モーメント法によるプロセス動特性の測定†

上 野 敏 行

東京大学宇宙航空研究所 東京都目黒区駒場 4-6-1

(昭和 43 年 12 月 26 日受付)

Process Identification by Modified Moment Method

Toshiyuki UENO

(Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo, Meguro-ku, Tokyo)

(Received December 26, 1968)

A method is presented by which the modified moments of the impulse response are determined from the exponentially weighted time moments of the input and output of the system or from those of the correlation functions. Modified moments are equal to the coefficients of the Taylor series expansion of the system transfer function about $s = -\alpha$ ($\alpha > 0$). Relations between the coefficients of the Laguerre series expansion of the impulse response and the modified moments are also described.

In this paper, the statistical method of measuring the modified moments is one of the important subjects of investigation, and the precision of the evaluated first moment is estimated statistically for a single lag system. To reduce the statistical variances of the moments, it is recommended to shift the measured correlation function along the time delay axis.

If an appropriate mathematical model for the system is made, the parameters of the model can be determined from the moments. The moment method is extended also to the system in a closed control system.

When the input signal of the system is a white noise, it is shown that the modified moments can be computed continuously on an analog computer without passing through the intermediate step of the correlation functions. That is, the moments of the correlation functions can be determined without the help of a correlator, and this identification method will be applicable to the adaptive control systems.

1. ま え が き

プロセスの動特性を表現したり、測定する方法の 1 つにモーメント法と呼ばれる方法がある。時間モーメントをもとにして、プロセスの近似モデルを作る方法に Paynter-高橋の方法があり¹⁾、堀田²⁾はその方法を発展させている。Goodman ら³⁾は統計的手法により時間モーメントを求める方法を示している。相良ら⁴⁾も時間モーメントを求め、モデルのパラメータを決める方法を示した。しかしプロセスの伝達関数 $G(s)$ の s 平面の原点での Taylor 展開係数を用いるこれらの

方法は、測定誤差が大きくなりやすく、統計的手法による連続測定にさいしては装置の実現をむずかしくしていた。本論文では s 平面の実軸上で正の点 $s = -\alpha$ で展開して動特性測定を行なう方法を示す⁵⁾。堀田ら^{6), 7)}はモデルの作り方および展開の中心 α の選び方について考察しているが、本論文では統計的手法による測定法を中心に、一般化モーメント法あるいは変形モーメント法ともいふべき方法について述べることにする。

2. 基 本 原 理

インパルス応答が $g(t)$ となる線形定係数系に入力信号 $x(t)$ が加えられたとき、出力 $y(t)$ は (1) 式になる。ただし初期条件は 0 とする (Fig. 1 参照)。

* 第 4 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 40・7・19)

Fig. 1 Relation between input and output signal of the system

$$g(t) = \int_0^\infty g(\lambda) x(t-\lambda) d\lambda \quad (1)$$

$x(t)$, $y(t)$, $g(t)$ に対して次の積分を定めることができるように s を選ぶ。

$$X(s) = \int_{-\infty}^\infty x(t) e^{-st} dt \quad (2)$$

$$Y(s) = \int_{-\infty}^\infty y(t) e^{-st} dt \quad (3)$$

$$G(s) = \int_{-\infty}^\infty g(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt \quad (4)$$

このとき (5) 式の関係が成立する。

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) \quad (5)$$

$X(s)$, $Y(s)$, $G(s)$ が s に関して n 階微分可能であるとすると, $s=\alpha$ での n 次微係数の $(-1)^n$ 倍を $X_n(\alpha)$, $Y_n(\alpha)$, $G_n(\alpha)$ とすれば (それぞれ変形モーメントと名づける),

$$X_n(\alpha) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} X(s) \Big|_{s=\alpha} = \int_{-\infty}^\infty x(t) t^n e^{-\alpha t} dt \quad (6)$$

$$Y_n(\alpha) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} Y(s) \Big|_{s=\alpha} = \int_{-\infty}^\infty y(t) t^n e^{-\alpha t} dt \quad (7)$$

$$G_n(\alpha) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} G(s) \Big|_{s=\alpha} = \int_0^\infty g(t) t^n e^{-\alpha t} dt \quad (8)$$

$X_n(\alpha)$, $Y_n(\alpha)$, $G_n(\alpha)$ の間には次の関係がある ((5) 式を微分して $s=\alpha$ とおけばよい)。

$$Y_n(\alpha) = \sum_{r=0}^n n C_r G_{n-r}(\alpha) X_r(\alpha) \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

特に $x(t)$ がデルタ関数のときには $y(t)=g(t)$ であるから,

$$Y_n(\alpha) = G_n(\alpha) \quad (10)$$

以上のことは確定的 (deterministic) な信号について成立するばかりでなく, 統計的解析法に拡張される。ある系の入出力信号 $i(t)$, $o(t)$ が定常不規則信号であるとすると, 入力信号の自己相関関数 $\phi_{ii}(\tau)$, 入出力信号の相互相関関数 $\phi_{io}(\tau)$ を定めることができる。信号の平均値は 0 とする (Fig. 1 参照)。

$$\phi_{ii}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i(t) i(t+\tau) dt \quad (11)$$

$$\phi_{io}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i(t) o(t+\tau) dt \quad (12)$$

