状態依存性雑音を受ける非線形系に対する状態変数の推定[†]

砂 原 善 文・山 下 晃 司

京都工芸繊維大学 京都市左京区松ヶ崎海道町

(昭和 44 年 2 月 19 日受付)

An Approximate Method of State Estimation for Nonlinear Dynamical Systems with State-Dependent Noise

Yoshifumi SUNAHARA and Koji YAMASHITA

(Faculty of Polytechnic Sciences, Kyoto Institute of Technology, Kyoto)

(Received February 19, 1969)

In this paper, a method of stochastic linearization is demonstrated for the purpose of establishing an approximate approach to solve filtering problems of nonlinear stochastic systems with state-dependent noise in the Markovian framework.

The models of both the dynamical system and the observation process are described by nonlinear stochastic differential equations of Itô-type.

The principal line of attack is to expand the nonlinear drift term into a certain linear function with the coefficients which are determined under the minimal squared error criterion. Two methods of linearization are developed for the nonlinear diffusion term. The linearized models are thus characterized by the expansion coefficients dependent on both the state estimate and the error covariance.

A method is given for the simultaneous treatments of approximate structure of state estimator dynamics and of running evaluation of the error covariance, including quantitative aspects of sample path behaviors obtained by digital simulation studies.

1. 緒言および記号の説明

最適制御を実施する場合、われわれはつねに、(i) 制御対象であるところの力学系が、なんらかの形の非線形特性を呈示すること、(ii) 出力観測にあたっては、つねに観測雑音が介在するという2つの事実を見逃すことはできない。(i)として述べたような非線形特性への配慮は、力学系を非線形力学系として取り扱わなければならないことを意味し、(ii)として述べた雑音の介入は、力学系の状態を推定する手続きの必要性を強調しているものである。したがって、非線形力学系の状態変数推定という問題の解決は、非常に重要というよりも、むしろ最適制御の実現のためには欠くことのできない1段階であるといっても過言ではない。このような見地から状態推定に関する研究は数多く行な

われてきた。その基本方針は、観測信号を取得したという条件のもとにおける状態変数のとる値を規定した条件付き確率密度関数の時間的進化を記述する微分方程式を導くというものである^{1),2)}。これに成功すれば状態変数推定機構すなわちろ波器の動特性は容易に導き得るが、この場合、無限次元の統計学的積率の時間的進化の計算が必要になり、実際には実現不可能となるため、なんらかの近似手法が必要である^{3)~7),9)}。さらに従来までの近似手法の研究は、(ii)で述べた雑音として、状態変数に依存しないものを対象としているので、実際問題を考慮する場合に多く見られるような雑音が系の状態に依存する場合には適用できない。本論文では、状態変数に依存した雑音の影響をうける非線形力学系に対し、状態変数推定を行なうためのろ波機構の動特性を決定する近似手法をマルコフ等価線形化法^{7),9)}を導入することによって確立しよう。

[†] 第7回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭 43-9)

さて、本論文においては、真の確率過程と、それに対する近似確率過程とを同じ記号で表現することにする。これは同一の記号で表現しても、記述にはなんらの混乱も生じないからである。なお以下、表現を簡単にするため、使用する文字はすべてスカラー量とする。

記号 Q_t は可測確率変数 $y(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq t$) に関する ω 集合の最小 σ -代数をあらわすものである。ただしここで ω は確率空間 Ω の生成点である。また $q_j(t_j^{(n)})$ は可測確率変数 $\{y(t_j^{(n)})\}; j=0, 1, \dots, j(n); t_0 \leq t_j^{(n)} \leq t\}$ に関する最小 σ -代数である。ただし $\{y(t_j^{(n)})\}; j=0, 1, \dots, j(n)\}$ は $y(t)$ -過程から、パラメータ t の分割によって得られた確率過程である。このような最小 σ -代数によって条件づけられた条件付期待値の表現には、“ $\wedge$ ” という記号を用いることにする。たとえば $E\{x(t)|Q_t\} \triangleq \hat{x}(t|\tau)$ ($0 \leq \tau \leq t$) のようにである。

上述のような一般原則以外に、本論文においてしばしばあらわれる記号のうち、主なものを以下に説明しておく。

t : 時間変数、特に現在時刻をあらわす、 t_0 : 観測を始める初期時刻、 $x(t)$ および $y(t)$: それぞれ制御対象である力学系の状態変数、および観測値をあらわす確率過程である、 $f[t, x(t)]$, $g[t, x(t)]$, $h[t, x(t)]$ および $r[t, x(t)]$: いずれも状態変数 $x(t)$ および時間 t に依存する非線形関数、 $\hat{x}(t|t)$: 状態変数 $x(t)$ の推定値、すなわち $\hat{x}(t|t) \triangleq E\{x(t)|Q_t\}$, $p(t|t)$: 推定誤差分散値すなわち $p(t|t) \triangleq \text{cov}[x(t)|Q_t]$, $w(t)$ および $v(t)$: いずれも Brown 運動過程であり、また両者は互いに独立であるとする、 ε_1 および ε_2 : いずれも定数。

2. 数学モデルおよび問題の記述

非線形微分方程式、

$$\frac{dx(t, \omega)}{dt} = f[t, x(t, \omega)] + g_D[t, x(t, \omega)]r(t, \omega), \quad t \in [t_0, T] \quad (2.1)$$

