バナッハ空間における最適追従問題†

舟 橋 康 行・中 村 嘉 平

名古屋大学工学部 名古屋市中千種区不老町

(昭和 43 年 9 月 10 日 受付)

Optimal Pursuit Problem in Banach Spaces

Yasuyuki FUNAHASHI and Kahei NAKAMURA

(Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya)

(Received September, 10, 1968)

With the aid of functional analysis, the optimal pursuit problem and the optimal final value control problem in Banach spaces are considered. Many papers treat these problems in the Hilbert space setting and derive an adjoint equation and reduce to the solution of the two point boundary value problem. The authors pose the problems in the Banach spaces such as $L^p, 1 \leq p \leq +\infty$. In L^1 and L^∞ spaces the norm is not Fréchet differentiable, not even Gateaux differentiable and admits one-sided Gateaux derivative only.

A necessary and sufficient condition for an optimal control is derived using one-sided Gateaux derivative. The equations of the optimal condition in L^1 , $L^p (1 < p < +\infty)$ and L^∞ spaces are obtained in the explicit form. And finally several examples are illustrated in the Hilbert space setting in order to make this theory understand with ease. The method is straightforward and thus the optimal control can be computed directly.

1. 緒 言

本稿の目的は、関数解析の手法により分布定数系の最適制御問題を解くことである。筆者らはさきに、半群の理論を用いれば分布定数系は集中定数系と同一の形でダイナミカル表示されることを示し、その利点が集中定数系について展開された制御理論が自然の形で分布定数系にまでも拡張できることであることを指摘したり¹⁾。本稿ではバナッハ空間において最適制御問題を考察することによりこの点を明確にする。

分布定数系の最適制御問題に対する解法は、最大原理によるもの^{2), 4)}、ダイナミックプログラミングによるもの⁵⁾、関数解析によるもの^{6)~9)} などがある。これらのうち Fattorini⁶⁾ は最短時間制御問題を、Balakrishnan⁷⁾、Friedman⁸⁾ は最短時間および最終値制御問題を、Axelband⁹⁾ は追従問題をそれぞれバナッハ空間で考察している。

本稿では追従問題および最終値制御の変形した問題

を考察する。これらの問題はすでに多くの論文で扱われているが、そのほとんどが共役 (adjoint) 方程式を誘導して 2 点境界値問題を解くことに帰着させている^{4), 9), 10)}。本稿は『凸関数の最小値はその導関数がゼロになる点で得られる』という概念を関数空間に拡張して最適解の必要十分条件を導く。

追従問題はヒルベルト空間で設定されて解かれてきた。筆者らも“ヒルベルト空間のノルムはフレッシュエ微分可能 (Fréchet differentiable) である”ということによって、ヒルベルト空間での追従問題を解いた。本稿ではさらに一般の $L^p (1 \leq p \leq +\infty)$ なるバナッハ空間での追従問題をも考察する。そのために、片側ガトウ微分 (one-sided Gateaux differential) を導入する。なぜならば、 $L^p (1 < p < +\infty)$ なるバナッハ空間のノルムは原点以外ではフレッシュエ微分可能である¹²⁾ が、 L^1 や L^∞ のノルムはフレッシュエ微分可能でもなくまたガトウ微分可能でもないからである。最後にヒルベルト空間での例をあげその最適解を計算する。

† 第 6 回計測自動制御学会学術講演会で一部発表 (昭 42-10)

2. システムの記述と問題の定式化

問題を一般的に定式化するまえに、あとで考察する例をあけて具体的な問題および記号の説明をする。

まずつぎの式で記述される熱系を考える。

$$-\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x) + f(t, x) \quad \text{a. e. in } t, \\ 0 < x < 1 \quad (1)$$

$$\text{境界条件} \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0$$

ここに熱伝導係数が 1 になるように正規化してある。

システムの初期状態が $u(0, x)$ であるとき、 $(0, T)$ 区間で与えられた希望状態の軌道 $u^d(t, x)$ にシステムを追従させる入力 f 、すなわちつぎの評価関数を最小にする制御入力 f を決定する問題——最適追従問題と呼ぶ——を考える。

$$J(f) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 |u(t, x) - u^d(t, x)|^2 dx dt \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 |f(t, x)|^2 dx dt \quad (2)$$

