時間離散系の入力可観測性および 線形動的系の若干の性質†

関 口 隆

横浜国立大学工学部 横浜市南区大岡町 702

(昭和 43 年 8 月 28 日受付)

Input Observability of Time-Discrete Systems and Some Properties of Linear Dynamical Systems

Takashi SEKIGUCHI

(Faculty of Engineering, Yokohama National University)

(Received August 28, 1968)

The measuring systems must be expressed by differential or difference equations and treated as dynamical systems, when the frequency ranges of the measuring systems cannot cover enough those of the measured values.

This paper shows first the necessary conditions and the necessary and sufficient conditions for the input observability of the linear time-discrete systems.

Comparing the conditions of controllability and observability, the analogy between the time-continuous systems and the time-discrete systems are pointed out, concerning state controllability, state observability and output controllability. The principle of duality holds about the state values. It does not hold in general about the input and the output values. But the systems with one input or one output keep the principle of duality.

The time-discrete systems do not provide the sufficient informations with controllability and observability without the some numbers (n) of sampling and observation. But the time-continuous systems contain the same informations for only a little interval.

When we discretize the time-continuous systems, the controllability and observability of the time-continuous systems are the necessary conditions for those of the time-discrete systems. If we do not choose the proper sampling period when discretizing, we lose the controllability and observability. The rank of the linear coefficient matrix combining the time-continuous system with the time-discrete systems must be proper.

The condition which is very similar to the necessary and sufficient condition for the state observability is merely the necessary condition for the input observability.

1. はじめに

通常測定器の周波数幅は、観測される現象が含む周波数幅より十分大きいとして解析される。また実験にさいして測定器を選定するときは、被測定量の周波数幅より広い周波数幅をもつものを選ぶようにする。このような条件を満足するときの観測方程式は、線形代

数方程式となる。しかし上述の条件はつねに満たされるわけではない。もし測定器の周波数幅と被測定量の周波数幅とが同程度のものになり、測定器の動特性を考慮しなければならぬとき、観測方程式は微分方程式あるいは差分方程式となる。すなわち、観測系自身が線形動的系¹⁾(linear dynamical system)となる。このような動的観測系の可観測性は Kalman¹⁾の概念を用いれば入力可観測性に等しい。

本論文は、時間離散系について入力可観測性が成立

† 第 8 回自動制御連合講演会で発表 (昭 43・10) (原題—可制御性および可測性からみた時間連続系と時間離散系の関係)

するための必要十分条件および必要条件を求める。また線形動的系 (linear dynamical system) を微分方程式で記述した場合と差分方程式で記述した場合について、可制御性および可観測性の観点より若干の性質を論じる。

2. 時間離散系の入力可観測性

次式で与えられる系を考える。

$$\begin{cases} Z(kT) = GZ((k-1)T) + FX((k-1)T) \\ Y(kT) = HZ(kT) \quad k=1, 2, \dots \end{cases} \quad (1)$$

ただし $G: n \times n$ 行列, $F: n \times r$ 行列, $H: m \times n$ 行列, $Z: n$ ベクトル (状態量), $X: r$ ベクトル (入力量), $Y: m$ ベクトル (出力量). 入力の数 r , 出力の数 m および状態量の数 n の間に次の不等式が成立すると仮定する。

$$r \leq m \leq n \quad (2)$$

いま観測系の方程式が上述の (1) 式で示されるとしよう。入力量 X を求めるのにこの観測系が妥当であるか否かは、この観測系の出力量 Y の測定より入力量 X が求め得るか否かにかかっている。それゆえ次のように入力可観測性を定義する。

(1) 式の系において有限個の出力量 Y の観測より入力量 X の初期値 $X(0)$ が決定できるとき、この系は入力可観測性を有すると定義する。

ここでは (1) 式の系の状態量の初期値 $Z(0)$ は既知とする。

ところで、入力量 $X(0)$ の決定にたった 1 回の出力量 $Y(T)$ のサンプルだけで十分な場合もあるし、2 回あるいは 3 回のサンプルが必要な場合もある。それで次のように定義する。すなわち、

(1) 式の系において入力量 $X(0)$ の決定に必要な最小のサンプリング数が i のとき、この系は i 位の入力可観測性を有すると定義する。

さて、まず (1) 式の系の 1 位の入力可観測性の条件を求めてみよう。(1) 式より $k=1$ のとき、

$$\begin{aligned} Y(T) &= HZ(T) \\ &= HGZ(0) + HFX(0) \end{aligned}$$

$$\therefore W(T) = Y(T) - HGZ(0) = HFX(0)$$

したがって 1 位の入力可観測性の必要十分条件は、

$$[HF] \quad (3)$$

の階数が r のことである。

もし 1 位の入力可観測性が不成立の場合、すなわち (3) 式の階数が $l_1 < r$ のときにはさらに次の観測データが必要である。したがって、

$$\begin{cases} W(T) = HFX(0) \\ W(2T) = Y(2T) - HG^2Z(0) = HGFX(0) + HFX(T) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} W(T) \\ W(2T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HF & 0 \\ HGF & HF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(T) \end{bmatrix}$$