で記述される非線形力学系を考えよう。ただし上式において、 $g_D[t, x(t, \omega)]$ は非線形関数であり、 $\xi(t, \omega)$ は白色雑音である。すでに著者の 1 人が指摘したように⁸⁾、(2.1) 式は正確には、

$$dx(t) = f[t, x(t)]dt + g_D[t, x(t)]dw(t), \quad t \in [t_0, T] \quad (2.2)$$

という伊藤形の確率微分方程式^{10), 11)} で表現されるべきである*。ただし、(2.2) 式における $w(t)$ は、

* (2.2) 式以後、記号 ω を省略する。それは ω を省略しても以後の議論においてなんらの混乱も生じないからである。また時間区間 $[t_0, T]$ は、本論文における等価線形化法その他の近似手法の精度が十分に保たれる程度の短区間であるものとする。

$$w(t) = \int_0^t r(s) ds \quad (2.3)$$

という関係にしたがって導入された Brown 運動過程である^{8), 12), 13)}。

つぎに、観測過程 $y(t)$ も、

$$dy(t) = h[t, x(t)]dt + r_D[t, x(t)]dv(t), \quad y(t_0) = 0, \quad t \in [t_0, T] \quad (2.4)$$

という確率微分方程式によって定められるものとしよう。ただし、 $r_D[t, x(t)]$ は非線形関数であり、 $v(t)$ は上述の $w(t)$ -過程と同じように、 $r(t)$ と同様な統計的性質をもつ加法的観測雑音 $\theta(t)$ と、

$$v(t) = \int_0^t \theta(s) ds \quad (2.5)$$

によって関係づけられた Brown 運動過程である。

さて、(2.2) および (2.4) 式にあらわれる $g_D[t, x(t)]$ および $r_D[t, x(t)]$ をそのまま取り扱うことは困難であるので、それぞれ状態変数に依存しない項と、状態変数に依存する項の和であらわされる場合を考えるものとする。すなわち以下の議論において、制御対象および観測機構の動特性は、それぞれ次のようにあらわされる場合のみを考える。

$$dx(t) = f[t, x(t)]dt + \{g_0(t) + \varepsilon_1 g[t, x(t)]\}dw(t), \quad t \in [t_0, T] \quad (2.6)$$

$$dy(t) = h[t, x(t)]dt + \{r_0(t) + \varepsilon_2 r[t, x(t)]\}dv(t), \quad t \in [t_0, T] \quad (2.7)$$

ただし、 ε_1 および ε_2 はともに ε_1^2 および ε_2^2 以上の影響が無視できる程度の小さな定数で、状態依存性 Brown 運動過程の $[t_0, T]$ 間の増分の相対的な大きさをあらわすものである。(2.6) および (2.7) 式に対しては、以下に述べるような仮定が存在する。

【仮定-1】 非線形関数 $f[t, \cdot]$ および $h[t, \cdot]$ は、いずれも $t_0 \leq t \leq T$ および $+\infty < \mu < \infty$ のような (t, μ) についての Baire 関数である¹⁴⁾。ただし $x(t) = \mu$ とする。

【仮定-2】 非線形関数 $f[\cdot, \cdot]$ および $h[\cdot, \cdot]$ は、いずれも μ について一様 Lipschitz 条件を満足し、有界であるとする。すなわち、

$$|f[t, \mu]| \leq K_1(1 + \mu^2)^{1/2} \quad (2.8 \cdot a)$$

および、

$$|h[t, \mu]| \leq K_2(1 + \mu^2)^{1/2} \quad (2.8 \cdot b)$$

を満足するような正定数 K_1 および K_2 が存在する。ただし K_1 および K_2 は $\cdot$ および μ に無関係である。

【仮定-3】 $x(t_0)$ は $w(t)$ -過程に対して独立な確率変数である。

さて、本論文で取り扱おうとしている問題は、現在時刻 t までの観測記録が与えられていて、確率変数、 $x(t)$ の最小分散推定 (minimal variance estimate)

を求めようというものである。

3. 偽線形確率微分方程式

前節で述べた〔仮定-1〕～〔仮定-3〕とともに、(2.2) 式で決定される $x(t)$ -過程は、

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f[s, x(s)] ds + \int_{t_0}^t \{g_0(s) + \varepsilon_1 g[s, x(s)]\} dw(s) \quad (3.1)$$

という確率積分方程式の唯一連続解であることがすでに証明されている^{10), 11)}。

さて、右辺における関数 $f[t, x(t)]$ を、
 $f[t, x(t)] = a(t) + b(t) \{x(t) - \hat{x}(t|t)\} + e(t)$ (3.2)
 のように展開する^{7), 9)}。ただし上式において $e(t)$ は、展開を第 2 項までで打ち切ったときのすべての誤差項を集めたものであり、 $a(t)$ および $b(t)$ は、以下に述べるような方法で決定されるべき展開の係数である。(3.2) 式を (3.1) 式に代入すると、

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t [a(s) + b(s) \{x(s) - \hat{x}(s|s)\} + e(s)] ds + \int_{t_0}^t \{g_0(s) + \varepsilon_1 g[s, x(s)]\} dw(s) \quad (3.3)$$

となるが、(3.1) および (3.3) 式から、

$$e(s) = f[s, x(s)] - [a(s) + b(s) \{x(s) - \hat{x}(s|s)\}] \quad (3.4)$$

となる。そこでいま $e(t)$ の自乗の条件付期待値、すなわち、

$$E\{e(t)^2 | Q_{f_i}\} = E\{[f[t, x(t)] - [a(t) + b(t) \{x(t) - \hat{x}(t|t)\}]]^2 | Q_{f_i}\} \quad (3.5)$$

