非線形系の安定領域を求める1つの方法[†]

市 川 邦 彦

名古屋大学工学部 名古屋市千種区不老町

(昭和 43 年 12 月 18 日受付)

A Method to Find Stable Region of Nonlinear System

Kunihiko ICHIKAWA

(Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya)

(Received December 18, 1968)

This paper presents a new method of finding the region of asymptotic stability around the equilibrium point of a nonlinear system. It employs the idea of an inverse problem, that is, the problem to decide the system equation which is asymptotically stable inside a prescribed curve. Although the Liapunov function is not used explicitly in this method, the fundamental thoughts originate in the stability theory of Liapunov. The presented method is so straightforward as to dispense with any groping which is often inevitable for finding Liapunov function. The example to find the region of asymptotic stability of van der Pol's system is presented to illustrate clearly how to apply the method to a particular given problem. The example has revealed that the method brings about extremely good accuracy in the comparatively small expense of calculation.

1. ま え が き

非線形系の安定解析では、漸近安定点のまわりの安定領域の大きさを定量的に知ることが目的の1つとなっている。安定限界を表わす曲線を求めるために用いられてきた主な手法は Liapunov の直接法に根拠をおいたものである^{1), 2)}。この手法のよい点は、Liapunov 関数の存在が確認できたところは間違いなく安定領域内にあることを主張できるところにある。しかし、普通は Liapunov 関数の存在が確認できる領域は真の安定領域よりはるかに小さく、実用的な意味で真の安定領域近くまで Liapunov 関数の存在を確認するのは容易でない。

本論は、それとは別の考えに基づいて安定限界曲線の近似解を見出そうとするものである。はじめに逆問題の解き方を説明し、つぎに逆問題を利用して安定限界曲線を求める方法を述べる。ここでは Liapunov 関数は直接的には用いないけれども、考え方は一貫して Liapunov の安定論に基礎をおいている。本論で述べる方法は2階の系にのみ適用でき、また近似解は必ず

しも、その内部が間違いなく安定領域であることを保証するものではないが、近似解を求めるまでの手続きは模索的なところがない明確なものであり、またそれほど計算量を要しない割に精度の高い近似解が得られるという特色がある。

2. 逆 問 題

x_1, x_2 平面上にある曲線を指定し、その曲線の内部が安定領域となり、その曲線が正確に安定限界曲線となるような系の状態ベクトル微分方程式を求める問題を逆問題という。

ここでは原点が漸近安定点であるとする。指定する曲線は必ずしも閉曲線でなくてもよい。閉曲線の場合、内部という意味は自明であるが、その閉曲線はとうぜん原点を含んでいなければならない。またその曲線が閉曲線でないときには、原点のある側をその曲線の内部と称することにする。曲線を、

$$V_B(x) - \rho_B = 0 \quad (1)$$

の形で指定するものとする。ただし $\rho_B > 0$ であり、また $x \equiv \{x_1, x_2\}$ である。上述したように (1) 式そのものは必ずしも閉曲線でなくてもよいが、つぎの性質

[†] 第7回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭 43・9・5)

があるものとする。 ρ_B の代わりに ρ を代入して得られる曲線、

$$V_B(x) - \rho = 0 \quad (2)$$

は $0 < \rho < \rho_B$ においては閉曲線であり、より小さな ρ をもつ閉曲線を完全にその内部に包含し、かつ $\rho \rightarrow 0$ で (2) は原点に縮退するものとする。

ρ をある値に定めた曲線 (2) を考える。点 x がその内部、上、外部にあるに従い、 $V_B(x) - \rho$ は負、0、正になる。まず、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= k \frac{\partial V_B(x)}{\partial x_2} \\ \dot{x}_2 &= -k \frac{\partial V_B(x)}{\partial x_1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

で表わされる系を考える。ここに k は 0 でない任意の実数である。任意の状態点 x を考え、そこを通る曲線 (2) を考える。 x におけるその曲線の法線ベクトルは、

$$\text{法線ベクトル} = \left\{ \frac{\partial V_B(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial V_B(x)}{\partial x_2} \right\} \quad (4)$$

で表わされ、系 (3) の速度ベクトル $\left\{ k \frac{\partial V_B(x)}{\partial x_2}, -k \frac{\partial V_B(x)}{\partial x_1} \right\}$ と直交している。したがって、状態点はその曲線にそって運動する。いま $V_B(x)$ を系のエネルギーと考えると初期時刻にもっていたエネルギーが保存されるような運動が行なわれる。したがって、系 (3) を保存系と考えることができる。初期点 x を曲線 (1) の内部にとると、曲線 (2) は閉曲線となり、状態点は閉曲線の上を運動しつづけることになる。よって原点は Liapunov の意味で安定であるが、漸近安定ではない。

