{y_0}^{y_0+L} dy f(x, y) h(x-x_0, y-y_0) \quad (1)$$

$$x_0 = Vt + c_1$$

$$y_0 = c_2$$

(c_1, c_2 は対象と空間フィルタの相対的位置関係を示す定数)

対象は x 軸の方向に V の速度で運動しているがこの場合得られる信号のパワースペクトル密度関数 $\Omega(f)$ は、

$$\Omega(f) = \frac{1}{V} \Psi\left(\frac{f}{V}\right) \quad (2)$$

$$\Psi(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mu, \nu) |H(\mu, \nu)|^2 d\nu \quad (3)$$

$$H(\mu, \nu) = \int_0^L dy \int_0^X dx h(x, y) e^{-j2\pi(\mu x + \nu y)} \quad (4)$$

$H(\mu, \nu)$: 対象の 2 次元的 パワースペクトル密度関数

f : 時間的周波数, μ, ν : x, y 軸についての空間周波数

で与えられ $H(\mu, \nu)$ が空間フィルタによるフィルタリング効果を表わしている。

$h(x, y)$ が方向に一樣な場合は、

$$h(x, y) = h_1(x) h_2(y) \quad (5)$$

$$h_2(y) = \text{const.} = 1 \quad 0 \leq y \leq L$$

$$= 0 \quad \text{otherwise} \quad (6)$$

$h_1(x)$: x 方向のみの変化を表わす関数で

$$h_1(x) = 0 \quad \text{for } x < 0, x > X$$

と書けるので $|H(\mu, \nu)|^2$ は (4) ~ (6) より、

$$|H(\mu, \nu)|^2 = L^2 \left(\frac{\sin \pi \nu L}{\pi \nu L} \right)^2 \left| \int_0^X h_1(x) e^{-j2\pi \mu x} dx \right|^2 \quad (7)$$

と求められる。

L がある程度以上大きいときは $(\sin \pi \nu L / \pi \nu L)^2$ は $\nu = 0$ の付近のみで顕著な値をとり他では非常に小さい値となるので $\Phi(\mu, \nu)$ が $\nu = 0$ の付近で ν に関しほとんど変化しないと仮定すると (3) 式の $\Psi(\mu)$ は次式で与えられる。

$$\Psi(\mu) \doteq \Phi(\mu, 0) L |H_X(\mu)|^2 \quad (8)$$

$$H_X(\mu) = \int_0^X h_1(x) e^{-j2\pi \mu x} dx \quad (9)$$

したがって本質的フィルタリング特性は $h_1(x)$ の関数形で決められるということが出来る。

以上のことから狭帯域通過形の空間フィルタを構成するには $|H_X(\mu)|^2$ が特定の空間周波数 μ_0 の所に単峰で急峻なピークをもつように $h_1(x)$ を決定すればよいことがわかるがこのことは $h_1(x)$ が x についてなんらかの意味での周期性をもつことを要求するものである。

そこで $h_1(x)$ は $0 \leq x \leq p$ 以外では 0 である任意の関数 $h_p(x)$ により次式で与えられるものとする。

$$h_1(x) = \sum_{k=1}^N w_k h_p(x - (k-1)p) \quad (10)$$

ただし、 $X = Np$, N : 正整数

この場合 $H_X(\mu)$ は、

$$H_X(\mu) = \int_0^p h_p(x) e^{-j2\pi \mu x} dx \sum_{k=1}^N w_k e^{-j2\pi \mu (k-1)p} \quad (11)$$

よって $|H_X(\mu)|^2$ は、

$$|H_X(\mu)|^2 = |H_p(\mu)|^2 \cdot |H_N(\mu)|^2 p^2 \quad (12)$$

$$\text{ただし, } H_p(\mu) = \int_0^p \frac{h_p(x)}{p} e^{-j2\pi\mu x} dx \quad (13)$$

$$H_N(\mu) = \sum_{k=1}^N w_k e^{-j2\pi\mu(k-1)p} \quad (14)$$

となる。

Schwartz の不等式より,

$$|H_N(\mu)|^2 \leq |H_N|^2 \quad (15)$$

また,

$$|H_N(\mu)|^2 = \left| H_N\left(\mu + \frac{1}{p}\right) \right|^2 \quad (16)$$

が成立する。

したがって $|H_N(\mu)|^2$ は一般に $\mu=0, \pm 1/p, \pm 2/p, \dots$ に最大のピークをもつような選択特性を実現する。