が最小になるように展開の係数 $a(t)$ および $b(t)$ を定めよう。簡単な計算によって $\min_{a(t), b(t)} E\{e(t)^2 | Q_{f_i}\}$ に対する必要かつ十分条件は、

$$a(t) = E\{f[t, x(t)] | Q_{f_i}\} \triangleq \hat{f}[t, x(t)] \quad (3.6.a)$$

および、

$$b(t) = E\{[f[t, x(t)] - \hat{f}[t, x(t)]] [x(t) - \hat{x}(t|t)] | Q_{f_i}\} p(t|t)^{-1} \quad (3.6.b)$$

となる。ただし、

$$p(t|t) = \text{cov}[x(t) | Q_{f_i}] \quad (3.7)$$

である。(3.6.a) および (3.6.b) 式のように定められた $a(t)$ および $b(t)$ を用いて、(3.3) 式に対する近似として、

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t [a(s) + b(s) \{x(s) - \hat{x}(s|s)\}] ds + \int_{t_0}^t \{g_0(s) + \varepsilon_1 g[s, x(s)]\} dw(s) \quad (3.8.a)$$

を、また (3.8.a) 式から次式を得る。

$$dx(t) = [a(t) + b(t) \{x(t) - \hat{x}(t|t)\}] dt + \{g_0(t) + \varepsilon_1 g[t, x(t)]\} dw(t) \quad (3.8.b)$$

同じような手続きによって (2.4) 式に対する等価線形化を実行しよう。非線形関数 $h[t, x(t)]$ を (3.2) 式と同様な形すなわち、

$$h[t, x(t)] = h_1(t) + h_2(t) \{x(t) - \hat{x}(t|t)\} + e_y(t) \quad (3.9)$$

のように展開し、 $\min_{h_1(t), h_2(t)} E\{e_y(t)^2 | Q_{f_i}\}$ に対する必要十分条件を求めると、

$$h_1(t) = E\{h[t, x(t)] | Q_{f_i}\} \triangleq \hat{h}[t, x(t)] \quad (3.10.a)$$

および、

$$h_2(t) = E\{[h[t, x(t)] - \hat{h}[t, x(t)]] [x(t) - \hat{x}(t|t)] | Q_{f_i}\} p(t|t)^{-1} \quad (3.10.b)$$

を得る。したがって (2.7) 式に対する近似として、

$$dy(t) = [h_1(t) + h_2(t) \{x(t) - \hat{x}(t|t)\}] dt + \{r_0(t) + \varepsilon_2 r[t, x(t)]\} dv(t) \quad (3.11)$$

を得る。

さて、(3.6) および (3.10) 式を計算するためには、状態変数の推定値 $\hat{x}(t|t)$ とその誤差分散 $p(t|t)$ がわかっている必要はないことと、さらに $E\{ \cdot | Q_{f_i} \}$ という条件付期待値を計算する必要がある。

まず条件付期待値の計算であるが、このためには、 $p\{x(t) | Q_{f_i}\}$ という条件付確率密度関数の時間的進化、 $dp\{x(t) | Q_{f_i}\}$ を知る必要がある。この厳密な形はすでに求められているが、緒言において述べたような理由で実用的な結果を与えるものではないので、ここでは、

$$p\{x(t) | Q_{f_i}\} = (2\pi)^{-1/2} p(t|t)^{-1/2} \times \exp\left[-\frac{1}{2} \{x(t) - \hat{x}(t|t)\}^2 p(t|t)^{-1}\right] \quad (3.12)$$

のように、平均値 $\hat{x}(t|t)$ および分散値 $p(t|t)$ をもつ正規形と仮定することにする。この仮定によって (3.6) および (3.10) 式は、いずれも、

$$a(t) = a(t, \hat{x}(t|t), p(t|t)) \quad (3.13.a)$$

$$b(t) = b(t, \hat{x}(t|t), p(t|t)) \quad (3.13.b)$$

$$= \frac{\partial a(t)}{\partial \hat{x}} \quad (3.13.c)$$

および、

$$h_1(t) = h_1(t, \hat{x}(t|t), p(t|t)) \quad (3.14.a)$$

$$h_2(t) = h_2(t, \hat{x}(t|t), p(t|t)) \quad (3.14.b)$$

$$= \frac{\partial h_1(t)}{\partial \hat{x}} \quad (3.14.c)$$

のように $\hat{x}(t|t)$ および $p(t|t)$ の関数となる。したがって実際は単に時刻 t のみの関数として表現すること

は正しくないのであるが、記述の簡単化のため、従来のように $a(t), b(t)$ などのように表現し、議論をすすめることにする。

以上の議論で、非線形関数 $f[t, x(t)]$ および $h[t, x(t)]$ は線形近似されたが、関数 $g[t, x(t)]$ および $r[t, x(t)]$ はいまだ非線形のまま残っている。したがってこれらもなんらかの方法で近似しなければならないのである。これを実行する1つの手法として、本論文では Taylor 展開を利用した近似手法を示そう。

(i) 非線形関数 g の展開—(I) 非線形関数 $g[t+dt, x(t+dt)]$ を、 $[t, x(t)]$ のまわりで、Itô-Dynkin 公式¹⁵⁾ によって展開すると*

$$\begin{aligned} dg[t, x(t)] &= \frac{\partial g[t, x(t)]}{\partial t} dt \\ &+ f_q[t, x(t), \hat{x}(t|t)] \frac{\partial g[t, x(t)]}{\partial x} dt \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g[t, x(t)]}{\partial x^2} \{g_0(t) + \varepsilon_1 g[t, x(t)]\}^2 dt \\ &+ \frac{\partial g[t, x(t)]}{\partial x} \{g_0(t) + \varepsilon_1 g[t, x(t)]\} dw(t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