系のインパルス応答 $g(t)$ との間には,

$$\phi_{io}(\tau) = \int_0^\infty g(\lambda) \phi_{ii}(\tau-\lambda) d\lambda \quad (13)$$

の関係があるので (14), (15) 式の積分が存在するとき

には, 変形モーメント $X_n(\alpha)$, $Y_n(\alpha)$ を定めることができ, (1) 式で $x(t)=\phi_{ii}(t)$, $y(t)=\phi_{io}(t)$ と考えれば, 前とまったく同じ関係式 (9) が成立する。

$$X_n(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty \phi_{ii}(\tau) \tau^n e^{-\alpha \tau} d\tau \quad (14)$$

$$Y_n(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty \phi_{io}(\tau) \tau^n e^{-\alpha \tau} d\tau \quad (15)$$

$X_n(\alpha)$, $Y_n(\alpha)$ を求めて, (9) 式の関係式よりインパルス応答の変形モーメント $G_n(\alpha)$ が求まる。

Goodman や相良らの方法は $\alpha=0$ としたことに相当するが, 本論文では α は正の実数とする。

$G_n(\alpha)$ はインパルス応答に $e^{-\alpha t} t^n$ の重みをつけて平均したものとなり, インパルス応答のある評価値になっている。それはまた, $G(s)$ を $s=\alpha$ で Taylor 展開したときの係数である。すなわち,

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty g(t) e^{-\alpha t} e^{-(s-\alpha)t} dt \\ &= \int_0^\infty g(t) e^{-\alpha t} dt \left[1 - t(s-\alpha) + \frac{t^2}{2!} (s-\alpha)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{t^3}{3!} (s-\alpha)^3 + \dots \right] \\ &= G_0(\alpha) - G_1(\alpha) (s-\alpha) + \frac{G_2(\alpha)}{2!} (s-\alpha)^2 \\ &\quad - \frac{G_3(\alpha)}{3!} (s-\alpha)^3 + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

さらに, $G_n(\alpha)$ は $g(t)$ を Laguerre 級数展開したときの係数と密接な関係がある。

n 次の Laguerre 級数 $L_n(t)$ を (17) 式とすると, (18) 式の $\varphi_k(t)$ は正規直交系を構成する。

$$L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) = \sum_{r=0}^n (-1)^r n C_r \frac{t^r}{r!} \quad (17)$$

$$\varphi_k(t) = \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha t} L_k(2\alpha t) \quad (18)$$

$$\int_0^\infty \varphi_i(t) \varphi_k(t) dt = \delta_{ik} \quad (19)$$

$g(t)$ を $\varphi_k(t)$ で展開したとき, 展開の係数 A_k は (21) 式で与えられる。

$$g(t) = \sum_{k=0}^\infty A_k \varphi_k(t) \quad (20)$$

$$A_k = \int_0^\infty g(t) \varphi_k(t) dt \quad (21)$$

したがって A_k と $G_n(\alpha)$ の間には次のような関係がある。

$$A_k = \sqrt{2\alpha} \sum_{r=0}^k \frac{(-1)^r}{r!} n C_r (2\alpha)^k G_k(\alpha) \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

対象とする系を適当な伝達関数をもつモデルで近似すると, $G_n(\alpha)$ をもとにして伝達関数のパラメータを求めることができる。次にいくつかの代表的伝達関数と変形モーメント間の関係を示しておく。パラメー

タを求めるのに便利な関係式も同時に示す。

a)

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{ke^{-T_D s}}{1+T_L s} & G_0(\alpha) &= \frac{ke^{-T_D \alpha}}{1+T_L \alpha} \\ G_1(\alpha) &= k \frac{(T_D + T_L + T_D T_L \alpha)}{(1+T_L \alpha)^2} \cdot e^{-T_D \alpha} \\ G_2(\alpha) &= k \cdot \frac{T_D^2(1+T_L \alpha)^2 + 2T_L(T_D + T_L + T_D T_L \alpha)}{(1+T_L \alpha)^3} \\ &\quad \times e^{-T_D \alpha} \\ \frac{T_L}{1+T_L \alpha} &= \sqrt{\frac{G_2(\alpha)}{G_0(\alpha)} - \left(\frac{G_1(\alpha)}{G_0(\alpha)}\right)^2} \\ T_D &= \frac{G_1(\alpha)}{G_0(\alpha)} - \frac{T_L}{1+T_L \alpha} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} & G_0(\alpha) &= \frac{k\omega_n^2}{\alpha^2 + 2\zeta\omega_n \alpha + \omega_n^2} \\ G_1(\alpha) &= 2k\omega_n^2 \frac{(\alpha + \zeta\omega_n)}{(\alpha^2 + 2\zeta\omega_n \alpha + \omega_n^2)} \\ G_2(\alpha) &= 2k\omega_n^2 \frac{4(\alpha + \zeta\omega_n)^2 - (\alpha^2 + 2\zeta\omega_n \alpha + \omega_n^2)}{(\alpha^2 + 2\zeta\omega_n \alpha + \omega_n^2)^3} \\ \frac{1}{\alpha + \zeta\omega_n} &= 2 \frac{G_1(\alpha)}{G_0(\alpha)} - \frac{G_2(\alpha)}{G_1(\alpha)} \\ \frac{1}{\alpha^2 + 2\zeta\omega_n \alpha + \omega_n^2} &= \frac{1}{2(\alpha + \zeta\omega_n)} \frac{G_1(\alpha)}{G_0(\alpha)} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{e^{-T_D s}}{Ts} & G_0(\alpha) &= \frac{e^{-T_D \alpha}}{T\alpha} \\ G_1(\alpha) &= \frac{1}{T\alpha} \left(T_D + \frac{1}{\alpha}\right) e^{-T_D \alpha} \\ G_2(\alpha) &= \frac{1}{T\alpha} \left(T_D^2 + \frac{T_D}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right) e^{-T_D \alpha} \\ T_D &= \frac{G_1(\alpha)}{G_0(\alpha)} - \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