ここで付録の補助定理 I~III を用いると、上式より 2 位の入力可観測性の必要十分条件は上式の係数行列、すなわち次式の階数が $r+l_1$ のことである。

$$\begin{bmatrix} HF & 0 \\ HGF & HF \end{bmatrix} \quad (4)$$

もし 2 位の入力可観測性も不成立のとき、すなわち (4) 式の行列の階数が $l_2 < r+l_1$ のとき、さらに次の観測データ $Y(3T)$ を必要とする。つまり、

$$\begin{cases} W(T) = HFX(0) \\ W(2T) = HGFX(0) + HFX(T) \\ W(3T) = Y(3T) - HG^3Z(0) \\ \quad = HG^2FX(0) + HGFX(T) + HFX(2T) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} W(T) \\ W(2T) \\ W(3T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HF & 0 & 0 \\ HGF & HF & 0 \\ HG^2F & HGF & HF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(T) \\ X(2T) \end{bmatrix}$$

この場合には付録の IV より、この系が 3 位の入力可観測性を有するための必要十分条件は上式の係数行列、すなわち次式の行列の階数が $r+l_2$ のことである。

$$\begin{bmatrix} HF & 0 & 0 \\ HGF & HF & 0 \\ HG^2F & HGF & HF \end{bmatrix} \quad (5)$$

したがって一般に i 位の入力可観測性が成立するための必要十分条件として付録 IV および補助定理 III より次の定理を得る。

【定理 1】 (1) 式の系が i 位の入力可観測性をもつための必要十分条件は、

$$\begin{cases} l_{k-1} < r+l_{k-2} \quad k=2, 3, \dots, i \quad l_0=0 \\ l_i = r+l_{i-1} \end{cases} \quad (6)$$

ただし l_k は次式の行列の階数である。

$$\begin{bmatrix} HF & 0 & \dots & 0 \\ HGF & HF & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ HG^{k-1}F & HG^{k-2}F & \dots & HF \end{bmatrix} \quad (7)$$

(3), (4) および (5) 式をみると第 k 回目のサンプリングでもって (7) 式の最下段の $m \times kr$ 行列、

$$[HG^{k-1}F; HG^{k-2}F; \dots; HF] \quad (8)$$

が係数行列に追加されたことがわかる。(7) 式より上の (8) 式をとりぞいた係数行列の階数が l_{k-1} であるので、(7) 式より (8) 式を除去した係数行列の 1 次独立な行は l_{k-1} 個である。したがってもし k 番目のサンプリングを追加することにより、入力可観測性が得られるためには、(8) 式の行列に r 個の 1 次独立な行が存在しなければならない。それゆえ次の系を得る。

【系 1-1】 (1) 式の系が i 位の入力可観測性を

有するための必要条件は、次の $m \times ir$ 行列の階数が少なくとも r のことである。

$$[HF \mid HGF \mid \cdots \mid HG^{i-1}F]$$

上述の系 1—1 は i 位の入力可観測性を有するためには i 番目のサンプリングによって得られた m 個の情報のうち r 個以上が独立でなければならないことを示している。ゆえに (2) 式の関係式は、入力可観測性が成立するための必要条件となっていることがわかる。

ところでまた第 k 番目のサンプリングにより、(7) 式の最初の $mk \times r$ 行列が追加されたとみなすこともできる。それゆえ k 位の入力可観測性を有するためには (7) 式の最初の r 個の列ベクトルが 1 次独立であることが必要である。すなわち次の系を得る。

【系 1—2】 (1) 式の系が i 位の入力可観測性を有するには次の $r \times mi$ 行列の階数が r でなければならない。

$$[F^*H^* \mid F^*G^*H^* \mid \cdots \mid F^*(G^*)^{i-1}H^*] \quad (9)$$

ここで $*$ は共役転置を示す。

上述の系 1—2 は $X(0)$ の各要素 $x_1(0), \dots, x_r(0)$ にかかる r 個の係数列ベクトルが 1 次独立であることを意味する。(7) 式において $k=i$ とした行列より (9) 式すなわち最初の r 列を除去したものには 1 次独立な列ベクトルが i_{i-1} 個ある。ゆえに i 位の入力可観測性をもつとは、(9) 式の r 個の列ベクトルを追加することにより 1 次独立の列ベクトルの数が $r+i_{i-1}$ 個になったことを意味している。系 1—2 は $x_1(0), \dots, x_r(0)$ の係数列ベクトルがお互いに独立なことが必要条件となっていることを意味しているが、定理 1 は $x_1(0), \dots, x_r(0)$ の任意の係数列ベクトルが他の $r \times i-1$ 個の列ベクトルの線形結合では表わせないことと等価である。ゆえに定理 1 は次の系と等価である。

【系 1—3】 (1) 式の系が i 位の入力可観測性をもつための必要十分条件は、いかなる $r_1 \neq 0, r_2, \dots, r_i$ に対しても次式が成立することである。

$$\begin{bmatrix} HF \\ HGF \\ \vdots \\ HG^{i-1}F \end{bmatrix} r_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ HF \\ \vdots \\ HG^{i-2}F \end{bmatrix} r_2 + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ HF \end{bmatrix} r_i \neq 0 \quad (10)$$