ただし、上式を導くにあたり、 $(dt)^{3/2}$ 以上の項は無視されており、また (3.15) 式における $f_q[t, x(t), \hat{x}(t|t)]$ は次式で与えられるものである。

$$f_q[t, x(t), \hat{x}(t|t)] \triangleq \hat{f}[t, x(t)] + b(t) \{x(t) - \hat{x}(t|t)\} \quad (3.16)$$

(3.15) 式の確率積分方程式としての表現は、時間区間 $[\tau, t] (t_0 \leq \tau \leq t \leq T)$ を微小とすれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} g[t, x(t)] - g[\tau, x(\tau)] &= \int_{\tau}^t \left[\frac{\partial g[s, x(s)]}{\partial s} + f_q[s, x(s), \hat{x}(s|s)] \frac{\partial g[s, x(s)]}{\partial x} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g[s, x(s)]}{\partial x^2} \{g_0(s) + \varepsilon_1 g[s, x(s)]\}^2 ds \\ &+ \left. \int_{\tau}^t \frac{\partial g[s, x(s)]}{\partial x} \{g_0(s) + \varepsilon_1 g[s, x(s)]\} dw(s) \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

さらにここで被積分関数が時間区間 $[\tau, t]$ で一定値となるものとする、

$$\begin{aligned} g[t, x(t)] - g[\tau, x(\tau)] &= \left[\frac{\partial g[\tau, x(\tau)]}{\partial \tau} + f_q[\tau, x(\tau), \hat{x}(\tau|\tau)] \frac{\partial g[\tau, x(\tau)]}{\partial x} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g[\tau, x(\tau)]}{\partial x^2} \{g_0(\tau) + \varepsilon_1 g[\tau, x(\tau)]\}^2 (t - \tau) \\ &+ \left. \frac{\partial g[\tau, x(\tau)]}{\partial x} \{g_0(\tau) + \varepsilon_1 g[\tau, x(\tau)]\} \{w(t) - w(\tau)\} \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

表現を簡単にするため、

$$\begin{aligned} \alpha(\tau) &\triangleq \frac{\partial g[\tau, x(\tau)]}{\partial \tau} \\ &+ f_q[\tau, x(\tau), \hat{x}(\tau|\tau)] \frac{\partial g[\tau, x(\tau)]}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g[\tau, x(\tau)]}{\partial x^2} \{g_0(\tau) + \varepsilon_1 g[\tau, x(\tau)]\}^2 \end{aligned} \quad (3.19 \cdot a)$$

$$\beta(\tau) \triangleq \frac{\partial g[\tau, x(\tau)]}{\partial x} \{g_0(\tau) + \varepsilon_1 g[\tau, x(\tau)]\} \quad (3.19 \cdot b)$$

とおき、(3.18) および (3.19) 式を用いて (3.8 \cdot b) 式を書きかえると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} dx(t) &= f_q[t, x(t), \hat{x}(t|t)] dt + g_0(t) dw(t) \\ &+ \varepsilon_1 [g[\tau, x(\tau)] + \alpha(\tau) (t - \tau) \\ &+ \beta(\tau) \{w(\tau) - w(\tau)\}] dw(t) \\ &= f_q[t, x(t), \hat{x}(t|t)] dt + g_q[t, \tau, \varepsilon_1] dw(t) \end{aligned} \quad (3.20 \cdot a)$$

ただし、

$$\begin{aligned} g_q[t, \tau, \varepsilon_1] &\triangleq g_0(t) + \varepsilon_1 [g[\tau, x(\tau)] \\ &+ \alpha(\tau) (t - \tau) + \beta(\tau) \{w(t) - w(\tau)\}] \end{aligned} \quad (3.20 \cdot b)$$

である。このようにして (2.6) 式であらわされていた非線形系は (3.20) のように偽線形化されたことになる。

以上の手続きを (3.11) 式の非線形関数 $r[t, x(t)]$ にも適用しよう。すなわち、前と同様に Itô-Dynkin 公式を用いて展開し、 $(dt)^{3/2}$ 以上の項を無視することによって、

$$\begin{aligned} r[t, x(t)] - r[\tau, x(\tau)] &= \left[\frac{\partial r[\tau, x(\tau)]}{\partial \tau} + f_q[\tau, x(\tau), \hat{x}(\tau|\tau)] \frac{\partial r[\tau, x(\tau)]}{\partial x} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r[\tau, x(\tau)]}{\partial x^2} \{g_0(\tau) + \varepsilon_1 g[\tau, x(\tau)]\}^2 (t - \tau) \\ &+ \left. \frac{\partial r[\tau, x(\tau)]}{\partial x} \{g_0(\tau) + \varepsilon_1 g[\tau, x(\tau)]\} \{w(t) - w(\tau)\} \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

を得る。ここで前と同様に、表現の簡単化のため、

$$\begin{aligned} h_q[t, x(t), \hat{x}(t|t)] &\triangleq \hat{h}[t, x(t), \hat{x}(t|t)] \\ &+ h_2(t) \{x(t) - \hat{x}(t|t)\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &\triangleq \frac{\partial r[\tau, x(\tau)]}{\partial \tau} \\ &+ f_q[\tau, x(\tau), \hat{x}(\tau|\tau)] \frac{\partial r[\tau, x(\tau)]}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r[\tau, x(\tau)]}{\partial x^2} \{g_0(\tau) + \varepsilon_1 g[\tau, x(\tau)]\}^2 \end{aligned} \quad (3.23 \cdot a)$$

$$\delta(\tau) \triangleq \frac{\partial r[\tau, x(\tau)]}{\partial x} \{g_0(\tau) + \varepsilon_1 g[\tau, x(\tau)]\} \quad (3.23 \cdot b)$$