さらに $|H_p(\mu)|^2$ は一般に低域特性をもたらすものであるが, 特に $h_p(x)$ が Fig. 2 に示されるような関数形の場合は,

$$\left. \begin{aligned} h_p(x) &= 1 & 0 \leq x < p/3 \\ &= -1 & p/2 \leq x < (5/6)p \\ &= 0 & \text{otherwise} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Fig. 2 An example of function $h_p(x)$

$$|H_p(\mu)|^2 = \left(\frac{\sin \pi\mu p/3}{\pi\mu p} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi p\mu}{2} \quad (18)$$

となりこれは Fig. 3 に示される空間周波数特性をもっており, $|H_N(\mu)|^2$ がもたらすピークのうち $\mu = \pm 1/p$ の所のピークのみを選択し他のピークを除去するような作用をする* (以下においては $h_p(x)$ が Fig.

Fig. 3 Spatial frequency characteristics of $|H_p(\mu)|^2$

2 の関数形をもつものとする)。

以上に述べたことから非常によい近似で単峰性の帯域通過特性をもつ空間フィルタが実現されることになるが, さらに $|H_N(\mu)|^2$ のピークがある程度急峻なものであれば, 実際上のフィルタリング特性は $|H_N(\mu)|^2$ の $1/2p \leq \mu \leq 3/2p$ の範囲で代表できる。

すなわち,

$$|H_X(\mu)|^2 \doteq K |H_N(\mu)|^2 \text{ for } \frac{1}{2p} \leq \mu \leq \frac{3}{2p} \quad (19)$$

$$= 0 \quad \text{otherwise}$$

K : 比例定数

2.2 空間フィルタの選択度

空間フィルタ特性の定量的評価を行なうために選択度 Q の概念を導入する。

Q は一般に, フィルタが選択する周波数の帯域通過特性の広がり $\Delta\mu$ に対する比として定義されるが, $\Delta\mu$ の与え方として半値幅と小川氏らが用いているようなものとの 2 種類がある^{5), 8)}。

ここでは小川氏らが用いたものに似た形すなわち,

$$(\Delta\mu)^2 = \frac{\int_0^\infty \left(\mu - \frac{1}{p} \right)^2 |H_X(\mu)|^2 d\mu}{\int_0^\infty |H_X(\mu)|^2 d\mu} \quad (20)$$

で $\Delta\mu$ を与える**。

(19) 式を考慮すれば (20) 式は次式で近似できる。

$$(\Delta\mu)^2 \doteq \frac{\int_{1/2p}^{3/2p} \left(\mu - \frac{1}{p} \right)^2 |H_N(\mu)|^2 d\mu}{\int_{1/2p}^{3/2p} |H_N(\mu)|^2 d\mu} \quad (21)$$

したがって Q は,

$$Q = \frac{1/p}{\Delta\mu} \quad (22)$$

と定義されるが $|H_N(\mu)|^2$ の μ を $1/p$ で規格化した関数を $|N(\xi)|^2$ とすると,

$$|H_N(\mu)|^2 \xrightarrow{\xi = \mu p} |N(\xi)|^2 \quad (23)$$

(21) 式は,

$$(\Delta\mu)^2 = \frac{\left(\frac{1}{p} \right)^2 \int_{1/2}^{3/2} (\xi - 1)^2 |N(\xi)|^2 d\xi}{\int_{1/2}^{3/2} |N(\xi)|^2 d\xi} \equiv \frac{1}{p^2} (\Delta\xi)^2 \quad (24)$$

$$\therefore \frac{1}{Q^2} = \frac{\int_{1/2}^{3/2} (\xi - 1)^2 |N(\xi)|^2 d\xi}{\int_{1/2}^{3/2} |N(\xi)|^2 d\xi} \equiv (\Delta\xi)^2 \quad (25)$$