3. 変形モーメント測定とその誤差

以下で統計的手法により変形モーメントを求めるさいの問題点を考察する。(15)式で与えられる相互相関関数のモーメントを実際に計算するさいには、相関関数の計算には有限時間 T のデータを用い、 τ についての積分は $-b$ から a までの範囲をとることとする。このようにして求めたモーメントの測定値 $Y_n^*(\alpha)$ がいかなる性質をもつかを調べよう。測定した相関関数 $\phi_{i0}^*(\tau)$ を用いて $Y_n^*(\alpha)$ を求めると、

$$Y_n^*(\alpha) = \int_{-b}^a \phi_{i0}^*(\tau) \tau^n e^{-\alpha \tau} d\tau \quad (23)$$

測定した $Y_n^*(\alpha)$ の誤差は2つに分けて考えられる。1つは有限の長さのデータを用いたことによる統計的誤差と、 τ についての積分が $-b$ から a までの範囲であるために、 $Y_n^*(\alpha)$ の期待値が偏差を持つことである。統計的誤差はパラメータ a , b や α によっても

影響を受ける。 a や α をどのように選べばよいかの目安をつけるため、1次おくれ系の例について $Y_1^*(\alpha)$ の誤差を計算した。

測定対象の系のインパルス応答は $g(t) = (1/T_L)e^{-t/T_L}$ 、系には外乱信号として平均値が0で、パワースペクトルが $N/(1+T_L^2\omega^2)$ の雑音が出力信号に加わっていると仮定する。系の入力信号は自己相関関数が $\phi_{ii}(\tau) = S\delta(\tau)$ の白色雑音とする ($\tau < 0$ では $\phi_{ii}(\tau) = 0$ なので (23) 式の $b=0$ とすることができる)。このとき出力信号の自己相関関数は $\phi_{oo}(\tau) = (1/T_L)(S+N)e^{-|\tau|/T_L}$ となっている。系の1次モーメントは、(10), (23) 式より、

$$\begin{aligned} G_1^*(\alpha) &= \frac{1}{S} Y_1^*(\alpha) = \frac{1}{S} \int_0^a \tau e^{-\alpha \tau} \left[\frac{1}{T} \int_{t-T}^t i(t-\tau) \right. \\ &\quad \left. \times o(t) dt \right] d\tau \end{aligned} \quad (24)$$

として求められる。

$G_1^*(\alpha)$ の期待値および分散 σ^2 は次のように求められる。

$$\begin{aligned} E[G_1^*(\alpha)] &= \frac{1}{S} \int_0^a \tau e^{-\alpha \tau} E[\phi_{io}^*(\tau)] d\tau \\ &= \frac{1}{S} \int_0^a \tau e^{-\alpha \tau} \cdot S \frac{e^{-\tau/T_L}}{T_L} d\tau \\ &= \frac{T_L}{(1+\alpha T_L)^2} \left[1 - e^{-(\alpha+1/T_L)a} \left(a + \frac{T_L}{1+\alpha T_L} \right) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$a \rightarrow \infty$ とすれば、

$$E[G_1^*(\alpha)] = G_1(\alpha) = \frac{T_L}{(1+\alpha T_L)^2} = \frac{T_L''^2}{T_L} \quad (26)$$