ただし、

$$r_1 = \begin{bmatrix} r_{11} \\ \vdots \\ r_{1r} \end{bmatrix} \neq 0, r_2 = \begin{bmatrix} r_{21} \\ \vdots \\ r_{2r} \end{bmatrix}, \dots, r_i = \begin{bmatrix} r_{i1} \\ \vdots \\ r_{ir} \end{bmatrix}$$

さて (1) 式の系が i 位の入力可観測性をもたないとき、さらに無限に観測データを累積していくことが意味があるだろうか。次にこの問題を考えてみる。

もし (1) 式の系が 1 位、2 位、 $\dots$ 、 i 位の入力可観

測性を有しないならば、系 1—3 より次式を満足する r ベクトル r_1 (非零)、 $r_2, \dots, r_i$ が存在する。

$$\begin{bmatrix} HF \\ HGF \\ \vdots \\ HG^{i-1}F \end{bmatrix} r_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ HF \\ \vdots \\ HG^{i-2}F \end{bmatrix} r_2 + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ HF \end{bmatrix} r_i = 0$$

すなわち次式が満足される。

$$\begin{bmatrix} HF r_1 \\ H(GF r_1 + F r_2) \\ \vdots \\ H(G^{i-1}F r_1 + G^{i-2}F r_2 + \cdots + F r_i) \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

ここで次のようにおく。

$$\begin{cases} f_1 = F r_1 \\ f_2 = GF r_1 + F r_2 \\ \vdots \\ f_i = G^{i-1}F r_1 + G^{i-2}F r_2 + \cdots + F r_i \end{cases} \quad (12)$$

上式の $f_1, \dots, f_i$ は n 次元空間内のベクトルを表わしている。いま行列 $[H]$ の階数を $m' \leq m$ とすると $[H]$ には m' 個の 1 次独立な行ベクトルが存在する。したがって $[H]$ の行ベクトルは n 次元空間中に m' 次元の部分空間を張る。これを $S_p(H)$ と表わそう。そうすると (11) 式は (12) 式で表わされるベクトル $f_1, \dots, f_i$ がすべてゼロベクトルであるかまたはこの m' 次元の部分空間 $S_p(H)$ と直交することを示している。すなわち、

$$f_1 \perp S_p(H), f_2 \perp S_p(H), \dots, f_i \perp S_p(H)$$

つまりベクトル $f_1, \dots, f_i$ は $S_p(H)$ の $n-m'$ 次元補空間内に存在している。

さてここで $i+1$ 位の入力可観測性を検討するために次式を考えよう。

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= G f_i + F r_{i+1} \\ &= G^i F r_1 + G^{i-1} F r_2 + \cdots + G F r_i + F r_{i+1} \end{aligned}$$

ただし r_{i+1} は r ベクトルとする。

もし $f_{i+1} \perp S_p(H)$ とすることができ r_{i+1} が存在するならば、 f_{i+1} は $n-m'$ 次元の補空間内に存在してこの系は $i+1$ 位の入力可観測性をもたない。

ここで $i=n$ とおいてみると、付録 V に示したとおり f_{n+1} は $f_1, \dots, f_n$ の線形結合で表現される。したがって $f_1, \dots, f_n$ がすべて $S_p(H)$ と直交するならば、 $f_{n+1} \perp S_p(H)$ となり f_{n+1} は $n-m'$ 次元の $S_p(H)$ の補空間内に存在する。つまりこの系は $n+1$ 位の入力可観測性をもたないことになる。ゆえに次の定理が証明された。

【定理 2】 (1) 式の系が n 位の入力可観測性をもたないとき、この系は入力可観測性をもたない。すなわち入力可観測性の最高位数は n である。

3. 線形動的系の若干の性質

(1) 式の系の状態可観測性²⁾ および入力可観測性の決定には, n 回までの観測が寄与する. また状態可制御性²⁾ および出力可制御性⁴⁾ に関しても同様にその決定には n 回までの操作が関与する. したがって時間離散系の場合には観測または操作の回数として最大限 n までとらないと可制御性および可観測性に関する十分な情報が得られない. いっぽう (1) 式の系と同様な次の時間連続系を考えてみる.

$$\begin{cases} \dot{Z} = AZ + BX \\ Y = CZ \end{cases} \quad (13)$$

$X: r$ ベクトル, $Z: n$ ベクトル, $Y: m$ ベクトル, $A: n \times n$ 行列, $B: n \times r$ 行列, $C: m \times n$ 行列

この場合には有限の時間間隔であれば, それがどんなに微小であろうとも状態可制御性²⁾, 出力可制御性³⁾ および状態可観測性²⁾ のいずれの場合をもその決定を満足させるだけの十分な情報を含んでいることがわかる. すなわち時間離散系の n 回の観測または操作に関する情報とまったく同等の情報が時間連続系の場合には有限微小間隔に含まれ, しかもその間隔がどのように微小でもよいことがわかる.