つぎに、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= [V_B(x) - \rho_B] g(x) + k \frac{\partial V_B(x)}{\partial x_2} \\ \dot{x}_2 &= [V_B(x) - \rho_B] h(x) - k \frac{\partial V_B(x)}{\partial x_1} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

で表わされる系を考える。ただし、 $g(x)$ および $h(x)$ は、

$$g(x) \frac{\partial V_B(x)}{\partial x_1} + h(x) \frac{\partial V_B(x)}{\partial x_2} \geq 0 \quad \forall x \quad (6)$$

を満足する任意の関数とする。ふたたび、任意の状態点 x をとり、そこを通る曲線 (2) を考えると、速度ベクトルと法線ベクトルの内積は、

$$\text{内積} = [V_B(x) - \rho_B] \left\{ g(x) \frac{\partial V_B(x)}{\partial x_1} + h(x) \frac{\partial V_B(x)}{\partial x_2} \right\} \quad (7)$$

となる。明かにこの内積は、 x が指定された曲線 (1) の内部、上、外部にあるに従い、 ≤ 0 , $= 0$, ≥ 0 となる。系 (5) の解軌道が、(6) において等号を用いたときに得られる曲線と一致しないならば、上の叙述

で不等号に併記されている等号はとれて、系 (5) の運動は、状態点が曲線 (1) の内部では閉曲線 (2) を外側から内側に、曲線 (1) の外部では曲線 (2) を内側から外側に切り、そして状態点が曲線 (1) の上にあるれば、その上を運動しつづけるといったものになる。したがって、系 (5) の安定限界曲線は (1) であり、(1) の内部は漸近安定領域である。かくして、逆問題の解は (5) として得られることがあった。しかし $g(x)$ と $h(x)$ の選択には自由度があるので、一般に解の形は無数にある。

3. 逆問題の例題

3.1 単位円

$$V_B(x) - \rho_B \equiv x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \quad (8)$$

で与えられる。 $k = 1/2$ とおくと、求めるべき系は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= (x_1^2 + x_2^2 - 1) g(x) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= (x_1^2 + x_2^2 - 1) h(x) - x_1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

で表わされる。ただし、

$$g(x) x_1 + h(x) x_2 \geq 0 \quad (10)$$

が必要である。 $g(x) = 0$, $h(x) = x_2$ とおけば、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

が得られる。また $g(x) = x_1$, $h(x) = x_2$ とおけば、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

が得られる。(12) 式なる系の安定限界曲線が単位円であることは順問題として解かれている¹⁾。

3.2 楕円

$$V_B(x) - \rho_B \equiv x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 1 = 0 \quad (13)$$

が与えられているとする。これより、求めるべき系は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= (x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 1) g(x) - x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= (x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 1) h(x) - 2x_1 + x_2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$g(x) (2x_1 - x_2) + h(x) (-x_1 + 2x_2) \geq 0 \quad (15)$$

として得られることになる。たとえば $g(x) = x_1$, $h(x) = x_2$ とおくと、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + 2x_2 + x_1(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + x_2(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

をうる。

3.3 直線 $x_1 = -0.5$

これは $x_1 > -0.5$ で表わされる半平面領域を漸近安定領域とするような系を求めるという問題である。線形制御理論で用いられる等 M 円³⁾ は、M の代わりに ρ を用いると次の方程式で表わされる。

$$(x_1 - \rho^2/1 - \rho^2)^2 + x_2^2 = (\rho/1 - \rho^2)^2 \quad (17)$$

曲線 (17) は $0 < \rho < 1$ では閉曲線 (円) であり、 $\rho \rightarrow 0$ で原点に縮退し、 ρ とともに膨脹し、 $\rho \rightarrow 1$ で $x_1 =$

-0.5 なる直線に漸近する。しかし、このままでは (1) の形をもっていないから、変形して次の形とする。

$$V_B(x) - \rho_B \equiv \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 + 1)^2 + x_2^2} - 1 = 0 \quad (18)$$

求める系の一例を示すと、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + 2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1^2x_2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

である。

3.4 放物線

これも指定した曲線が閉曲線ではない例である。放物線、

$$x_1 + x_2^2 - 1 = 0 \quad (20)$$

の内部を漸近安定領域とする系を求める問題を考える。 $x_1 + x_2^2$ を $V_B(x)$ に、また 1 を ρ_B にとるわけにゆかない。というのは、そうすると $V_B(x) - \rho = 0$, $0 < \rho < 1$ が閉曲線にならないからである。このように問題によって多少のくふうを要するが、この問題に対しては、

$$V_B(x) - \rho_B \equiv \frac{x_1^2 + 2x_2^2}{x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 1} - 1 = 0 \quad (21)$$