信号をガウス性としたとき、

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[\{G_1^*(\alpha)\}^2] - \{E[G_1^*(\alpha)]\}^2 \\ &= \left(\frac{T_L''^2}{T_L}\right)^2 \cdot \frac{T_L}{T} \left[\left(1 + \frac{N}{S}\right) \left[\frac{T_L}{2T_L''} \left\{ \frac{T_L'}{T_L} \frac{T_L'}{T_L''} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1 + \frac{T_L'}{T_L''}}{4\alpha T_L (\alpha T_L'')^2} + \frac{1 - \left(\frac{T_L'}{T_L''}\right)^2}{4\alpha T_L \cdot \alpha T_L''} \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{T_L'}{T_L''}\right)^2 \left(1 + \frac{a}{T_L''}\right) e^{-a/T_L''} - \frac{T_L}{2T_L''} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{T_L'}{T_L''}\right)^2}{2\alpha T_L} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times \left(\frac{a}{T_L''} + \frac{1}{2\alpha T_L''}\right) + \frac{T_L'}{T_L} \left(1 + \frac{a}{T_L''}\right) \left(\frac{a}{T_L''} - \frac{T_L'}{T_L''}\right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1 + \frac{T_L'}{T_L''}}{2\alpha T_L} \left(\left(\frac{a}{T_L''}\right)^2 + \frac{1}{\alpha T_L''} \frac{a}{T_L''}\right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2(\alpha T_L'')^2} \right\} \right] e^{-2\alpha a} \right] \\ &\quad + \frac{T_L''}{T_L} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{a}{T_L''}\right) e^{-a/T_L''} \right\} \left\{ 4 - \left(2\left(\frac{a}{T_L''}\right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4\frac{a}{T_L''} + 4\right) e^{-a/T_L''} \right\} \end{aligned}$$

Fig. 2 Measurement of the first moment for a single lag system, $T = 1000 T_L$, (a), (b) expected distribution of $G_1^*(\alpha)$, ($N/S=0$), (c) variance of $G_1^*(\alpha)$ ($a \rightarrow \infty$) where $\sigma' = \sigma/(T_L''^2/T_L)$

Fig. 3 Cross-correlation function $\phi_{10}^*(\tau)$ and weighting function $\tau e^{-\alpha\tau}$

$$+ \frac{T_L}{T} \left(\frac{T_L''}{T_L} \right)^2 \left\{ 1 - \left(1 + \frac{a}{T_L''} \right) e^{-a/T_L''} \right\} \left\{ -6 + \left(\left(\frac{a}{T_L''} \right)^3 + 3 \left(\frac{a}{T_L''} \right)^2 + 6 \left(\frac{a}{T_L''} \right) + 6 \right) e^{-a/T_L''} \right\} \quad (27)$$

ただし,

$$\frac{1}{T_L'} = \frac{1}{T_L} - \alpha, \quad \frac{1}{T_L''} = \frac{1}{T_L} + \alpha, \quad \alpha \approx \frac{1}{T_L}$$

ある α と T について, a を変化させたときの $E[G_1^*(\alpha)]$ と σ を Fig. 2 に示した. また $a \rightarrow \infty$ としたときの σ の大きさを α について示したのが Fig. 2 (c) である. a が小さいときには測定値は偏差を生ずるが, 測定値の分散 σ^2 は a が大きいときに比べて小さい.

Fig. 3 に示すように, $G_1^*(\alpha)$ を求めるのに相互相関

関数 $\phi_{10}^*(\tau)$ を, $\tau e^{-\alpha\tau}$ の重みをつけて積分している. a を大きくしていくと, 相関関数の値が小さくなりほとんど統計的な変動しか示していない所まで積分されるので測定値の分散 σ^2 が大きくなるわけである. 重み $\tau e^{-\alpha\tau}$ は $1/\alpha$ でその値が最大となるから, α を小さくすると特に相関関数の値が小さくなるような部分が強調されるので分散が大きくなる. 相関関数を計算するのに用いるデータの長さ T を大きくすれば, モーメント測定の分散は $1/T$ に比例して小さくすることができる.

なお, $\alpha = 0$ とした場合には, 測定値 $G_1^*(0)$ の分散 σ^2 の性質は, $\alpha > 0$ の場合と比較して非常に異なってくる. Goodman ら³⁾ は $G_1^*(0)$ の分散を求める式を示しているが, それは (27) 式を求めるさいに, $N=0$, $\alpha=0$ として計算したものに等しい. それによれば, a を大きくすると, $E[G_1^*(0)]$ は真値に近づくが, その分散 σ^2 は急激に増大する. T を一定にして $a \rightarrow \infty$ とすれば $\sigma^2 \rightarrow \infty$ となってしまう (Fig. 2 (c) 参照). その理由は明らかである. すなわち, $G_1^*(0)$ を求めるためには測定した相関関数 $\phi_{10}^*(\tau)$ に $\tau \geq 0$ について, τ の重みをかけて積分する. そのため相関関数の値が小さく, 誤差の成分しか示していない所に大きな重みがかかり, σ^2 は a を大きくすると大きくなるわけである. a を大きくすると σ^2 が大きくなるのは $\alpha > 0$ の場合でも同様であるが, $\tau e^{-\alpha\tau}$ の重みは τ が大きな所では十分に小さくなり, a を大きくしていても σ^2 は一定値に近づくわけである. したがって $\alpha = 0$ とした場合には, 偏差を小さくするためには a をできるだけ大きくしなければならないが, 分散 σ^2 が増加するため a は大きくすることはできない. σ^2 を小さくするためには, T を大きくしなければならない. これが $\alpha = 0$ とする方法の大きな問題点であった. $\alpha > 0$ を導入したことにより, τ 軸上のどの点で積分を打ち切るかをきめるパラメータ a の測定値への影響を少なくすることができる. また分散 σ^2 自身も $\alpha = 0$ のときに比較して小さくなっている. さらに, 次に示すように入力信号が白色である場合には, Goodman らは Delay line synthesizer を用いなければならないのに対して³⁾, 1次フィルタによる変形モーメントの連続測定が可能になっている.