$\Delta\xi$: 規格化された帯域通過特性の広がり
と書き直せる。

2.3 スリット列の空間周波数特性と Q

* $h_p(x)$ としてもっとよい関数形をえらべばこのような状況をより完全実現できるであろう。

** これは光学分野の effective spectral width の概念にも共通した定義である⁹⁾。

以上に得られた基準に則ってスリット列の空間周波数特性と Q を計算してみると次のようになる。

スリット列の場合は $w_1=w_2=\dots=w_N=1$ であるから (14) 式より、

$$\left| H_N(\mu) \right|_1^2 = \left(\frac{\sin N\pi\mu p}{\sin \pi\mu p} \right)^2 \quad (26)$$

(添字1はスリット列に関することを意味する)

(26) 式で $N=5, 10, 50$ としたときの空間周波数特性を示したものが Fig. 4 である。

また (25) 式にしたがって Q を計算した結果が Fig. 5 である。

Fig. 4 Spatial frequency characteristics of $|H_N(\mu)|_1^2$

Fig. 5 Selectivity of spatial filter (1)

N に対する Q の関係を Fig. 5 から求めてみるとかなり良い近似で次式が成立していることがわかる。

$$Q_1 \doteq 3.77\sqrt{N} \quad (27)$$

3. 選択度 Q を上げる一方法

電氣的共振フィルタ、メカニカルフィルタなど他のフィルタで選択度を上げようとする場合、同じ特性のフィルタを多段に使用することがよく行なわれる。

ここでは空間フィルタの Q を上げるために上のことに対応したものを考え、しかもそれと等価な特性をもつフィルタを1つの空間フィルタで構成することを考察する。

(14) 式から明らかなように $|H_N(\mu)|^2$ を考えてい

る範囲内では $f(x)$ という入力を (26) 式という特性をもつ空間フィルタに通した後の出力 $g_1(x)$ は次式で与えることができる。

$$g_1(x) = \sum_{k=1}^M f(x - (k-1)p) \quad (28)$$

(ここでは (26) 式の N を M としている)

さらにもう一度同じ特性のフィルタに通した後の出力を $g_2(x)$ とすれば、

$$g_2(x) = \sum_{k=1}^M g_1(x - (k-1)p) \quad (29)$$

このような操作を l 回行なった後の出力を $g_l(x)$ とすると、

$$g_l(x) = \sum_{k=1}^M g_{l-1}(x - (k-1)p) \quad (30)$$

と書き表わせ1つの漸化式が得られる。

(28) 式を考慮して上の漸化式をとけば $g_l(x)$ を $f(x)$ で表わすことができるが、それは一般に次の形をしている。

$$g_l(x) = \sum_{k=1}^N w_k f(x - (k-1)p) \quad (31)$$

$$N = (M-1)l + 1$$

w_k は M と l に依存し一般的に表示するのは困難であるので、ここでは 2, 3 の数値例をあげる。

(i) $M=M, l=2, N=2M-1$

$$w_k = w_{N+1-k} = k, \quad k=1, 2, \dots, M \quad (32)$$

(ii) $M=6, l=3, N=16$

$$w_1=w_{16}=1, \quad w_2=w_{15}=3, \quad w_3=w_{14}=6$$

$$w_4=w_{13}=10, \quad w_5=w_{12}=15, \quad w_6=w_{11}=21$$

$$w_7=w_{10}=25, \quad w_8=w_9=27 \quad (33)$$

(iii) $M=3, l=6, N=13$

$$w_1=w_{13}=1, \quad w_2=w_{12}=6, \quad w_3=w_{11}=21$$

$$w_4=w_{10}=50, \quad w_5=w_9=90, \quad w_6=w_8=126$$

$$w_7=141 \quad (34)$$

この種の空間フィルタのフィルタリング特性を計算してみると、(28), (30) 式の両辺をラプラス変換して、

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \sum_{k=1}^M F(s) e^{-(k-1)PS} \\ &= \frac{1-e^{-MPS}}{1-e^{-PS}} F(s) \end{aligned} \quad (35)$$

$$G_l(s) = \frac{1-e^{-MPS}}{1-e^{-PS}} G_{l-1}(s) \quad (36)$$

$$\therefore G_l(s) = \left(\frac{1-e^{-MPS}}{1-e^{-PS}} \right)^l F(s) \quad (37)$$

となっている。

したがって、

$$\left| H_N(\mu) \right|_2^2 = \left(\frac{\sin M\pi\mu p}{\sin \pi\mu p} \right)^{2l} \quad (38)$$

が求めるフィルタリング特性である。

Fig. 6 Selectivity of spatial filter (2)