とおく。そして一例として、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_2 + 2x_2(-2x_1 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - x_2 + x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2^2 + x_2^3 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

をうる。

4. 安定限界曲線の求め方

いくら多数の逆問題をあらかじめ解いておいても、その対応から、任意の順問題の解を見出すこと、すなわち与えられた系の安定限界曲線を見つけることは一般に不可能である。しかしながら、以下に述べるように、逆問題を利用することによって順問題を解くことができる。その方法を具体的に説明するために van der Pol の系を例にとって、その安定限界曲線を求めることにする。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - (1 - x_1^2)x_2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

が与えられているとする。この系が原点の付近に漸近安定領域をもっていることは周知のことであるし、また 2 階の系の運動に関するごく初歩的な考察からも理解できるところである。

いま、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

なる系において $f(-x_1, -x_2) = -f(x_1, x_2)$ なる性質があるとき、この系がリミットサイクルを持てばどの

ような性質があるかということを考えることにしよう。もちろん (23) 式の系もこの場合に当てはまっている。まず、リミットサイクルは原点对称である。軌道は上半平面では右方に、下半平面では左方に向い、 x_1 軸を直角に切るから、リミットサイクルは $x_1 = \pm p$ なる 2 点で x_1 軸と直交し、リミットサイクルは $|x_1| \leq p$ の範囲内のみ存在するといえることができる。そして、それぞれの半平面内で、リミットサイクルは x_2 が x_1 の 1 価関数であるような曲線である。

よって、van der Pol (23) のリミットサイクル (安定限界曲線) の上半平面内の方程式を、

$$x_2 = c(x_1) \quad (25)$$

で表わすと、その下半平面内の方程式は、

$$x_2 = -c(-x_1) \quad (26)$$

で表わされることになる。ここに $c(x_1)$ は x_1 に関する 1 価関数である。したがって、リミットサイクルの方程式は、

$$\{x_2 - c(x_1)\} \{x_2 + c(-x_1)\} = 0 \quad (27)$$

で表わされることになる。1 価関数で表わされる任意の曲線 $x_2 = c(x_1)$ は無限べき級数で表わすことができるから、これを、

$$x_2 = c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \dots \quad (28)$$

とおく。これを (27) 式に代入すると、安定限界曲線は、つぎのように x_2 関した 2 次方程式の形に表わされる。

$$x_2^2 + 2A(x_1)x_2 + \{-b_0^2 + B(x_1)\} = 0 \quad (29)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} A(x_1) &= a_1x_1 + a_3x_1^3 + \dots \\ B(x_1) &= b_2x_1^2 + b_4x_1^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

そして $x_1 = p$ において $c(x_1) = 0$, $c(-x_1) = 0$ という条件を用いると、 $A(x_1) = 0$ ならしめる x_1 において、

$$-b_0^2 + B(x_1) = 0 \quad (31)$$

が満足されるという条件が得られる。これは、後に b_0^2 の値を決定するのに重要な役割をなす。

いまの段階では、 $A(x_1)$, $B(x_1)$ および b_0^2 は未知であるから、安定限界曲線 (29) 式は未知であるが、逆問題の考えを利用すると、(29) 式を安定限界曲線とし、その内部を漸近安定領域とするような系が (23) 式になっているといえることができる。逆問題の手法を利用するにあたり、

$$V_B(x) - \rho_B \equiv x_2^2 + 2A(x_1)x_2 + B(x_1) - b_0^2 = 0 \quad (32)$$

とおくことができる。そうすると、求める系は、

$$g(x) \{2A'(x_1)x_2 + B'(x_1)\} + h(x) \{2x_2 + 2A(x_1)\} \geq 0 \quad (33)$$

を満足する $g(x)$ と $h(x)$ を用い、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \{x_2^2 + 2A(x_1)x_2 + B(x_1) - b_0^2\}g(x) \\ &\quad + 2x_2 + 2A(x_1) \\ \dot{x}_2 &= \{x_2^2 + 2A(x_1)x_2 + B(x_1) - b_0^2\}h(x) \\ &\quad - 2A'(x_1)x_2 - B'(x_1) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

となる。ただし、プライムは導関数を表わす。そして (34) 式が (23) 式に一致しなければならないのである。(33) 式の条件を用いることをあつまわしにして、(34) 式が (23) 式に一致しなければならないという条件を用いると、