* 展開起点 $[t, x(t)]$ は見本値である。以後の記述では、複雑化を防ぐため特に記号を改めないが、この種の展開に関連する起点は見本値である。

とおき, (3.21) および (3.23) 式を用いて (3.11) 式を書きかえ次式を得る.

$$\begin{aligned} dy(t) = & h_q[t, x(t), \hat{x}(t|t)]dt + r_0(t)dv(t) \\ & + \varepsilon_2[r[\tau, x(\tau)] + \gamma(\tau)(t-\tau) \\ & + \delta(\tau)\{w(t) - w(\tau)\}]dv(t) \\ = & h_q[t, x(t), \hat{x}(t|t)]dt + r_q[t, \tau, \varepsilon_2]dv(t) \end{aligned} \quad (3.24 \cdot a)$$

ただし,

$$\begin{aligned} r_q[t, \tau, \varepsilon_2] = & r_0(t) + \varepsilon_2[r[\tau, x(\tau)] + \gamma(\tau)(t-\tau) \\ & + \delta(\tau)\{w(t) - w(\tau)\}] \end{aligned} \quad (3.24 \cdot b)$$

である. したがって非線形微分方程式 (2.7) 式は, (3.24) 式によって線形近似されたわけである.

(ii) 非線形関数 g の展開—(II) さて上述の方法と比較するために, ここにもうひとつの手法を示そう. すなわち非線形偏位項については上述の展開手法を用いるが, 非線形拡散項については, $\hat{x}(t|t)$ のまわりで Taylor 展開する. ただしこの手法では, 非線形拡散項は偽線形化されず, 展開後も非線形である. このような近似手法を用いると (3.20·a) および (3.24 a) 式に対応する式として,

$$\begin{aligned} dx(t) = & f_q[t, x(t), \hat{x}(t|t)]dt \\ & + g_q'[t, x(t), \hat{x}(t|t), \varepsilon_1]dw(t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} dy(t) = & h_q[t, x(t), \hat{x}(t|t)]dt \\ & + r_q'[t, x(t), \hat{x}(t|t), \varepsilon_2]dv(t) \end{aligned} \quad (3.26)$$

を得る. ただし,

$$\begin{aligned} g_q'[t, x(t), \hat{x}(t|t), \varepsilon_1] = & g_0(t) \\ & + \varepsilon_1 \left\{ g(\hat{x}) + \frac{\partial g(x)}{\partial x} \bigg|_{x=\hat{x}} (x - \hat{x}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \bigg|_{x=\hat{x}} (x - \hat{x})^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.27 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} r_q'[t, x(t), \hat{x}(t|t), \varepsilon_2] = & r_0(t) \\ & + \varepsilon_2 \left\{ r(\hat{x}) + \frac{\partial r(x)}{\partial x} \bigg|_{x=\hat{x}} (x - \hat{x}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r(x)}{\partial x^2} \bigg|_{x=\hat{x}} (x - \hat{x})^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.27 \cdot b)$$

である.

しかしながら, (3.20), (3.24) あるいは (3.25), (3.26) 式における偏位項 (drift term) はいまだ未知のまま残っているから, これらの式によって偽線形確率過程 $x(t)$ および $y(t)$ の定量的な計算を行なうことはできない. この計算のためには $\hat{x}(t|t)$ および $p(t|t)$ を知る必要がある.

次節に推定値 $\hat{x}(t|t)$ とその分散値 $p(t|t)$ を求める方法について述べよう.

4. 偽線形化状態推定方程式

いま $\Phi(t, t_0)$ を,

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = b(t)x(t) \quad (4.1)$$

という微分方程式の基本解とする. いま $\tau = t_0$ と考えられる程度の短い時間区間 $[t_0, t]$ を考えることにする. (3.20·a) 式の解は,

$$\begin{aligned} x(t) = & \Phi(t, t_0)x(t_0) \\ & + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\{a(s) - b(s)\hat{x}(s|s)\}ds \\ & + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)g_q[s, t_0, \varepsilon_1]dw(s) \end{aligned} \quad (4.2)$$

のようになる. そこで (4.2) 式の右辺第 2 項を,

$$\zeta(t) = - \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\{a(s) - b(s)\hat{x}(s|s)\}ds \quad (4.3)$$

と書き, さらに,

$$\xi(t) \triangleq x(t) + \zeta(t) \quad (4.4)$$

という関係のもとに, 新しい $\xi(t)$ -過程を導入すると, (4.2) および (4.4) 式から,

$$\xi(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)g_q[s, t_0, \varepsilon_1]dw(s) \quad (4.5)$$

を得る. (4.3) および (4.4) 式から,

$$\xi(t_0) = x(t_0) \quad (4.6)$$

であるから, $\xi(t)$ -過程は,

$$d\xi(t) = b(t)\xi(t)dt + g_q[t, t_0, \varepsilon_1]dw(t) \quad (4.7)$$

という伊藤形の確率微分方程式によって定められる. (4.7) 式の右辺における $b(t)$ は, (3.13) 式にも示されたように $\hat{x}(t|t)$ および $p(t|t)$ の関数であるが, (4.4) 式からも明らかのように変数の変換によって推定値 $\hat{x}(t|t)$ およびその誤差分散 $p_\varepsilon(t|t)$ の関数になっている. しかし $b(t)$ における記号変化を考慮しても, そこに顕著な効果はないので $b(t)$ という記号を依然として用いることにする.