(2) 式から (1) 式の解 $u(t, x)$ は各時刻 t で $L^2(\Omega)$ に属していることが要請されている。ただし $L^2(\Omega)$ とは、内積 $\langle v, w \rangle$ が、

$$\langle v, w \rangle = \int_{\Omega} v(x) w(x) dx, \quad \Omega = (0, 1)$$

で定義された 2 乗可積分な実数値関数からなるヒルベルト空間である。

ここで、 $u(t) \equiv u(t, \cdot)$ 、 $f(t) \equiv f(t, \cdot)$ という $L^2(\Omega)$ を値にとる関数を定義し、

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \text{定義域 } \mathfrak{D}(A) \\ = \left\{ v \in L^2(\Omega) \left| \begin{array}{l} v, v' \text{ が絶対連続で} \\ v'' \in L^2(\Omega) \\ v(0) = v(1) = 0 \end{array} \right. \right\}$$

とすれば (1)、(2) 式はつぎのように書かれる。

$$-\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t) \quad (3)$$

$$J(f) = \frac{1}{2} \int_0^T \|u(t) - u^d(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \quad (4)$$

さらに、 $(0, T)$ 上で定義され $L^2(\Omega)$ を値にとる 2 乗可積分な関数 g 、すなわち、

$$g(t) \in L^2(\Omega) \quad \text{a. e. in } t \in (0, T) \quad \text{でかつ、}$$

$$\int_0^T \|g(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt < +\infty$$

なる関数の集合に、

$$\langle g, h \rangle = \int_0^T \langle g(t), h(t) \rangle_{L^2(\Omega)} dt$$

$$\|g\|^2 = \int_0^T \|g(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$$

なる内積とノルムを導入した線形空間を $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ と記す。 $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ はヒルベルト空間であり、この記号を用いれば (3) 式はつぎの形に書くことができる。

$$-\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t) \quad (3)$$

$$J(f) = \frac{1}{2} \|u - u^d\|^2 + \frac{1}{2} \|f\|^2 \quad (5)$$

よって、(1)、(2) 式で記述される最適追従問題はけっきょく (3)、(5) 式の形で述べることができた。

同じ熱系についてもう 1 つの制御問題を考える。初期状態が $u(0, x)$ なるとき、最終時刻 T での状態を希望状態 $u^d(T, x)$ に近づける入力 f 、すなわちつぎの評価関数を最小にする制御入力 f を決定する問題——最終値制御問題と呼ぶ——である。

$$I(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u(T, x) - u^d(T, x)|^2 dx \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 |f(t, x)|^2 dx dt \quad (6)$$

このときにも $u(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$ が要請され、かつ $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ でなければならない。 $L^2(\Omega)$ 、 $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ のノルムを用いて書きなおせば、

$$-\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t) \quad (3)$$

$$I(f) = \frac{1}{2} \|u(T) - u^d(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|f\|^2 \quad (7)$$

となる。以上 2 つの例から最適追従問題と最終値制御問題はヒルベルト空間のとり方が異なるのみで理論的にはまったく同一の枠内で扱いうることがわかった。

以上の例を一般化してつぎのように問題を定式化する。

バナッハ空間で記述されたダイナミカルシステム、

$$-\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + Bf(t) \quad (8)^*$$

初期状態は $u(0)$ に対して、評価関数 (9) 式または (10) 式を最小にする制御入力 $f \in L^p(0, T; F)$ を決める。

ここに、 $u(t)$ は時刻 t での状態で、各 $u(t)$ はバナッハ空間 U に属する。 $f(t)$ は時刻 t での制御で、各 $f(t)$ はバナッハ空間 F に属する。 A は定義域 $\mathfrak{D}(A)$ が U で稠密な線形閉作用素、 B は F から $\mathfrak{D}(A) \subset U$ への線形作用素である。

$$J(f) = \|u - u^d\| + \|f\| \quad (9)$$

* (8) 式の等号の意味は、一般には U より弱い位相に関するものである。詳細は文献 (2) を参照されたい。

$$I(f) = \|u(T) - u^d(T)\| + \|f\| \quad (10)$$

ここに, $\|u\|$, $\|u(T)\|$, $\|f\|$ の各ノルムはそれぞれ $L^q(0, T; U)$ $q \geq 1$, U および $L^p(0, T; F)$ $p \geq 1$ のノルムをあらわす.