系 (13) および系 (1) の状態可制御性の成立のための必要十分条件はそれぞれ次の (14), (15) 式の階数が n のことである²⁾.

$$[B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B] \quad (14)$$

$$[F \mid GF \mid \cdots \mid G^{n-1}F] \quad (15)$$

同様に出力可制御性に関してはそれぞれ次の行列の階数が m のことである^{3), 4)}.

$$[CB \mid CAB \mid \cdots \mid CA^{n-1}B] \quad (16)$$

$$[HF \mid HGF \mid \cdots \mid HG^{n-1}F] \quad (17)$$

また状態可観測性に関してはそれぞれ次の行列の階数が n のことである²⁾.

$$[C^* \mid A^*C^* \mid \cdots \mid (A^*)^{n-1}C^*] \quad (18)$$

$$[H^* \mid G^*H^* \mid \cdots \mid (G^*)^{n-1}H^*] \quad (19)$$

さて上述の (14)~(19) 式をみると, これら 3 者に関しては時間連続系と時間離散系との間にまったく相似性が成立することがわかる.

(14) 式と (18) 式とをみると, 時間連続系の場合には状態可制御性と状態可観測性との間に双対性が成立していることがわかる. 時間離散系の場合にも (15) 式と (19) 式すなわち, 状態可制御性と状態可観測性との間には双対性が成立することがわかる. つまり状態量に関しては双対性が成立する.

さて (1) 式の双対な系として次の (1') 式の系を考えてみる.

$$\begin{cases} S(kT) = -G^*S((k-1)T) + H^*U((k-1)T) \\ V(kT) = F^*S(kT) \end{cases} \quad (1')$$

$S: n$ ベクトル (状態量), $U: m$ ベクトル (入力量), $V: r$ ベクトル (出力量)

上式の出力可制御の必要十分条件は次の行列の階数が r のことである.

$$[F^*H^* \mid F^*(G^*)H^* \mid \cdots \mid F^*(G^*)^{n-1}H^*] \quad (20)$$

いっぽう (1) 式の系において, 系 1—2 および定理 2 より上述の (20) 式の階数が r のことは入力可観測性が成立するための単なる必要条件であるにすぎない. したがって時間離散系の場合一般には出力可制御性と入力可観測性との間には双対性が成立しないことがわかる.

いま (1) 式の系において $r=1$ の場合すなわち 1 入力系を考えてみよう. 定理 1 より 1 入力系が i 位の入力可観測性を有する必要十分条件は次式が成立することである.

$$\begin{cases} HF = HGF = \cdots = HG^{i-2}F = 0 \\ HG^{i-1}F \neq 0 \end{cases}$$

したがってこの場合には, 系 1—2 の (9) 式の条件が i 位の入力可観測性の成立のための必要十分条件になっていることがわかる. ゆえに系 1—2 および定理 2 より系 1—2 の (9) 式において $i=n$ とおいた行列の階数が $r(=1)$ であることが, 入力可観測性の必要十分条件である. ところがそれは (20) 式にはかならない. また系 (1) が 1 出力系の場合出力可制御性が成立するための必要十分条件は, (17) 式の行列の階数が $m(=1)$ のことである. いっぽう双対な 1 出力系 (1') が入力可観測性を有するための必要十分条件は系 1—2 および定理 2 より (17) 式の行列の階数が $m(=1)$ のことである. それゆえ次のようにのべることができる.

(1) 式の系が 1 入力 (1 出力) 系のとき, 双対な 1 出力 (1 入力) 系 (1') が出力可制御性 (入力可観測性) を有することが, (1) 式の系が入力可観測性 (出力可制御性) を有するための必要十分条件である.

4. 時間離散化した系の可制御性と可観測性

ここでは, 系 (1) が系 (13) を時間離散化することにより得られる場合を考える. 各サンプリング間隔 T の期間は入力量 X が一定として (13) 式を時間離散化すると^{1) 2)},

$$\begin{cases} G = e^{AT} \\ F = \int_0^T e^{At} dt B \end{cases} \quad (21)$$

$$\{H=C$$

$\alpha_1(T), \dots, \alpha_p(T)$ をスカラー量とし, p を A の最小多項式の次数とすると,

$$\begin{aligned} G &= e^{AT} = \alpha_1(T)I + \dots + \alpha_p(T)A^{p-1} \\ F &= \int_0^T e^{At} dt B = \sum_{i=1}^p \int_0^T \alpha_i(t) dt A^{i-1} B \\ &= \sum_{i=1}^p \beta_i(T) A^{i-1} B = \beta_1(T)B + \dots + \beta_p(T)A^{p-1}B \end{aligned}$$

ただし,

$$\beta_i(T) = \int_0^T \alpha_i(t) dt$$

したがって $\alpha_j^{(i)} = \alpha_j^{(i)}(T)$, $\beta_j^{(i)} = \beta_j^{(i)}(T)$ をスカラー量とし $\alpha_j^{(1)} = \alpha_j(T)$, $\beta_j^{(1)} = \beta_j(T)$ とおくと次のように表わせる.

$$G^i = [I \mid A \mid \dots \mid A^{p-1}] \begin{bmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \vdots \\ \alpha_p^{(i)} \end{bmatrix} \quad i=1, 2, \dots, n-1 \quad (22)$$

$$G^{i-1}F = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{p-1}B] \begin{bmatrix} \beta_1^{(i)} \\ \vdots \\ \beta_p^{(i)} \end{bmatrix} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (23)$$

$$\begin{aligned} HG^{i-1}F &= [CB \mid CAB \mid \dots \mid CA^{p-1}B] \begin{bmatrix} \beta_1^{(i)} \\ \vdots \\ \beta_p^{(i)} \end{bmatrix} \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (24)$$

$$H^* = C^*,$$

$$\begin{aligned} (G^*)^i H^* &= [C^* \mid A^* C^* \mid \dots \mid (A^*)^{p-1} C^*] \begin{bmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \vdots \\ \alpha_p^{(i)} \end{bmatrix} \\ i &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (25)$$

さて上述の関係式を使用すると次の時間連続系と時間離散化した系に関する定理を得る.