いっぽう, (3.24) 式から,

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_{t_0}^t h_2(s)x(s)ds + \int_{t_0}^t \{h_1(s) - h_2(s)\hat{x}(s|s)\}ds \\ & + \int_{t_0}^t r_q[s, t_0, \varepsilon_2]dv(s) \end{aligned} \quad (4.8)$$

のように定められるから, この式の右辺の第 2 項を,

$$\zeta_y(t) = \int_{t_0}^t \{h_1(s) - h_2(s)\hat{x}(s|s)\}ds \quad (4.9)$$

とおき,

$$\eta_y(t) \triangleq y(t) - \zeta_y(t) \quad (4.10)$$

という新しい $\eta_y(t)$ -過程を定義すると,

$$d\eta_y(t) = h_2(t)x(t)dt + r_q[t, t_0, \varepsilon_2]dv(t) \quad (4.11)$$

を得る. さらに,

$$d\eta(t) = d\eta_y(t) + h_2(t)\zeta(t)dt \quad (4.12)$$

という $\zeta(t)$ -過程を定義する. すると (4.4) および (4.11) 式によって (4.12) 式は,

$$d\eta(t) = h_2(t)\xi(t)dt + r_q[t, t_0, \varepsilon_2]dv(t) \quad (4.13)$$

となる。 $\xi(t)$ -過程は q_t -可測であるから、(4.4) 式より、

$$\hat{\xi}(t|t) = E\{\xi(t)|q_t\} = \hat{x}(t|t) + \zeta(t) \quad (4.14)$$

となる。

さて $\mathcal{H}_t$ を確率変数 $\eta(s)$ [$t_0 \leq s \leq t$] によって作られる ω 集合の σ -代数とすれば、 $y(t)$ -過程は $\mathcal{H}_t$ -可測になり¹⁴⁾、

$$E\{\xi(t)|\mathcal{H}_t\} = E\{\xi(t)|q_t\} \triangleq \hat{\xi}(t|t) \quad (4.15)$$

となる。このことから、(4.7) 式で定められる $\xi(t)$ -過程が架空の状態変数であり、(4.13) 式で定められる $\eta(t)$ -過程が $\xi(t)$ -過程に対する観測過程であると考え、(4.7) および (4.13) 式をもとにした状態変数推定問題ができあがっていることに気づくであろう。しかも (4.7) および (4.13) 式はともに線形であるから、この場合の状態変数推定問題は容易にとけて、 $\hat{\xi}(t|t)$ を定めるろ波器の動特性は、

$$\begin{aligned} d\hat{\xi}(t|t) = & b(t)\hat{\xi}(t|t)dt \\ & + \hat{p}_\xi(t|t)h_2(t)\{r_0(t)^2 \\ & + 2\varepsilon_2 r_0(t)r[t_0, x(t_0)]\}^{-1} \\ & \times \{d\eta(t) - h_2(t)\hat{\xi}(t|t)dt\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

のようになる^{16), 17)}。ただし上式において、

$$\hat{p}_\xi(t|t) = \text{cov}[\hat{\xi}(t|t)|\mathcal{H}_t] \quad (4.17)$$

である。(4.13) 式を (4.16) 式に代入し、(4.3) および (4.4) 式を用いると、

$$\begin{aligned} d\hat{x}(t|t) = & \hat{f}[t, x(t)]dt + \hat{p}(t|t)h_2(t) \\ & \times \{r_0(t)^2 + 2\varepsilon_2 r_0(t)r[t_0, x(t_0)]\}^{-1} \\ & \times \{dy(t) - \hat{h}[t, x(t)]dt\} \end{aligned} \quad (4.18 \cdot a)$$

$$\hat{x}(t_0|t_0) = E\{x(t_0)\} \quad (4.18 \cdot b)$$

を得る。ただし上式を導くにさいして、(3.2) および (3.9) 式という2つの関係を利用している。(4.14) および (4.17) 式から (4.18) 式における $\hat{p}(t|t)$ は、

$$\hat{p}(t|t) \triangleq \text{cov}[x(t)|q_t] = \hat{p}_\xi(t|t) \quad (4.19)$$

であり、これはじゃっかんの計算によって、

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{p}(t|t)}{dt} = & 2b(t)\hat{p}(t|t) \\ & + \{g_0(t)^2 + 2\varepsilon_1 g_0(t)g[t_0, x(t_0)]\} \\ & - \hat{p}(t|t)^2 h_2(t)^2 \\ & \times \{r_0(t)^2 + 2\varepsilon_2 r_0(t)r[t_0, x(t_0)]\}^{-1} \end{aligned} \quad (4.20a)$$

という Riccati 形の微分方程式の解であることがわかる。

ただし、その初期条件は、

$$\hat{p}(t_0|t_0) = \text{cov}[x(t_0)] \quad (4.20 \cdot b)$$

である。(4.18) 式がここで求めようとした偽線形ろ波器の動特性を与えるものである。

いっぽう、展開-(II) の場合には、前と同様にして、(3.25) および (3.26) 式から、ろ波器動特性および誤差分散を定める式は、

$$\begin{aligned} d\hat{x}(t|t) = & \hat{f}[t, x(t)]dt + \hat{p}(t|t)h_2(t) \\ & \times \left[r_0(t)^2 + 2\varepsilon_2 r_0(t) \left\{ r(\hat{x}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r(x)}{\partial x^2} \bigg|_{x=\hat{x}} \hat{p}(t|t) \right\} \right]^{-1} \\ & \times \{dy(t) - h_1(t)dt\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{p}(t|t)}{dt} = & 2b(t)\hat{p}(t|t) \\ & + \left[g_0(t)^2 + 2\varepsilon_1 g_0(t) \left\{ g(\hat{x}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \bigg|_{x=\hat{x}} \hat{p}(t|t) \right\} \right] \\ & - h_2(t)^2 \hat{p}(t|t)^2 \end{aligned}$$