(38) 式の特性につき N に対する Q の変化を l をパラメータとして示したものが Fig. 6 である。

Fig. 6 をみると $l=2$ のものが同じ N に対して最大の Q を実現していることがわかる。また $l=2$ の場合の選択度を Q_2 とすると Q_2 は近似的に次式を満足している。

$$Q_2 \doteq 1.783 N + 1.966 \quad (39)$$

(39) 式を (27) 式に比較してみると特に N が大きい所より Q が改善されており、大きな Q を実現するには (32) 式のような重みをつけることが有効であることがわかる。

なお Fig. 7 に $l=2$ の場合、 $N=9, 15, 31$ に対する空間周波数特性を示した。

Fig. 7 Spatial frequency characteristics of $|H_N(\mu)|^2$

4. 狭帯域通過最適空間フィルタ

本章では前章で取扱った問題をさらに一般的に考察し一定の N に対して最大の Q を与える狭帯域通過最適空間フィルタの構成法を述べる。

この問題は空間フィルタの実質的フィルタリング特性が (19) 式で代表され、かつ Q が (25) 式で定義されていることから次のように述べる事ができる。

“ $N_N(\mu)$ が (14) 式で与えられるとき、(25) 式か

ら計算される Q を最大にするように $w_1, w_2, \dots, w_N$ ” を求めよ”。

(14) 式, (23) 式より $|N(\xi)|^2$ は,

$$\begin{aligned} |N(\xi)|^2 &= \left| \sum_{k=1}^N w_k e^{-j2\pi(k-l)\xi} \right|^2 \\ &= \sum_k \sum_l w_k w_l e^{-j2\pi(k-l)\xi} \\ &= \sum_{k=1}^N w_k^2 + \sum_{k \neq l} w_k w_l \cos \{2\pi(k-l)\xi\} \quad (41) \end{aligned}$$

また $|N(\xi)|^2$ が周期 1 の周期関数でかつ偶関数であることを考慮すると (25) 式は,

$$\frac{1}{Q^2} = \frac{\int_0^{1/2} \xi^2 |N(\xi)|^2 d\xi}{\int_0^{1/2} |N(\xi)|^2 d\xi} \quad (42)$$

と変形できる。

さらに (41) 式より,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} |N(\xi)|^2 d\xi &= \int_0^{1/2} \left(\sum_{k=1}^N w_k^2 \right) d\xi + \sum_{k \neq l} w_k w_l \int_0^{1/2} \cos \{2\pi(k-l)\xi\} d\xi \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N w_k^2 \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \xi^2 |N(\xi)|^2 d\xi &= \int_0^{1/2} \xi^2 \left(\sum_{k=1}^N w_k^2 \right) d\xi + \sum_{k \neq l} w_k w_l \int_0^{1/2} \xi^2 \cos \{2\pi(k-l)\xi\} d\xi \\ &= \frac{1}{24} \sum_{k=1}^N w_k^2 + \sum_{k \neq l} w_k w_l \frac{\cos \pi(k-l)}{4\pi^2(k-l)^2} \\ &= \frac{1}{24} \sum_{k=1}^N w_k^2 + \sum_{k \neq l} w_k w_l \frac{(-1)^{k-l}}{4\pi^2(k-l)^2} \quad (44) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{Q^2} = \frac{\frac{1}{12} \sum_{k=1}^N w_k^2 + \sum_{k \neq l} w_k w_l \frac{(-1)^{k-l}}{2\pi^2(k-l)^2}}{\sum_{k=1}^N w_k^2} \quad (45)$$

(45) 式より Q は $w_1, w_2, \dots, w_N$ の値そのものでなくそれらの間の比によって決められるものであることがわかる。そこで本質的条件ではないが以下のような規格化条件,

$$\sum_{k=1}^N w_k^2 = 1 \quad (46)$$

を考える。

(46) 式を (45) 式に代入すると,

$$\frac{1}{Q^2} = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^N w_k^2 + \sum_{k \neq l} w_k w_l \frac{(-1)^{k-l}}{2\pi^2(k-l)^2} \quad (47)$$