Balakrishnan⁶⁾ によれば, A が強連続な半群 $\{S(t), t \geq 0\}$ の生成作用素であるときには,

$Bf(t) \in \mathcal{D}(A)$ a. e. in t かつ $ABf \in L^1(0, T; U)$ なる入力 f に対して初期状態 $u(0) \in \mathcal{D}(A)$ の下で (8) 式の解は一意に存在して次式で書かれる.

$$u(t) = S(t)u(0) + \int_0^t (S(t-\sigma)Bf(\sigma))d\sigma \quad (11)$$

また, とくに A が放物形半群の生成作用素であるときには, 解が一意に存在して (11) 式で書くことのできる条件をつぎのように述べることができる¹⁾.

$$f \in L^1(0, T; F) \text{ かつ } u(0) \in U$$

さて以上のことをもとにして (9), (10) 式を書きなおい, 2つの最適制御問題が同一の枠内で取扱いうることを示す.

$$(K_1 f)(t) = \int_0^t S(t-\sigma)Bf(\sigma)d\sigma, \quad 0 < t < T$$

で $L^p(0, T; F)$ から $L^q(0, T; U)$ への有界作用素を定義し,

$$c_1(t) = u^d(t) - S(t)u(0), \quad 0 < t < T$$

とすれば (9) 式は,

$$J(f) = \|K_1 f - c_1\| + \|f\| \quad (12)$$

となる. また,

$$K_2 f = \int_0^T S(T-\sigma)Bf(\sigma)d\sigma$$

で $L^p(0, T; F)$ から U への有界作用素を定義し,

$$c_2 = u_d(T) - S(T)u(0)$$

とすれば, (10) 式は (9) 式と同様に,

$$I(f) = \|K_2 f - c_2\| + \|f\|$$

と書くことができる. すなわち (9), (10) 式で提起した最適追従問題と最終値制御問題は (12) 式の形の評価関数を最小にすることに置き換えられた. よって以後は (12) 式の評価関数を最小にすることを考える.

3. 最適解の必要十分条件

許容制御入力 f として L^1 または L^∞ の空間を考えるとときには, $J(f)$ はその空間でフレッシュ微分可能ではない. ここでは片側ガトウ微分の考えから最適解の必要十分条件を導く.

$J(f)$ はノルムの性質により凸関数である. じっさい, $0 < \alpha < 1$ なる実数 α と, 任意の $g, f \in L^p(0, T; F)$ に対して,

$$J(\alpha f + (1-\alpha)g) = \|K(\alpha f + (1-\alpha)g) - c\| + \|\alpha f + (1-\alpha)g\|$$

$$\begin{aligned} &= \|\alpha(Kf - c) + (1-\alpha)(Kg - c)\| \\ &+ \|\alpha f + (1-\alpha)g\| \\ &\leq \alpha J(f) + (1-\alpha)J(g) \end{aligned}$$

となる.

さて, f が最適解であるための必要十分条件はつぎの式で与えられる.

$$J(f + \epsilon g) - J(f) \geq 0 \quad \forall \epsilon > 0 \quad \forall g \in L^p(0, T; F) \quad (13)$$

ここで,

$$V(\epsilon) = (J(f + \epsilon g) - J(f))/\epsilon, \quad \epsilon > 0 \quad (14)$$

とおけば $V(\epsilon) \geq 0$ である. $\epsilon \downarrow 0$ なるときの極限が存在すればとうぜん, $\lim_{\epsilon \downarrow 0} V(\epsilon) \geq 0$ である. $J(f)$ が凸関数であることから $V(\epsilon)$ は $\epsilon \downarrow 0$ について単調減少となる. したがって “有界な単調減少列は収束する” という解析学でよく知られた定理により, $\lim_{\epsilon \downarrow 0} V(\epsilon)$ の存在が保証される¹³⁾. このことをつぎの定理にまとめる.

【定理 1】 f が最適解であるための必要十分条件は,

(15) 式がすべての $g \in L^p(0, T; F)$ について成立することである.

$$\delta^+ J(f; g) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{J(f + \epsilon g) - J(f)}{\epsilon} \geq 0 \quad (15)$$

【証明】 十分条件 $V(\epsilon)$ は $\epsilon \downarrow 0$ について単調減少列であるから,

$$V(1) \geq V(0+) = \delta^+ J(f; g)$$

である.

$$J(f + g) - J(f) \geq \delta^+ J(f; g) \geq 0 \quad \forall g$$

$$\therefore J(f + g) \geq J(f) \quad \forall g \in L^p(0, T; F)$$

すなわち f は J の最小元である.