(a) the output run of the filter

(b) the output run of the covariance equation

Fig. 1 A sample path behavior of the approximated filter dynamics

$$\times \left[r_0(t)^2 + 2 \varepsilon_3 r_0(t) \left\{ r(\hat{x}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r(x)}{\partial x^2} \bigg|_{x=\hat{x}} p(t|t) \right\} \right]^{-1} \quad (4.22)$$

のようになる。

このようにして $a(t)$, $b(t)$, $h_1(t)$ および $h_2(t)$ を定めるために必要な $\hat{x}(t|t)$ および $p(t|t)$ は, (4.18) および (4.20) 式あるいは (4.21) および (4.22) 式から得られるのであるが, これらの式を解析的に解くことは不可能であるから, 実際問題として $a(t)$, $b(t)$, $h_1(t)$ および $h_2(t)$ は決定されたとはいえない. そこで電子計算機によって (4.18) および (4.20) 式あるいは (4.21) および (4.22) 式を連立方程式として解く invariant embedding algorithm を考察することになるが, これに関しては, さきに精しく報告したので⁹⁾ 本論文では省略し, 直ちに具体例を示すことにする。

5. 具体例

状態変数の見本過程およびその観測過程は, それぞれ,

$$dx(t) = -\sin x(t) dt + c_1 dw(t) \quad (5.1)$$

および,

$$dy(t) = x(t) dt + \{c_2 + \varepsilon_2 x(t)\} dv(t) \quad (5.2)$$

で定められるものとする. ただし c_1 , c_2 および ε_2 は正定数である. (3.6.

a) および (3.6.b) 式ならびに (3.10

a) および (3.10.b) 式から,

$$a(t) = -\sin \hat{x}(t|t) \times \exp\{-0.5 p(t|t)\} dt \quad (5.3.a)$$

$$b(t) = -\cos \hat{x}(t|t) \times \exp\{-0.5 p(t|t)\} dt \quad (5.3.b)$$

$$h_1(t) = \hat{x}(t|t) \quad (5.4.a)$$

$$h_2(t) = 1 \quad (5.4.b)$$

が得られる. したがって, これらの式と (4.18) および (4.20) 式を用いて, ろ波器動特性および誤差分散はそれぞれ,

$$d\hat{x}(t|t) = -\sin \hat{x}(t|t) \exp\{-0.5 p(t|t)\} dt + p(t|t) \{c_2^2 + 2 \varepsilon_2 c_2 x(t_0)\}^{-1} \{dy(t) - \hat{x}(t|t) dt\} \quad (5.5)$$

および,

$$\frac{dp(t|t)}{dt} = -2 p(t|t) \cos \hat{x}(t|t) \exp\{-0.5 p(t|t)\} + c_1^2 - p(t|t)^2 \{c_2^2 + 2 \varepsilon_2 c_2 x(t_0)\}^{-1} \quad (5.6)$$

によって決定されることがわかる。

さて, もう 1 つの具体例として, 状態変数の見本過程およびその観測過程が, それぞれ,

$$dx(t) = -\sin x(t) dt + \{c_1 + \varepsilon_1 x(t)\} dw(t) \quad (5.7)$$

および,

$$dy(t) = x(t) dt + c_2 dv(t) \quad (5.8)$$

で定められる場合を考える. ただし c_1 , c_2 および ε_1 は正定数である. さきの場合と同様にして, ろ波器動特性および誤差分散はそれぞれ,

$$d\hat{x}(t|t) = -\sin \hat{x}(t|t) \exp\{-0.5 p(t|t)\} dt + p(t|t) c_2^{-2} \{dy(t) - \hat{x}(t|t) dt\} \quad (5.9)$$

および,

$$\frac{dp(t|t)}{dt} = -2 p(t|t) \cos \hat{x}(t|t) \exp\{-0.5 p(t|t)\} + \{c_1^2 + 2 \varepsilon_1 c_1 x(t_0)\} - p(t|t)^2 c_2^{-2} \quad (5.10)$$

によって決定されることがわかる。

いっぽう, 展開-(II) の手法を, 同じ例に適用する

(a) the output run of the filter

(b) the output run of the covariance equation

Fig. 2 A sample path behavior of the approximated filter dynamics

と,

$$d\hat{x}(t) = -\sin \hat{x} \exp\{-0.5 p(t)\} dt + p(t) \{c_2^2 + 2\varepsilon_2 c_2 \hat{x}(t)\}^{-1} \{dy(t) - \hat{x}(t) dt\} \quad (5.11)$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = -2p(t) \cos \hat{x}(t) \exp\{-0.5 p(t)\} + c_1^2 - p(t)^2 \{c_2^2 + 2\varepsilon_2 c_2 \hat{x}(t)\}^{-1} \quad (5.12)$$

および,

$$d\hat{x}(t) = -\sin \hat{x}(t) \exp\{-0.5 p(t)\} dt + p(t) c_2^{-2} \{dy(t) - \hat{x}(t) dt\} \quad (5.13)$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = -2p(t) \cos \hat{x}(t) \exp\{-0.5 p(t)\} + \{c_1^2 + 2\varepsilon_1 c_1 \hat{x}(t)\} - p(t)^2 c_2^{-2} \quad (5.14)$$

となる.