(47) 式の右辺は $w_1, w_2, \dots, w_N$ に関する斉次 2 次形式になっている。

記法の簡単化のために次の縦ベクトル $\mathbf{W}$ と行列 $\mathbf{A}$ を導入する。

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{A} = (a_{lk}) \quad (49)$$

$$\begin{cases} a_{lk} = \frac{(-1)^{l-k}}{2\pi^2(l-k)^2}, & l \neq k \\ a_{ll} = \frac{1}{12} & (l, k=1, 2, \dots, N) \end{cases}$$

$$\mathbf{W}^T: \mathbf{W} \text{ の転置ベクトル} \quad (50)$$

これらの記法を用いると (47) 式は,

$$\frac{1}{Q^2} = \mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{W} \quad (51)$$

(46) 式は,

$$\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{W} = 1 \quad (52)$$

以上から問題を次のようにいい直すことができる.

“(52) 式の条件のもとで行列 $\mathbf{A}$ に関する 2 次形式 (51) 式を最小にする $\mathbf{W}$ を求めよ”.

ここで行列 $\mathbf{A}$ の性質を調べてみると $\mathbf{A}$ は正値実対称行列であることがわかる.

【証明】 (49) 式より明らかに $\mathbf{A}$ は実対称行列である. また (44) 式より任意の $\mathbf{W}$ に対して,

$$\mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{W} = \int_0^{1/2} \xi^2 |N(\xi)|^2 d\xi \geq 0 \quad (53)$$

が成立するから, $\mathbf{A}$ は少なくとも非負である. さらに (53) において等号は,

$$|N(\xi)|^2 = 0, \text{ for } 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \quad (54)$$

が満足されているときにのみ成立するが (41) 式より (54) 式が満足されるのは $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ のときだけである.

したがって $\mathbf{A}$ は正値である. (証明終)

$\mathbf{A}$ が正値実対称行列であればある直交変換 $\mathbf{T} = (t_{kl})$ が存在して, これにより 2 次形式 $\mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{W}$ は標準形に変換される^{10), 11)}.

$$\mathbf{W} = \mathbf{T} \mathbf{U}, \mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1} \quad (55)$$

$$\mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{W} = \mathbf{U}^T \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{U} \quad (56)$$

$$\text{ここで, } \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{B} \quad (57)$$

とすると $\mathbf{B}$ は対角行列で, その対角要素は $\mathbf{A}$ の固有値になっている.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_N \end{pmatrix} \quad (58)$$

$\lambda_k, k=1, 2, \dots, N; \mathbf{A}$ の固有値

($\mathbf{A}$ の性質より $\lambda_k > 0$)

また (55) 式より

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^T \mathbf{W} &= \mathbf{U}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^T \mathbf{E} \mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^T \mathbf{U} = 1 \end{aligned} \quad (59)$$

が成立している.

したがって (51), (56), (57), (58) 式から,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q^2} &= \mathbf{U}^T \mathbf{B} \mathbf{U} \\ &= \sum_{k=1}^N \lambda_k u_k^2 \end{aligned} \quad (60)$$

ただし, $\mathbf{U}^T = (u_1, u_2, \dots, u_N)$

となり問題は (59) 式の条件の下で (60) 式を最小にする $\mathbf{U}$ を求めることに帰着された.

$$\lambda_i = \min(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \quad (61)$$

とすると (60) 式を最小にするには,

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} \quad (62)$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_k = 0, & k \neq i \\ \tilde{u}_i = 1 \end{cases}$$

($\tilde{u}_i = -1$ でもよいが符号は本質的でなくここでは 1 を採用する)

とすればよいことは明らかである.

以上から Q を最大にする $\mathbf{W}$, $\tilde{\mathbf{W}}$ は次式のように決めればよい.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}} &= \mathbf{T} \tilde{\mathbf{U}} \\ \therefore \tilde{w} &= t_{ki}, \quad k=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (63)$$