【定理 3】 時間連続系が状態可制御性 (出力可制御性, 状態可観測性) を有しないとき, それを時間離散化した系もまた状態可制御性 (出力可制御性, 状態可観測性) を有しない.

【証明】 まず状態可制御性について証明する. 系 (1) の G^i は (22) 式に示すように $I, A, \dots, A^{p-1}$ の線形結合で示される. p は最小多項式の次数であるから, これはまた $I, A, \dots, A^{p-1}, \dots, A^{n-1}$ の線形結合でも表わされる. したがって $G^{i-1}F$ も (23) 式に示すようにやはり (14) 式の行列の線形結合で表わされる. もし, 時間連続系が状態可制御性を有しないならば, (14) 式の行列の階数は n より小であり, 1 次独立な列ベクトルの数は n より小となる. ゆえに (15) 式には 1 次独立な列ベクトルが n 個以上ない. すなわち (15) 式の階数は n より小となり, 時間離散化した系も状態可制御性をもたない.

出力可制御性に関しては (16), (17) および (24) 式の関係を使用して, また状態可観測性に関しては

(18), (19) および (25) 式の関係を使用してまったく同様に証明できる. (証明終)

つぎに時間離散化を行なうときの係数 $\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}$ に関する定理を導こう. いま次のようにおく.

$$\begin{aligned} [B \mid AB \mid \dots \mid A^{p-1}B] \\ = [P_1^{(1)} \dots P_r^{(1)} \mid P_1^{(2)} \dots P_r^{(2)} \mid \dots \mid P_1^{(p)} \dots P_r^{(p)}] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} [F \mid GF \mid \dots \mid G^{n-1}F] \\ = [\varphi_1^{(1)} \dots \varphi_r^{(1)} \mid \varphi_1^{(2)} \dots \varphi_r^{(2)} \mid \dots \mid \varphi_1^{(n)} \dots \varphi_r^{(n)}] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} [CB \mid CAB \mid \dots \mid CA^{p-1}B] \\ = [Q_1^{(1)} \dots Q_r^{(1)} \mid Q_1^{(2)} \dots Q_r^{(2)} \mid \dots \mid Q_1^{(p)} \dots Q_r^{(p)}] \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} [HF \mid HGF \mid \dots \mid HG^{n-1}F] \\ = [\psi_1^{(1)} \dots \psi_r^{(1)} \mid \psi_1^{(2)} \dots \psi_r^{(2)} \mid \dots \mid \psi_1^{(n)} \dots \psi_r^{(n)}] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} [C^* \mid A^* C^* \mid \dots \mid (A^*)^{p-1} C^*] \\ = [R_1^{(1)} \dots R_m^{(1)} \mid R_1^{(2)} \dots R_m^{(2)} \mid \dots \mid R_1^{(p)} \dots R_m^{(p)}] \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} [H^* \mid G^* H^* \mid \dots \mid (G^*)^{n-1} H^*] \\ = [\Gamma_1^{(1)} \dots \Gamma_m^{(1)} \mid \Gamma_1^{(2)} \dots \Gamma_m^{(2)} \mid \dots \mid \Gamma_1^{(n)} \dots \Gamma_m^{(n)}] \end{aligned} \quad (31)$$

これら (26)~(31) 式および (23)~(25) 式の関係より次の関係式が得られる.

$$\begin{bmatrix} \varphi_1^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi_r^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n)} \\ \vdots \\ \varphi_r^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^{(1)} I & \dots & \beta_p^{(1)} I \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1^{(n)} I & \dots & \beta_p^{(n)} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^{(1)} \\ \vdots \\ P_r^{(1)} \\ \vdots \\ P_1^{(p)} \\ \vdots \\ P_r^{(p)} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$I: r \times r$ 単位行列

$$\begin{bmatrix} \phi_1^{(1)} \\ \vdots \\ \phi_r^{(1)} \\ \vdots \\ \phi_1^{(n)} \\ \vdots \\ \phi_r^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^{(1)} I & \dots & \beta_p^{(1)} I \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1^{(n)} I & \dots & \beta_p^{(n)} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^{(1)} \\ \vdots \\ Q_r^{(1)} \\ \vdots \\ Q_1^{(p)} \\ \vdots \\ Q_r^{(p)} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$I: r \times r$ 単位行列

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1^{(1)} \\ \vdots \\ \Gamma_m^{(1)} \\ \vdots \\ \Gamma_1^{(n)} \\ \vdots \\ \Gamma_m^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1^{(1)} I & \alpha_2^{(1)} I & \dots & \alpha_p^{(1)} I \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{(n-1)} I & \alpha_2^{(n-1)} I & \dots & \alpha_p^{(n-1)} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^{(1)} \\ \vdots \\ R_m^{(1)} \\ \vdots \\ R_1^{(p)} \\ \vdots \\ R_m^{(p)} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$I: m \times m$ 単位行列

さて上式を用いると次の定理が得られる.