電子計算機によるシミュレーションは, 文献 9) に述べられているような方針にしたがって実行することにする. ただし初期状態は $\hat{x}(0|0)=0, p(0|0)=2.25, y(0)=0$ としている. これらの初期値から出発するひとつの見本過程の時間的進化を求めたものが, **Fig. 1~Fig. 3** である. なおこれらの図においては, $\hat{x}(0|0)$ および $p(0|0)$ という記号は, いずれも $\hat{x}(0)$ および $p(0)$ のように記されている. また図に示された $x(t)$ -過程は実際はわからないものであるがデジタルシミュレーションにおいては $\hat{x}(t|t)$ の $x(t)$ に対する追跡経過を観察するためにわざと取得したものである. なお実際の計算にさいしては $\tau=t_0=0$ とした.

6. 結 言

本論文では, 状態依存性雑音を受ける非線形系に対する状態推定を行なう一つの近似手法を確立したものである. その基本概念は偏位項 (drift term) にあらわれる非線形関数を展開し, その展開の係数を平均自乗誤差最小という規範を満足するように決定するという, いわばマルコフ過程における等価線形化法と, 拡散項 (diffusion term) にあらわれる非線形関数を Taylor 展開をもとにして近似するという手法とを組み合わせたものである.

ここで提案した等価線形化法の精度については, 現在, 定性, 定量的の両面から詳細な検討を行なっている.

非線形特性および雑音の影響が小さければ, 偏位項の線形化に対する誤差は小さく, また拡散項の線形化に対する誤差も, 短時間においては小さく, 相当精度の高い推定が可能であると考えられる.

また数値例の示すように, 拡散項に対する 2 種類の線形化法については, 定量的な面においてはほとんど差が認められない. しかし, 最適制御系を構成するための推定機構として考えた場合には, 手法-(I) のほうが最適制御方策 (もちろん近似的ではあるが) の確立には適している. このことについては後報で述べる.

なおまた, ここで考察したように状態依存性雑音を受ける力学系の動特性を伊藤形の確率微分方程式で同定する代わりに, Stratonovich 形の確率微分方程式¹⁸⁾で同定する方法もある. これによれば, (2.2) 式の代わりに,

$$dx(t) = f[t, x(t)] dt + \frac{1}{2} g_D[t, x(t)] \frac{\partial g_D[t, x(t)]}{\partial x} dt + g_D[t, x(t)] dw(t) \quad (6.1)$$

が得られる¹⁸⁾. いずれをどのような場合に使用すべき

(a) the output run of the filter

(b) the output run of the covariance equation

Fig. 3 A sample path behavior of the approximated filter dynamics

かについては、目下研究中である。

最後に、計算その他に終始協力された本学大学院学生大住晃君、本学学生杉本末雄、鳥居英明の両君に感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) R.L.Stratonovich: Application of the theory of Markov processes to the optimum filtration of signals, Nonlinear Transformations of Stochastic Processes, ed. by Kuznetsov, P.I. et al. Pugamon, N.Y., 467/484 (1965) (English translation)
- 2) H. J. Kushner: On the differential equations satisfied by conditional probability distributions of Markov processes, with applications, SIAM Jour. on Control, 2, 106/119 (1964)
- 3) W.M.Wonham: Some applications of stochastic differential equations to optimal nonlinear filtering, SIAM Jour. on Control, 2, 347/369 (1965)
- 4) R.S.Buch: Nonlinear filtering theory, IEEE Trans., AC-10, 198/199 (1965)
- 5) H. J. Kushner: Approximations to optimal nonlinear filters, Preprints of Papers for JACC, 1967. Univ. of Pen. Pen. Phila, Pen. 1967 (June-1967)
- 6) H. Cox: On the estimation of state variables and parameters for noisy systems, IEEE Trans. AC-9, 5/12 (1964)
- 7) Y.Sunahara: An approximate method of state estimation for nonlinear dynamical systems, Preprints of Papers for JACC, 1969. Univ. of Colorado, Boulder, Colorado (Aug.-1969)
- 8) 砂原善文: 制御過程論への確率微分方程式の応用, 制御工学, 12-1, 2/10 (1968)
- 9) 砂原善文: マルコフ等価線形化法による非線形系の状態推定, 制御工学, 13-7, 432/452 (1969)
- 10) K.Itô: On stochastic differential equations, Mem. Amer. Math. Soc. 4 (1951)
- 11) K.Itô: On a stochastic integral equation, Proc. Japan Acad., Nos. 1/4 (1946)
- 12) E. Wong and M. Zakai: On the relation between ordinary and stochastic differential equations, Int. J. Eng. Sci. 3, 213/229 (1965)
- 13) A.M.Yaglom: An introduction to the theory of random function, Prentice Hall, N.J. (1962)
- 14) M. Loève: Probability Theory, Princeton, Van Nostrand (1963)
- 15) F.B.Dynkin: Markov Processes, I, II, Academic Press, N.Y. (1965)
- 16) R.E.Kalman: A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, J. Basic Eng., 82 D, 35/45 (1960)
- 17) R.E.Kalman and R.S.Bucy: New results in linear filtering and prediction theory, Trans. ASME, J. Basic Eng., 83 D, 95/108 (1961)
- 18) R.L.Stratonovich: A new representation for stochastic integrals and equations, SIAM Jour. on Control, 2, 362/371 (1966)