	N= 8	N=14	N=20	N=24	N=28
W 1	0.145 9	0.067 4	0.040 5	0.031 1	0.024 9
W 2	9.299 2	0.143 8	0.087 4	0.067 3	0.053 9
W 3	0.410 0	0.211 6	0.130 9	0.101 5	0.081 5
W 4	0.470 2	0.270 7	0.172 0	0.134 4	0.108 5
W 5	0.470 2	0.317 1	0.208 9	0.164 9	0.134 0
W 6	0.410 0	0.349 5	0.241 1	0.192 9	0.158 0
W 7	0.299 2	0.366 0	0.267 8	0.217 8	0.180 0
W 8	0.145 9	0.366 0	0.288 4	0.239 1	0.200 0
W 9		0.349 5	0.302 4	0.256 6	0.217 5
W10		0.317 1	0.309 5	0.270 0	0.232 5
W11		0.270 7	0.309 5	0.179 1	0.244 7
W12		0.211 6	0.302 4	0.283 6	0.253 9
W13		0.143 8	0.288 4	0.283 6	0.260 2
W14		0.067 4	0.267 8	0.279 1	0.263 3
W15			0.241 1	0.270 0	0.263 3
W16			0.208 9	0.256 6	0.260 2
W17			0.172 0	0.239 1	0.253 9
W18			0.130 9	0.217 8	0.244 7
W19			0.087 4	0.192 9	0.232 5
W20			0.040 5	0.164 9	0.217 5
W21				0.134 4	0.200 0
W22				0.101 5	0.180 0
W23				0.067 3	0.158 0
W24				0.031 1	0.134 0
W25					0.108 5
W26					0.081 5
W26					0.053 9
W28					0.024 9

Table 1: Obtained weight distribution for narrow-band-pass optimal spatial filter

(63) 式は直交変換 T の第 i 列であるがこれは λ_i に対応する固有ベクトルである¹⁰⁾.

したがって求める“最適な W は A の最小固有値に対応する固有ベクトルである”.

またこの場合最大の Q , $Q_{\max}$ は (60), (61), (62) 式より,

$$Q_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$$

λ_i : A の最小固有値

(49) 式で与えられる行列 A につきデジタル計算機で実際に解を求めた結果のいくつかを Table 1 に示す.

Fig. 8 Selectivity of narrow-band-pass optimal spatial filter

Fig. 9 Spatial frequency characteristics of narrow-band-pass optimal spatial filter

Fig. 8 は N に対する最適空間フィルタの選択度 Q_s の変化をグラフにしたものでかなりよい近似で次式を満足している.

$$Q_s \approx 2.000N + 1.532 \quad (65)$$

また Fig. 9 は $N=8, 14, 28$ のときの最適空間フィルタの空間周波数特性である.

5. $\tilde{w}_k$ の誤差が Q におよぼす影響

前章において最適な重み $\tilde{W}$, すなわち $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_N$ が求められたが, 実際にはこのような空間フィルタは速度計測の場合のように透過率の分布をもった特定のパターン, あるいは空間的に配置された検出器の感度の調整などにより実現されるもので $\tilde{w}_k$ にはなんらかのランダムな誤差が混入することは避けられない.

したがって目的とする選択度が大幅に減少してしまい最適な空間フィルタを作ることの意味がなくなってしまう場合もあり得る.

本章では上の観点から $\tilde{w}_k$ にランダムな誤差がはいった場合にそれが Q にどの程度の影響をおよぼすかを考察する.

$\tilde{W}$ に次のようなランダムベクトル ΔW が誤差としてはいったとする.

$$W' = \tilde{W} + \Delta W \quad (66)$$

$$E\{\Delta w_k\} = 0 \quad (67)$$

$$E\{(\Delta w_k)^2\} = \epsilon^2, \quad 0 < \epsilon^2 \ll 1 \quad (68)$$

$$E\{\Delta w_k \Delta w_l\} = 0, \quad k \neq l \quad (69)$$

$$k, l = 1, 2, \dots, N$$

ここで先の直交変換 T を考えると (55) 式から,

$$\begin{aligned} \tilde{W} + \Delta W &= T(\tilde{U} + \Delta U) = T\tilde{U} + T\Delta U \\ &= \tilde{W} + T\Delta U \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta W = T\Delta U \quad (70)$$

$$\Delta U = T^{-1}\Delta W = T^T\Delta W \quad (71)$$

したがって,

$$\Delta u_k = \sum_{l=1}^N t_{lk} \Delta w_l \quad (72)$$

$$\therefore E\{\Delta u_k\} = \sum_{l=1}^N t_{lk} E\{\Delta w_l\} = 0 \quad (73)$$

$$(\Delta u_k)^2 = \sum_{l=1}^N t_{lk}^2 (\Delta w_l)^2 + \sum_{l \neq m} t_{lk} t_{mk} \Delta w_l \Delta w_m$$

$$\therefore E\{(\Delta u_k)^2\} = \sum_{l=1}^N t_{lk}^2 E\{(\Delta w_l)^2\} + \sum_{l \neq m} t_{lk} t_{mk} E\{\Delta w_l \Delta w_m\}$$

$$\{\Delta w_l \Delta w_m\} = \sum_{l=1}^N t_{lk}^2 \epsilon^2 = \epsilon^2 (\because T^T T = E) \quad (74)$$

以上のようなランダムな誤差に対して 2 乗平均の意味でどれだけ Q が変化するかは以下のように計算される.