【定理 4】 (32) 式 [(33) 式, (34) 式] の線形結合係数行列の階数が $n(m, n)$ より小さいとき, 時

間離散化した系は状態可制御性（出力可制御性，状態可観測性）をもたない。

【証明】 まず状態可制御性について証明する。
(32) 式より $\varphi_j^{(i)}$ は $P_1^{(1)}, \dots, P_r^{(p)}$ の線形結合である。もし (32) 式の線形結合係数の階数が n より小ならば，(32) 式の行のうち 1 次独立なものは n 個より小であり他はそれらの線形結合で表わされる。ゆえに $\varphi_j^{(i)}$ のうち 1 次独立なものは n 個より小であり，したがって (27) 式すなわち，(15) 式の階数は n より小となり，時間離散化したものは状態可制御性が成立しない。

出力可制御性は (33)，(29) および (17) 式によりまた状態可観測性は (34)，(31) および (19) 式によりまったく同様に証明できる。（証明終）

5. 例 題

【例題 1】 次の時間離散系は 2 位の入力可観測性をもつ。

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

【例題 2】 まず次の時間連続系を考える。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 3]$$

この場合には，

$$[B|AB] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad [C^*|A^*C^*] = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[CB|CAB] = [6 \quad 0]$$

ゆえに状態可制御性，状態可観測性および出力可制御性がすべて成立する。

さて，この系を時間離散化しよう。

$$e^{At} = \cos 2t \cdot I + \frac{1}{2} \sin 2t \cdot A$$

であるから (34) 式の線形結合係数は，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos 2T & \frac{1}{2} \sin 2T \end{bmatrix}$$

また (32)，(33) 式の線形結合係数を計算すると，

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sin 2T & \frac{1}{4} (1 - \cos 2T) \\ \sin 2T \left(\frac{3}{2} \cos 2T - 1 \right) & \frac{1}{4} (\sin 2T - \cos 2T + 1) \cos 2T \end{bmatrix}$$

ゆえにサンプリング間隔を $T = k\pi$ ($k=1, 2, \dots$) と選ぶと状態可観測性，状態可制御性および出力可制御性はすべて成立しなくなる。すなわち時間離散化をするときにはサンプリング間隔が不適当だと可制御性・可観測性が失われることがある。

6. む す び

動的観測系すなわち観測系自身が，微分方程式あるいは差分方程式で表現される動的系 (dynamical system) の場合の可観測性の問題は，Kalman¹⁾ の状態可観測性の概念の拡張であり，入力可観測性と呼んだ。本論文は，この入力可観測性の問題を時間離散系の場合について検討した。入力可観測性に対しても状態可観測性の成立のための必要十分条件によく似た条件が得られるが，これは入力可観測性に対しては単に必要条件であって，必要十分条件ではない。

また本論文では動的系 (dynamical system) の若干の性質，すなわち時間離散系と時間連続系との間の n 回サンプリングと有限微小間隔の等価性，相似性および状態量ならびに入・出力間の双対性について議論した。

文 献

- 1) R. E. Kalman : On the General Theory of Control Systems Proc. 1st IFAC, 481/492 ('60)
- 2) K. Ogata : State Space Analysis of Control Systems, 370/436 Prentice Hall ('67)
- 3) E. Kreindler & P. E. Sarachik : On the Concepts of Controllability and Observability of Linear Systems, IEEE Trans, AC-9-2, 129/136 ('64)
- 4) P. E. Sarachik & E. Kreindler : Controllability and Observability of Linear Discrete-time Systems, Inter. J. Control, 1-5, 419/432 ('65)

□ 付 録 □

I. 次の線形連立方程式を考える。

$$w_k = \sum_{j=1}^r \varphi_{kj} x_j \quad k=1, 2, \dots, l, \dots, m \quad (\text{付} \cdot 1)$$

ここで係数行列 $[\varphi_{kj}]$ の階数を l とし， $l \leq r \leq m$ とする。一般性を失うことなく次のように仮定できる。

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{l1} & \dots & \varphi_{ll} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{付} \cdot 2)$$

いま (付・1) 式を次のように変形する。

$$\sum_{j=1}^l \varphi_{kj} x_j = w_k - \sum_{j=1}^{l'} \varphi'_{kj} \alpha_j \quad (\text{付} \cdot 3)$$

ただし，

$$\alpha_1 = x_{l+1}, \dots, \alpha_{l'} = x_r, \quad \varphi'_{1l} = \varphi_{1l+1}, \dots, \varphi'_{m l'} = \varphi_{m r}$$