アナログ要素によるモーメントの連続測定を行なうには次のようにすればよい. (23) 式において $b=0$, $a \rightarrow \infty$ とすれば,

$$G_n^*(\alpha) = \frac{1}{S} Y_n^*(\alpha) = \frac{1}{S} \int_0^\infty \tau^n e^{-\alpha\tau} \left[\frac{1}{T} \int_{t-T}^t i(t-\tau) o(t) dt \right] d\tau$$

Fig. 4 Block diagram for measurement of modified moments

$$= \frac{1}{S} \cdot \frac{1}{T} \int_{t-T}^t o(t) \left[\int_0^\infty \tau^n e^{-\alpha \tau} i(t-\tau) d\tau \right] dt \quad (28)$$

すなわちこの場合、 $G_n^*(\alpha)$ は $i(t)$ をインパルス応答が $t^n e^{-\alpha t}$ (伝達関数は $n!/(s+\alpha)^{n+1}$) となるフィルタに入れ、その出力と $o(t)$ の積を T 時間平均したものに他ならない。Fig. 4 のようなブロック図でモーメントの連続測定が可能である。したがってこのような方法で適応制御系を構成することができるであろう。

4. 測定値の分散を小さくする方法

3. で示した $G_1^*(0)$ の分散 σ^2 の計算では、入力信号が白色で対象が 1 次系のため、 $\tau < 0$ では相互相関関数 $\phi_{io}(\tau)$ が存在せず、 $\tau > 0$ の部分では $\phi_{io}(\tau)$ は指数関数的に小さくなる。このため、 α を大きくすると相関関数の大きな所に大きな重みがかかることになり、(Fig. 3 参照) それが σ^2 を小さくする理由であった。また、 $\alpha = 0$ とすると $\alpha \rightarrow \infty$ でモーメントの測定値の分散は無限大になってしまうことは、すでに述べたとおりである。

これらのことから、相関関数の大きな所には大きな重みをかけ、小さな所には小さな重みをかけて積分すれば、統計的分散が小さくなることが予想される。

したがって α を正の実数としてモーメントを測定する方法は $\tau < 0$ の範囲で相関関数が 0 でない場合に、 $\tau < 0$ の部分には大きな重みがかかることになり、測定値の分散を大きくする。特に自己相関関数のモーメントを求めるときに問題になる。そこで次のように τ 軸上で相関関数をずらして計算することを考えてみよう。

(29) 式が成立しているとき、 $x(t)$ を $b > 0$ だけずらせた $x(t-b)$ については (30) 式が成立する。

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (29)$$

$$X(s) e^{-sb} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-b) e^{-st} dt \quad (30)$$

$X_n(b; \alpha)$ を (31) 式のように定める。

$$X_n(b, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-b) t^n e^{-\alpha t} dt \quad (31)$$

(30) 式を s について微分して $s = \alpha$ とおき、(6) 式を考慮すれば、

$$\sum_{r=0}^n n C_r X_{n-r}(\alpha) b^r e^{-\alpha b} = X_n(b, \alpha) \quad (32)$$

(32) 式により $X_n(b, \alpha)$ を測定してから $X_n(\alpha)$ を求めることができる。 $Y_n(b, \alpha)$, $Y_n(\alpha)$ についても同様な関係があることは明らかである。

$\phi_{ii}(\tau)$, $\phi_{io}(\tau)$ を同じ b だけずらして、 $\tau < 0$ の部分では $\phi_{ii}(\tau-b) \doteq 0$, $\phi_{io}(\tau-b) \doteq 0$ と考えられる場合には、

$$\phi_{io}(\tau-b) = \int_0^\infty g(\lambda) \phi_{ii}(\tau-b-\lambda) d\lambda \quad (33)$$

が成立するから、(1) 式の $x(t) = \phi_{ii}(\tau-b)$, $y(t) = \phi_{io}(\tau-b)$ と考えれば、(32) 式により $X_n(\alpha)$, $Y_n(\alpha)$ を求めるまでもなく、(9) 式より $G_n(\alpha)$ を求めることができる。

Fig. 4 による連続測定に対しては出力信号 $o(t)$ に b のむだ時間をいれればよい。

Fig. 5 $\tau^n e^{-\alpha \tau}$ for $n=0, 1, 2$ and $\alpha=1$

b は相関関数が $\tau < 0$ で 0 とみなせる程度にとるとして、 α はどのように選んだらよいであろうか。 $\tau^n e^{-\alpha \tau}$ を $\tau \geq 0$ の範囲について Fig. 5 に示した。 $\tau \geq 0$ では n/α で最大値をとる曲線となる。 α を大きくすると $\phi(\tau-b)$ の τ が小さな所に大きな重みをつけることになる。逆に α を小さくすれば $\phi(\tau-b)$ の τ の大きな所に大きな重みをつけることになる。 $n=1$ または $n=2$ のとき適当と思われる α でも、 $n=0$ を求めるには不適当となることもあるから、相関関数の形によって注意して α をきめなければならない。