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= \frac{-2A(x_1) - x_2}{x_2^2 + 2A(x_1)x_2 + B(x_1) - b_0^2} \\ h(x) &= \frac{B'(x_1) - x_1 + \{2A'(x_1) - (1 - x_1^2)\}x_2}{x_2^2 + 2A(x_1)x_2 + B(x_1) - b_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

をうる。ここで (33) 式の条件を用いると、次の準正定条件をうる。

$$\frac{2\{A'(x_1) - (1 - x_1^2)\}x_2^2}{x_2^2 + 2A(x_1)x_2} + \frac{\{B'(x_1) - 2A(x_1)(1 - x_1^2) - 2x_1\}x_2 - 2A(x_1)x_1}{+B(x_1) - b_0^2} \geq 0 \quad (36)$$

(36) 式の分子も分母ともに x_2 の 2 次式である。そして分母は閉曲線 (32) の内部では負、外部では正と符号を変える。したがって、この準正定条件は、分子と分母が完全に約せて正の定数となるときにのみ成立することになる。かくして、

$$\frac{2\{A'(x_1) - (1 - x_1^2)\}}{1} = \frac{B'(x_1) - 2A(x_1)(1 - x_1^2) - 2x_1}{2A(x_1)} = \frac{-2A(x_1)x_1}{B(x_1) - b_0^2} > 0 \quad (37)$$

(37) 式の 2 つの等式で、 x_1 の同一のべきの係数を等置することによって、つぎの 2 つの関係式群をうる。

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= 2a_1^2 = (a_1 - 1) \\ b_4 &= 4a_1a_3 - 1/2(a_3 - a_1) \\ b_6 &= 4a_1a_5 + 2a_3^2 - 1/3(a_5 - a_3) \\ b_8 &= 4a_1a_7 + 4a_3a_5 - 1/4(a_7 - a_5) \\ b_{10} &= 4a_1a_9 + 4a_3a_7 + 2a_5^2 - 1/5(a_9 - a_7) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -b_0^2 + a_1b_0^2 \\ a_1 &= b_0^2 + b_2^2 - a_1b_2 + 3a_3b_0^2 \\ a_3 &= -b_2 + b_4 - a_1b_4 - 3a_3b_2 + 5a_5b_0^2 \\ a_5 &= -b_4 + b_6 - a_1b_6 - 3a_3b_4 - 5a_5b_2 + 7a_7b_0^2 \\ a_7 &= -b_6 + b_8 - a_1b_8 - 3a_3b_6 - 5a_5b_4 - 7a_7b_2 \\ &\quad + 9a_9b_0^2 \\ a_9 &= -b_8 + b_{10} - a_1b_{10} - 3a_3b_8 - 5a_5b_6 - 7a_7b_4 \\ &\quad + 9a_9b_2 + 11a_{11}b_0^2 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

まず $a_1 = 1$ および $b_2 = 2$ をうる。その他の a_i と

b_i は未知の定数 b_0^2 を含んだ形で解かれ、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_3 &= -1/3 + 1/3 \cdot 1/b_0^2 \\ a_5 &= -1/5 \cdot 1/b_0^2 + 7/15 \cdot 1/b_0^4 \\ a_7 &= -1/5 \cdot 1/b_0^4 + 9/10 \cdot 1/b_0^6 \\ a_9 &= 1/27 \cdot 1/b_0^4 - 497/810 \cdot 1/b_0^6 + 1634/810 \cdot 1/b_0^8 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= 2 \\ b_4 &= -2/3 + 7/6 \cdot 1/b_0^2 \\ b_6 &= -1/9 - 26/45 \cdot 1/b_0^2 + 29/15 \cdot 1/b_0^4 \\ b_8 &= 13/180 \cdot 1/b_0^2 - 121/90 \cdot 1/b_0^4 + 1439/360 \cdot 1/b_0^6 \\ b_{10} &= 254/675 \cdot 1/b_0^4 - 7579/2025 \cdot 1/b_0^6 \\ &\quad + 3767/405 \cdot 1/b_0^8 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