いま,

$$\frac{1}{Q_{\max}^2} = (\Delta \xi)^2 = \tilde{U}^T B \tilde{U} \quad (75)$$

$$\frac{1}{(Q_{\max} + \Delta Q)^2} = (\Delta \xi')^2 = (\tilde{U} + \Delta U)^T B (\tilde{U} + \Delta U) \quad (76)$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 (\Delta\xi')^2 &= \tilde{U}^T B \tilde{U} + \tilde{U}^T B \Delta U + \Delta U^T B \tilde{U} + \Delta U^T B \Delta U \\
 &= (\Delta\tilde{\xi})^2 + \sum_{k=1}^N \lambda_k (2 \Delta u_k \tilde{u}_k + (\Delta u_k)^2) \quad (77)
 \end{aligned}$$

$$\therefore E\{(\Delta\xi')^2\} = (\Delta\tilde{\xi})^2 + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^N \lambda_k \quad (78)$$

また (77) 式より,

$$\begin{aligned}
 \Delta\xi' &\doteq \tilde{\Delta\xi} + \frac{1}{2 \Delta\tilde{\xi}} \sum_{k=1}^N \lambda_k (2 \Delta u_k \tilde{u}_k + (\Delta u_k)^2) \\
 &\quad - \frac{1}{4 (\Delta\tilde{\xi})^3} \left[\sum_{k=1}^N \lambda_k \{2 \Delta u_k \tilde{u}_k + (\Delta u_k)^2\} \right]^2 \quad (79)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \tilde{\Delta\xi} + \frac{1}{2 \Delta\tilde{\xi}} \sum_k \lambda_k \{2 \Delta u_k \tilde{u}_k + (\Delta u_k)^2\} \\
 &\quad - \frac{1}{4 (\Delta\tilde{\xi})^3} \sum_{k,l} \lambda_k \{2 \Delta u_k \tilde{u}_k + (\Delta u_k)^2\} \lambda_l \{2 \Delta u_l \tilde{u}_l + (\Delta u_l)^2\} \quad (80)
 \end{aligned}$$

$$\therefore E\{\Delta\xi'\} \doteq \tilde{\Delta\xi} + \frac{1}{2 \Delta\tilde{\xi}} \sum_{k=1}^N \lambda_k E\{(\Delta u_k)^2\}$$

$$\begin{aligned}
 &- \frac{1}{4 (\Delta\tilde{\xi})^3} E \left[\sum_{k=1}^N \lambda_k^2 \{4 (\Delta u_k)^2 (\tilde{u}_k)^2 + 4 (\Delta u_k)^3 \tilde{u}_k \right. \\
 &\quad \left. + (\Delta u_k)^4\} + \sum_{l \neq k} \lambda_l \lambda_k (\Delta u_l)^2 (\Delta u_k)^2 \right]
 \end{aligned}$$

3 次以上の微小項を無視すると,

$$\doteq \tilde{\Delta\xi} + \frac{1}{2 \Delta\tilde{\xi}} \varepsilon^2 \sum_{k=1}^N \lambda_k - \frac{\varepsilon^2}{(\Delta\tilde{\xi})^3} \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 (\tilde{u}_k)^2 \quad (81)$$

以上から,

$$\begin{aligned}
 E\{(\Delta\xi' - \Delta\tilde{\xi})^2\} &= E\{(\Delta\xi')^2\} - 2E\{\Delta\xi' \Delta\tilde{\xi}\} + (\Delta\tilde{\xi})^2 \\
 &\doteq (\Delta\tilde{\xi})^2 + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^N \lambda_k - 2(\Delta\tilde{\xi})^2 - \varepsilon^2 \sum_{k=1}^N \lambda_k \\
 &\quad + \frac{1}{(\Delta\tilde{\xi})^2} 2\varepsilon^2 \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 (\tilde{u}_k)^2 + (\Delta\tilde{\xi})^2 \\
 &= \frac{1}{(\Delta\tilde{\xi})^2} 2\varepsilon^2 \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 (\tilde{u}_k)^2 \quad (82)
 \end{aligned}$$