3. で示した $G_1^*(\alpha)$ の分散によれば、 α は大きいほうがよいことになるが、これはいわば特別な場合であって一般的ではない。測定のだいたいの分散を与えるものと解釈すべきものである。実際に、6. の応用例で α をきめるには、Fig. 5 の関係を考慮に入れて α をきめている。

$n=0, 1, 2, \dots$ の変形モーメント $G_n(\alpha)$ は次数の低いほうから順々に求まるので、 $n=0$ のモーメントの誤差が大きいとつぎつぎに誤差を生ずる。またそれゆえ

に, $G_n(\alpha)$ の測定誤差の見積りをむずかしくしている. けっきょく $\tau^n e^{-\alpha\tau}$ は n/α で最大になることに注意して, 相関関数の大きくなる所にはなるべく大きな重みをかけるように α をきめるのがよいことになる. これは決定的信号からモーメントを求める場合についても言えることである.

なお, 堀田ら⁷⁾は本論文とは異なる観点から $G_n(\alpha)$ の測定を論じており, α の選び方についても検討している.

5. 閉ループ内プロセスの動特性測定法

プロセスに制御装置が付加されて Fig. 6 のような

Fig. 6 A typical feedback control system

フィードバック制御が行なわれているときに, 系を運転状態のままでプロセス G_p の動特性を測定することを考えてみよう. 制御装置は外乱を打消すような操作を行なうから, プロセスの入力 m と外乱 n とは相関がある. このようにループが閉じているときには, 系に自然に存在する信号を用いてプロセスの動特性を測ることは困難で, 外乱 n とは無相関の外部入力 (テストシグナル) を必要とする. テストシグナル t とプロセス入力 m との相互相関関数 $\phi_{tm}(\tau)$, t とプロセス出力 c との相関関数 $\phi_{tc}(\tau)$ を求めると, プロセス G_p の動特性測定が可能になる⁹⁾. すなわち $c(t)$ は,

$$c(t) = \int_0^\infty g_p(\lambda) m(t-\lambda) d\lambda + n(t) \quad (34)$$

と表わされるので, $n(t)$ と独立な信号 $t(t)$ を選べば,

$$\phi_{tc}(\tau) = \int_0^\infty g_p(\lambda) \phi_{tm}(\tau-\lambda) d\lambda \quad (35)$$

$x(t) = \phi_{tm}(t)$, $y(t) = \phi_{tc}(t)$ とみなすことにより, 本章までに述べられた方法に従って, $\phi_{tm}(\tau)$, $\phi_{tc}(\tau)$ の変形モーメントより $g_p(t)$ の変形モーメントを求めることができる.

6. 実験例

6.1 パルステスト法への応用

2 次振動系をアナログ計算機上に設定し, 矩形パルス $x(t)$ を入れて, 出力 $y(t)$ を記録し, 系の変形モーメント $G_n(\alpha)$ を求める. $G_n(\alpha)$ の値よりパラメータの推定を行なった (Fig. 7 参照). $x(t)$ については大きさは記録から読みとり, $0 \leq t \leq 2.05$ s の間で定積分により $X_n(\alpha)$ を求め, $y(t)$ については $\Delta t = 0.5$ s

Fig. 7 Block diagram of the system, and records of $x(t)$ and $y(t)$

$$k=1.0 \quad \omega_n=0.984 [\text{rad/s}], \quad \xi=0.407$$

ごとの値を読みとり, $0 \leq t \leq 11.5$ s の範囲でシンプソン則により積分を求めた. これを次のように表わすことにする.

$x(t) : 0 \leq t \leq 2.05$ (定積分), $y(t) : 0 \leq t \leq 11.5$ ($\Delta t = 0.5$) $\alpha = 0.5$ 1/s として,

$$X_0(\alpha) = 0.962, \quad X_1(\alpha) = 0.820, \quad X_2(\alpha) = 1.019$$

$$Y_0(\alpha) = 0.545, \quad Y_1(\alpha) = 1.118, \quad Y_2(\alpha) = 2.525$$

これらより (9) 式, および 1. b) の関係式を用いて,

$$\begin{cases} G_0(\alpha) = 0.567 (0.598) & G_1(\alpha) = 0.679 (0.666) \\ G_2(\alpha) = 0.867 (0.740) \\ k = 0.994 (1.0) & \omega_n = 0.921 (0.984) [\text{rad/s}] \\ \zeta = 0.428 (0.407) \end{cases}$$

ただし () 内の数値はアナコン上に設定された値, およびそれから計算された $G_n(\alpha)$ の値である.

6.2 統計的測定法

実験はアナログ計算機上に作られたプロセスに対して行なわれた. 白色雑音源としては放射線源を利用して作られた $0 \sim 10$ Hz までは一定とみなせるスペクトルを持つ 2 進不規則信号を用いた⁹⁾. 相関関数の計算には, デジタル形相関器¹⁰⁾を用いた. 相関器では自乗平均で正規化された相関係数を求めるのが便利であり, グラフに表示しやすい. また, 計算に用いるデータは倍率器を経てデータレコーダに録音されている. このとき測定された相関係数 $\rho(\tau)$ を用いてプロセスの動特性を求めるには, 次の関係を利用すればよい (Fig. 8 参照).