さて b_0^2 は (31) 式の条件から求めることができる。まず $A(x_1)$ を 0 ならしめる x_1 を求めなければならないが $A(x_1)$ は無限べき級数で表わされているから、 x_1 を求めるには $A(x_1)$ をあるところで打ち切らなければならない。 $A(x_1)$ を x_1 の $(2n+1)$ 乗の項までで打切ると、 $A(x_1) = 0$ は x_1^2 についての n 次方程式となり、未知数 b_0^2 を含んでいる。これより x_1^2 と b_0^2 の関係を数値に求めることができる。さて、 $-b_0^2 + B(x_1)$ は 0 でなければならないが、(40) 式および (41) 式を求めた経過をみると、 $A(x_1)$ を x_1 の $(2n+1)$ 乗の項で打ち切ったときには $B(x_1)$ は x_1 の $(2n+2)$ 乗の項で打ち切るのが合理的であると考えられる。 x_1^2 と b_0^2 との間の数値的關係を $-b_0^2 + B(x_1)$ に代入して、これが 0 となるような b_0^2 を数値的に求めることができる。かくして、 n を定めれば $a_1, a_3, \dots, a_{2n+1}, b_2, b_4, \dots, b_{2n+2}$ および b_0^2 が確定し、安定限界曲線が確定することになる。 n を 3 および 4 にとったときの結果を、有効数字 4 で示すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} n &= 3 \\ A(x_1) &= x_1 - 0.2614x_1^3 + 0.007333x_1^5 \\ &\quad - 0.0002730x_1^7 \\ B(x_1) &= 2x_1^2 - 0.4150x_1^4 + 0.07644x_1^6 \\ &\quad - 0.006859x_1^8 \\ b_0^2 &= 4.636 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} n &= 4 \\ A(x_1) &= x_1 - 0.2616x_1^3 + 0.007270x_1^5 \\ &\quad - 0.0002912x_1^7 - 0.00007287x_1^9 \\ B(x_1) &= 2x_1^2 - 0.4156x_1^4 + 0.07632x_1^6 \\ &\quad - 0.006882x_1^8 + 0.00007523x_1^{10} \\ b_0^2 &= 4.646 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

こうして、リミットサイクル $x_2 = c(x_1)$ を計算できるが、 n が 3 の場合と 4 の場合とで、値はきわめて接近

x_1	$c(x_1), n=3$	$c(x_1), n=4$
-2.0	0.495 0	0.381 7
-1.8	1.306	1.279
-1.6	1.867	1.860
-1.4	2.253	2.253
-1.2	2.499	2.501
-1.0	2.626	2.629
-0.8	2.657	2.659
-0.6	2.608	2.611
-0.4	2.498	2.501
-0.2	2.342	2.344
0	2.153	2.155
0.2	1.946	1.948
0.4	1.732	1.734
0.6	1.520	1.523
0.8	1.320	1.323
1.0	1.135	1.138
1.2	0.967 6	0.971 4
1.4	0.814 8	0.819 8
1.6	0.668 6	0.675 9
1.8	0.511 7	0.519 8
2.0	0.283 4	0.251 2
p	2.062	2.036

Table 1 Calculated value of stability boundary curve

し、グラフでは識別しがたいので表の形で比較することにする (Table 1 参照). このことは、 n の値をこの程度に選ぶことによって、十分収束に近い値が得られていることを示している. Fig. 1 は、アナコンによる実験結果の上に、 $n=4$ の場合の計算結果をプロットしたものである. アナコンの解に含まれる 1% 程度の誤差を考えれば、第 1 および第 3 象限でみられる若干のくい違いは、必ずしも近似解の精度に由来しているともいえないであらう. それはともかくとして、きわめて高い精度で安定限界曲線が得られているといっ

5. む す び

逆問題の考えを利用して非線形系の安定限界曲線を

curve : analog computer solution
dot : calculated value for $n=4$

Fig. 1 Calculated value compared with analog computer solution for van der Pol system

求める方法を述べた. この方法は直接的には Liapunov 関数を求めるという考えに依存していないが、根底には Liapunov の安定理論の考えが横たわっており、最後に結果的には、よい Liapunov 関数が求まったという形になっている. この方法には模索的なところがなく、まっすぐに解に到達できるという長所がある. この方法で van der Pol の安定限界曲線を求めたところ、計算量の割に精度の高い近似解が得られることがわかった. また、それほど次数が高くなってよい近似を示す曲線の方程式が得られた.

参 考 文 献

- 1) S.G. Margolis, W.G. Vogt : Control Engineering of Applications of V.I. Zubov's Construction Procedure for Lyapunov Functions, IEEE Trans., AC-8, 104/113 (April-1963)
- 2) G.P. Szegő : A Contribution to Liapunov's Second Method : Nonlinear Autonomous Systems, ASME, Basic Eng., 571/578 (Dec.-1962)
- 3) H. Chestnut, R.W. Meyer : Servomechanisms and Regulating System Design, Sec. 9.2 (John Wiley & Sons-1951)