(62) 式を代入すると,

$$\begin{aligned}
 E\{(\Delta\xi' - \tilde{\Delta\xi})^2\} &\doteq \frac{1}{(\Delta\tilde{\xi})^2} 2\varepsilon^2 \lambda_i^2 \\
 &= 2\varepsilon^2 (\Delta\tilde{\xi})^2 \quad (83)
 \end{aligned}$$

(75), (76) 式より,

$$\begin{aligned}
 \Delta Q &= \frac{1}{\Delta\xi'} - \frac{1}{\Delta\tilde{\xi}} = \frac{\Delta\tilde{\xi} - \Delta\xi'}{\Delta\xi' \Delta\tilde{\xi}} \\
 &\doteq \frac{\Delta\tilde{\xi} - \Delta\xi'}{(\Delta\tilde{\xi})^2} \quad (84)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore E\{(\Delta Q)^2\} &\doteq \frac{1}{(\Delta\tilde{\xi})^4} E\{(\Delta\tilde{\xi} - \Delta\xi')^2\} \\
 &= \frac{1}{(\Delta\tilde{\xi})^4} \varepsilon^2 (\Delta\tilde{\xi})^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\varepsilon^2}{(\Delta\tilde{\xi})^2} \\
 &= 2\varepsilon^2 Q_{\max}^2 \quad (85) \\
 \sqrt{E\{(\Delta Q)^2\}} &= \sqrt{2} \varepsilon Q_{\max} \quad (86)
 \end{aligned}$$

したがって 2 乗平均的には $Q_{\max}$ の相対誤差は $\tilde{w}_k$ を実現するときの相対誤差と同じ程度であることがわかる。

6. あとがき

狭帯域通過空間フィルタの選択度を上げることが目的として最適空間フィルタの問題を考察した。

また重みをつけることによって得られる最適空間フィルタを実現するとき重み関数に入る誤差が選択度におよぼす影響を解析し、フィルタを設計するさいに必要な基礎的資料を提供した。

本論文では、速度計測に用いられているスリット列を中心に議論をすすめたが、ここに求められた重み関数は透過率の分布のみならず空間的に配置された検出器の感度調整など種々の手段で実現できるもので、それぞれに応じた応用が考えられる。

スペクトル分析への応用などがその一例であるがそれらは今後の問題である。

謝 辞

この研究に対して、懇切なご支援、ご助言を賜った東京工業大学石神政司氏、航空宇宙技術研究所狼嘉彰氏に心からお礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) W. D. Montgomery, P. W. Broome: Spatial Filtering, J. O. S. A. 52-11, 1259/1275 (1962)
- 2) A. V. Lugt: Signal Detection by Complex Spatial Filtering, IEEE. Trans. IT-10, April, 139/145 (1964)
- 3) J. T. Ator: Image-Velocity Sensing with Parallel-Slit Reticles, J. O. S. A., 53-12, 1416/1422 (1963)
- 4) 内藤, 小林, 狼: 空間フィルタによる速度計測, 計測と制御, 7-11, 761/772 (1968)
- 5) 小川, 磯道: 最適 n 次元空間フィルタ (Low-Pass の場合), 電子通信学会論文誌, 51-C-8, 351/358 (1968)
- 6) 小林: 非接触速度計測のための新しい空間フィルタ, 第 15 回応物関係連合講演会予稿集, 1, p. 258 (1968)
- 7) 内藤, 小林: デジタルフィルタによるスペクトル密度の推定, 第 11 回自動制御連合講演会予稿集, 239/240 (1968)
- 8) 川上正光: 電子回路 I, 共立全書 (1953)
- 9) M. Born, E. Wolf: Principles of Optics, p. 540. Pergamon Press
- 10) 遠山啓: 行列論, 共立全書 (1952)
- 11) エリ・ア・リュステルニクほか: 現代応用数学ハンドブック, 4, 総合図書 (1967)