Fig. 8 Recording of the signals

$$\rho_{i^*o^*}(\tau) = \frac{\sqrt{i^{*2} \cdot o^{*2}}}{\sqrt{i^{*2} \cdot o^{*2}}} \frac{k_2}{k_1} \int_0^\infty g(\lambda) \rho_{i^*i^*}(\tau - \lambda) d\lambda \quad (36)$$

$$\rho_{i^*c^*}(\tau) = \frac{\sqrt{i^{*2} \cdot m^{*2}}}{\sqrt{i^{*2} \cdot c^{*2}}} \frac{k_3}{k_2} \int_0^\infty g(\lambda) \rho_{i^*m^*}(\tau - \lambda) d\lambda \quad (37)$$

以下の実験では相関関数はすべて相関係数 $\rho(\tau)$ として図示し、求めた $X_n(\alpha)$, $Y_n(\alpha)$ も $\rho(\tau)$ に時間荷重積分を行なったものであるが、 $G_n(\alpha)$ は (36), (37) 式により求めたプロセスのそれである。

Fig. 9 Block diagram of the system and correlation Coefficients, $T=430$ [s]

a) 1次おくれ系 (Fig. 9 参照) $\rho_{i^*i^*}(\tau)$, $\rho_{i^*o^*}(\tau)$ をともに $b=0.32$ s ずらせたので 4. にも述べたように, $X_n(\alpha) = X_n(b, \alpha)$, $Y_n(\alpha) = Y_n(b, \alpha)$ として (9) 式により $G_n(\alpha)$ を求めればよい.

$$\rho_{i^*i^*}(\tau) : -0.32 \leq \tau \leq 0.32 \quad (\Delta\tau=0.02) \quad b=0.32 \text{ [s]}$$

$$\rho_{i^*o^*}(\tau) : -0.32 \leq \tau \leq 0.58 \quad (\Delta\tau=0.02) \quad b=0.32 \text{ [s]}$$

$\alpha=2.5$ [1/s] として,

$$X_0(b, \alpha) = 0.08516, \quad X_1(b, \alpha) = 0.02480$$

$$Y_0(b, \alpha) = 0.09691, \quad Y_1(b, \alpha) = 0.03533$$

これより $G_n(\alpha)$ は,

$$\begin{cases} G_0(\alpha) = 0.962(0.8), & G_1(\alpha) = 0.0705(0.064) \\ k = 1.17(1.0), & T_L = 0.09(0.1) \text{ s} \end{cases}$$

ただしカッコ内は、アナコンの設定値から計算される $G_n(\alpha)$ の期待値である。同時に系のパラメータも求められた。

b) 2次おくれ系 (Fig. 10 参照) 大きな外乱信

$$k=1.0, \quad \omega_n=10 \text{ [rad/s]}, \quad \xi=0.6$$

Fig. 10 Block diagram of the system and correlation coefficients, $T=570$ [s]

号のある系で測定する。テストシグナル $i(t)$ は出力 $o(t)$ の記録を見ていてその影響がわからない程度に入れる。

$$\rho_{i^*i^*}(\tau) : -0.68 \leq \tau \leq 0.68 \quad (\Delta\tau=0.04) \quad b=0.68 \text{ [s]}$$

$$\rho_{i^*i^*}(\tau) : -0.68 \leq \tau \leq 1.20 \quad (\Delta\tau=0.04) \quad b=0.68 \text{ [s]}$$

$$\alpha=2.0 \text{ [1/s]}$$

$$X_0(b, \alpha) = 2.9618, \quad X_1(b, \alpha) = 1.7149,$$

$$X_2(b, \alpha) = 1.1476,$$

$$Y_0(b, \alpha) = 1.4622, \quad Y_1(b, \alpha) = 1.0117,$$

$$Y_2(b, \alpha) = 0.7726$$

$$G_0(\alpha) = 0.818(0.782), \quad G_1(\alpha) = 0.0922(0.0978)$$

$$G_2(\alpha) = 0.00827(0.0122)$$

$$k=1.01(1.0), \quad \omega_n=10.2(10.0) \text{ [rad/s]}$$

$$\zeta=0.525(0.60)$$

c) 閉ループ内プロセスの測定 (Fig. 11 参照)

テストシグナルには m 系列信号 ($n=6$ 段, シフトパルス 2.5 Hz) を利用した。テストシグナルは系の設定値 $r(t)$ ($r=0$) に重ねて、その大きさは制御量 $c(t)$ には影響がほとんどない程度とした (Fig. 12 参照)。

$$\rho_{i^*m^*}(\tau) : -0.5 \leq \tau \leq 3.9 \quad (\Delta\tau=0.1) \quad b=0.5 \text{ [s]}$$

$$\rho_{i^*c^*}(\tau) : 0 \leq \tau \leq 5.0 \quad (\Delta\tau=0.1) \quad b=0 \text{ [s]}$$