(付・3) 式を解くと $x_1, \dots, x_l$ の解が得られるが，おのおのは w_k と α_j の線形結合で表わされる。

さて (付・1) 式は r 個の変数 $x_1, \dots, x_r$ の式であるが，これを次に示す l 個の変数 $u_1, \dots, u_l$ の式に変形することを考える。すなわち，

$$\sum_{j=1}^r \varphi_{kj} x_j = \sum_{j=1}^l \beta_{kj} u_j \quad (\text{付} \cdot 4)$$

ただし右辺の係数行列 $[\beta]$ の階数は l である。上式

は m 次元空間中において x の r 次元部分空間から u の l 次元部分空間への変換と考えることもできる. この変換の方法は一樣ではないが, ここでは次の場合を考える.

$$\beta_{kj} = \varphi_{kj} \quad j=1, 2, \dots, l \quad (\text{付} \cdot 5)$$

さて (付・3) 式を x_1 について解くと,

$$x_1 = \frac{1}{\Delta} \left[\sum_{j=1}^l w_j A_{j1} - \sum_{j=1}^{l'} \alpha_j \sum_{j=1}^l \varphi'_{jk} A_{j1} \right] \quad (\text{付} \cdot 6)$$

ただし上式中において A_{jk} は (付・2) 式に示される行列式の j 行 k 列の余因子である. 上式より, 変数 x_1 とパラメータ α_1 とが結合するための必要十分条件は次式が成立することである.

$$\sum_{j=1}^l \varphi'_{jk} A_{j1} \neq 0, \quad (\text{ここでは } k=1)$$

任意の $x_k (k=1, \dots, l)$ および $\alpha_j = x_{l+j} (j=1, \dots, l')$ に関してもまったく同様である. ゆえに次の補助定理が証明された.

【補助定理 I】 (付・1) 式の $x_k (k=1, \dots, l)$ と $x_{l+j} (j=1, \dots, l')$ とが (付・2) 式および (付・5) 式の条件下で (付・4) 式の変換を行なうとき結合されるための必要十分条件は, 次の式が成立することである.

$$\sum_{i=1}^l \varphi'_{ij} A_{ik} \neq 0 \quad (\text{付} \cdot 7)$$

II. (付・1) 式の係数行列 $[\beta]$ の中で最初の l 個の列ベクトルは 1 次独立であり, 他はそれらの線形結合で表わされる. したがって c_{ij} を定数として,

$$\begin{bmatrix} \varphi'_{1j} \\ \vdots \\ \varphi'_{mj} \end{bmatrix} = c_{1j} \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \vdots \\ \varphi_{m1} \end{bmatrix} + \dots + c_{lj} \begin{bmatrix} \varphi_{1l} \\ \vdots \\ \varphi_{ml} \end{bmatrix}, \quad j=1, \dots, l' \quad (\text{付} \cdot 8)$$

ところで,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l \varphi'_{ki} A_{ki} &= \sum_{k=1}^l (c_{rj} \varphi_{k1} + \dots + c_{lj} \varphi_{kl}) A_{ki} \\ &= c_{1j} \sum_{k=1}^l \varphi_{k1} A_{ki} + \dots + c_{lj} \sum_{k=1}^l \varphi_{kl} A_{ki} \\ &= c_{ij} \sum_{k=1}^l \varphi_{ki} A_{ki} = c_{ij} \Delta \end{aligned}$$

ゆえに,

$$c_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^l \varphi'_{kj} A_{ki} \quad (\text{付} \cdot 9)$$

したがって (付・6) 式より,

$$x_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^l w_j A_{jk} - \sum_{j=1}^{l'} c_{kj} \alpha_j$$

ゆえに,

$$x_k + \sum_{j=1}^{l'} c_{kj} \alpha_j = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^l w_j A_{jk} \quad (\text{付} \cdot 10)$$

よって,

$$u_k = x_k + \sum_{j=1}^{l'} c_{kj} \alpha_j \quad (\text{付} \cdot 11)$$

とくと (付・4) 式の変換は完成されたことになる. ゆえに次の補助定理が証明された.

【補助定理 II】 (付・2) 式の条件下で (付・4) および (付・11) 式のようにとくと, 変数 x_j から変数 u_j への変換 (付・4) 式が行なわれる.

III. 本文の (1) 式の系が 1 位の入力可観測性を有しない場合を考えよう. (3) 式の階数が l_1 であるから (3) 式の独立な l_1 個の列ベクトルより $m \times l_1$ 行列 $[\beta]$ を構成することにより,

$$HFX = \beta U$$

と変換することができる. ただし U の各要素は上述の (付・11) 式にしたがって作られる. それゆえ第 2 番目のサンプリングまで考慮すると,

$$\begin{bmatrix} W(T) \\ W(2T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HF & 0 \\ HGF & HF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HF & 0 \\ HGF & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ U \end{bmatrix} \quad (\text{付} \cdot 12)$$

上式の 2 つの係数行列の階数は等しい. それゆえ 2 位の入力可観測性に関して次の補助定理を得る.