$\alpha=1.25$ [1/s] として,

$$X_0(\alpha) = 0.4430, \quad X_1(\alpha) = 0.04381,$$

$$X_2(\alpha) = 0.06983$$

Fig. 11 Block diagram of the system and correlation coefficients, $T=710$ [s]

Fig. 12 A record of signals

$$Y_0(\alpha) = 0.0994, \quad Y_1(\alpha) = 0.1213,$$

$$Y_2(\alpha) = 0.1767$$

$$\left[\begin{array}{l} G_0(\alpha) = 0.194(0.222), \quad G_1(\alpha) = 0.217(0.239) \\ G_2(\alpha) = 0.271(0.287) \\ k = 0.924(1.0), \quad T_L = 0.702(0.7) \text{ s} \\ T_D = 0.747(0.7) \end{array} \right.$$

Fig. 13 Block diagram of the system and correlation coefficients, $T=710$ [s]

d) 閉ループ内プロセスの測定 (Fig. 13 参照) むだ時間と積分からなる系について同様の測定を行なった。この例のように変形モーメント法は無定位系についてもそのまま適用しうることは注目に値しよう。測定した τ の範囲で相関関数は十分減衰していないように思えるが、重み関数が十分小さくなるのでこれでよいと考えられる。

$$\rho_{t^*m^*}(\tau) : -0.7 \leq \tau \leq 4.9 \quad (\Delta\tau = 0.1) \quad b = 0.7 \text{ [s]}$$

$$\rho_{t^*c^*}(\tau) : 0 \leq \tau \leq 5.4 \quad (\Delta\tau = 0.1) \quad b = 0 \text{ [s]}$$

$\alpha = 1.0$ [1/s] として、

$$X_0(b, \alpha) = 0.05931, \quad X_1(b, \alpha) = -0.002417$$

$$X_0(\alpha) = 0.1195, \quad X_1(\alpha) = -0.08846$$

$$Y_0(\alpha) = 0.09013, \quad Y_1(\alpha) = 0.09120$$

$$\left[\begin{array}{l} G_0(\alpha) = 0.482(0.497), \quad G_1(\alpha) = 0.844(0.844) \\ T_D = 0.75(0.7) \text{ s}, \quad T = 0.98(1.0) \text{ s} \end{array} \right.$$

3. で検討したモーメント測定の誤差は、いわば $Y_1(\alpha)$ についての誤差であり、 $X_n(\alpha)$ を実際に測定し、 $G_n(\alpha)$ を求めた場合には決してそのまま適用することはできない。しかし一応の誤差の目安として認めることにすれば、実験例での測定誤差は許しうる範囲にはいっているといえよう。

7. む す び

インパルス応答の重みつき時間荷重積分 (変形モーメント) を求める方法について述べた。特に統計的手法を用いて測定する場合について、測定値の分散をなるべく小さくする方法を考え、検討し、アナログ計算機による実験を行なった。更に閉ループ内の系の動特性測定にも応用した。変形モーメントの手法は計算量が比較的少なくすみ、モデルを仮定してパラメータを求めることもできる。また入力信号が白色雑音のときには相関関数を求めてから荷重積分を計算したと同じものが、アナログ要素により連続的に測定することが可能であり、原理的には相関的手法を用いているにもかかわらず、その場合には相関器を要しない。したがって適応制御での動特性測定としても役立であらう。

終わりに終始ご指導くださった東京大学宇宙航空研究所、五十嵐寿一教授、石井 泰助教授に深く感謝します。

引 用 文 献

- 1) H. M. Paynter, Y. Takahashi: A New Method of Evaluating Dynamic Response of Counterflow and Parallel-Flow Heat Exchangers, Trans. ASME, 78-8, 749/758 (1956)
- 2) 堀田和之: プロセス要素のアナログ計算機用低周波モデルの作成法, 日本機械学会論文集, 28-194, 1415/1422 (1962)
- 3) T. P. Goodman, R. H. Hillsley: Continuous Measurement of Characteristics of Systems with Random Inputs, Trans. ASME, 80-8, 1839/1848 (1958)
- 4) 相良節夫, 沖田豪: 時間モーメントによる伝達関数の決定, 計測自動制御学会論文集, 4-1, 83/88 (1968)
- 5) 上野敏行: モーメント法によるプロセス動特性の測定, 計測自動制御学会第4回学術講演会予稿集, 453/456 (1965)
- 6) 堀田和之・尾添紘之・井伊谷鋼一: 線形な動的モデル作成に関する一般化されたモーメント法, 計測自動制御学会論文集, 4-2, 143/149 (1968)
- 7) 堀田和之・尾添紘之・井伊谷鋼一: システムのおくれ次数の判定法, 計測自動制御学会論文集, 4-3, 265/270 (1968)
- 8) B. B. ソロドフニコフ, A. C. ウスコフ著, 古屋・安達共訳: 自動制御系の統計的解析法, p. 99 (1963・コロナ社)
- 9) 上野敏行: 放射線源を用いた低周波不規則信号発生器, 自動制御, 3-7, 217/222 (1964)
- 10) 五十嵐寿一・石井泰・杉山清春: デジタル型相関器の試作, 計測と制御, 3-7, 529/540 (1964)