【補助定理 III】 系 (1) が 2 位の入力可観測性を有するための必要十分条件は次の行列の階数が $r+l_1$ である.

$$\begin{bmatrix} HF & 0 \\ HGF & HF \end{bmatrix}$$

【証明】 (この証明中では l_1 を l と表わす)

(付・12) 式より十分条件であることは明らかである. さて, 次式の行列の階数を $r+l-\alpha (\alpha > 0)$ とする.

$$\begin{bmatrix} HF & 0 \\ HGF & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} \dots \varphi_{1r} & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_{m1} \dots \varphi_{mr} & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_{2m1} \dots \varphi_{2mr} & \beta_{11} \dots \beta_{1l} \\ \vdots & \vdots \\ \beta_{l1} \dots \beta_{ll} \end{bmatrix} \quad (\text{付} \cdot 13)$$

ここで $\alpha=1$ とする. $\alpha=2, 3, \dots$ の場合でも同様である. (付・13) 式の $r+l$ 個の列ベクトルのうち $r+l-\alpha$ 個が 1 次独立である. 他はそれらの線形結合で表わされる. もし α 個の従属のベクトルが (付・13) 式の最初の r 個の列ベクトルの中にあれば, $x_1(0), \dots, x_r(0)$ は唯一に定まらない. したがって 2 位の入力可観測性はない. もし (付・13) 式の後半の部分に存在している場合には, この $\alpha (=1)$ 個の列ベクトルは最後列のベクトルとしても一般性を失わない. したがって $c_1, \dots, c_r, c'_1, \dots, c'_{l-1}$ を定数として,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_{1l} \\ \vdots \\ \beta_{ll} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \vdots \\ \varphi_{m1} \\ \varphi_{m+11} \\ \vdots \\ \varphi_{2m1} \end{bmatrix} + \dots + c_r \begin{bmatrix} \varphi_{1r} \\ \vdots \\ \varphi_{mr} \\ \varphi_{m+1r} \\ \vdots \\ \varphi_{2mr} \end{bmatrix}$$

$$+c'_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{l1} \end{bmatrix} + \cdots + c'_{l-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_{1l-1} \\ \vdots \\ \beta_{ll-1} \end{bmatrix}$$

ところで $[\beta]$ の階数が l であるから $c_1 = \cdots = c_r = 0$ はあり得ない。いま $c_1 \neq 0$ とすると (付・9) 式および補助定理 I より $x_1(0)$ は U の要素 u_i と分離して求めることができない。すなわち $x_1(0)$ は唯一に決定できず、2 位の入力可観測性が成立しない。(証明終)

IV. 2 位の入力可観測性がない場合には、

$$\begin{bmatrix} HF & 0 \\ HGF & HF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(T) \\ X(2T) \end{bmatrix} = \beta U \quad \begin{array}{l} \beta : 2m \times l_2 \text{ 行列} \\ U : l_2 \text{ ベクトル} \end{array}$$

として、

$$\begin{bmatrix} W(T) \\ W(2T) \\ W(3T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HF & 0 & 0 \\ HGF & HF & 0 \\ HG^2F & HGF & HF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(T) \\ X(2T) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} HF & 0 \\ HGE & \beta \\ HG^2F & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ U \end{bmatrix}$$

したがって前述の (付・12) 式の場合とまったく同様に考えていくことができる。

一般に i 位の入力可観測性に対しては、

$$\begin{bmatrix} HF & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ HG^{i-2}F & HG^{i-3}F & \cdots & HF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(T) \\ \vdots \\ \dot{X}((i-2)T) \end{bmatrix} = \beta U$$

$\beta : (i-1) \cdot m \times l_{i-1}$ 行列, $U : l_{i-1}$ ベクトルとして、

$$\begin{bmatrix} W(T) \\ \vdots \\ W(iT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HF & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ HG^iF & \cdots & HF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ \vdots \\ \dot{X}((i-1)T) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} HF & 0 \\ \vdots & \vdots \\ HG^{i-1}F & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ U \end{bmatrix}$$

ゆえに補助定理 III とまったく同様にして一般の i 位の入力可観測性の場合も証明することができる。

V. Cayley-Hamilton の定理より $K_1, \dots, K_n$ を定数として、 $G^n = K_1 G^{n-1} + \cdots + K_n I$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに、} f_{n+1} &= Gf_n + F\gamma_{n+1} \\ &= G^{n-1}F(K_1\gamma_1 + \gamma_2) + \cdots + F(K_n\gamma_1 + \gamma_{n+1}) \end{aligned} \quad (\text{付} \cdot 14)$$

いっぽう、 $f_1, \dots, f_n$ の線形結合は $c_1, \dots, c_n$ を定数として、

$$c_1 f_n + \cdots + c_n f_1 = G^{n-1}Fc_1\gamma_1 + \cdots + F(c_1\gamma_n + \cdots + c_n\gamma_1) \quad (\text{付} \cdot 15)$$

ところで次式の $n \cdot r \times n$ 行列の階数は n である。

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n & \gamma_{n-1} & \cdots & \gamma_1 \end{bmatrix}$$

ゆえに次式を満足する定数 $c_1, \dots, c_n$ が存在する。

$$\begin{bmatrix} K_1\gamma_1 + \gamma_2 \\ \vdots \\ K_n\gamma_1 + \gamma_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n & \cdots & \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

このような $c_1, \dots, c_n$ により (付・14) 式と (付・15) 式の G^iF の各係数は一致するから次のように表わせる。

$$f_{n+1} = c_1 f_n + \cdots + c_n f_1$$