必要条件 ある $g_0 \neq 0$ に対して $\delta^+ J(f; g_0) < 0$ であると仮定する. $V(\epsilon)$ は $\epsilon > 0$ について連続である (付録 I) から, 十分小さい ϵ_0 に対して,

$$V(\epsilon) \leq V(\epsilon_0) < 0 \quad \forall 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$$

が成立する.

$$\therefore J(f + \epsilon g_0) < J(f) \quad \forall 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$$

となり, f の最適性に反する. (証明終)

$\delta^+ J(f; g)$ は f における g 方向の片側ガトウ微分 (one-sided Gateaux differential) と呼ばれる. $\delta^+ J(f; g)$ はつぎの性質をもっている.

(i) 正值同次性 (positive homogeneity)

$$\delta^+ J(f; \lambda g) = \lambda \delta^+ J(f; g), \quad \forall \lambda \geq 0$$

(ii) 劣加法性 (subadditivity) $\delta^+ J(f; g+h)$

$$\leq \delta^+ J(f; g) + \delta^+ J(f; h)$$

さらに $\delta^+ J(f; g)$ がつぎの式,

$$\delta^+ J(f; -g) = -\delta^+ J(f; g)$$

を満足するとき, $\delta^+ J(f; g)$ は g について同次となる.

このとき, J は f でガトウ微分可能であるといい, これを $\delta J(f; g)$ と記す¹³⁾.

【系】 J がガトウ微分可能であるとき, J が f で最小となるための必要十分条件は,

$$\delta J(f; g) = 0 \quad \forall g \in L^p(0, T; F) \quad (16)$$

である.

つぎに最適制御の一意性をしらべる.

凸集合上で定義された凸はん関数 J がつぎの条件をみたすとき, 狭義凸はん関数 (strictly convex functional) と呼ばれる¹⁴⁾.

$g \neq f$ なるとき,

$$J(\alpha f + (1-\alpha)g) < \alpha J(f) + (1-\alpha)J(g) \quad \forall 0 < \alpha < 1$$

この狭義凸はん関数に対してはつぎの定理が成立する.

【定理 2】 $J(f)$ が狭義凸はん関数であるとき, 最適解が存在すればそれは一意である.

【証明】 $f_1, f_2 (f_1 \neq f_2)$ が $\min_f J(f) = \beta$ を与える 2 つの最適解とする. このとき, $0 < \alpha < 1$ なる α に対して,

$$J(\alpha f_1 + (1-\alpha)f_2) < \alpha J(f_1) + (1-\alpha)J(f_2) = \beta$$

となる. f_1, f_2 の最適性に反する. よって最適解は一意である. (証明終)

4. 各種の空間での必要十分条件

バナッハ空間 F および p, q を定めて (15) 式を具体的に計算する. 4.1, 4.2, 4.3 では希望状態とシステムの状態との差はヒルベルトノルムではかるものとする.

4.1 消費燃料に注目する場合

F は実数 (スカラー) 空間とする. 制御入力 f を,

$$\|f\|_1 = \int_0^T |f(t)| dt$$

なる L^1 ノルムで評価する. このとき評価関数,

$$J_1(f) = \|f\|_1 + \frac{1}{2} \|Kf - c\|_2^2 \quad (17)^{*1}$$

を最小にする制御入力 f を求める.

$$Z(f) = \{t | 0 \leq t \leq T, f(t) = 0\}$$

$$\operatorname{sgn} f(t) = \begin{cases} f(t)/|f(t)| & f(t) \neq 0 \\ 0 & f(t) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

と定義すれば, $\delta^+ J_1(f; g)$ は付録 II, IV から,

$$\begin{aligned} \delta^+ J_1(f; g) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\|f + \epsilon g\|_1 - \|f\|_1}{\epsilon} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\|Kf - c + \epsilon Kg\|_2^2 - \|Kf - c\|_2^2}{\epsilon} \\ &= \int_{Z(f)} |g(t)| dt + \langle \operatorname{sgn} f \end{aligned}$$

$$+ K^* Kf - K^* c, g \rangle \geq 0^{*2}$$

同様に,

$$\begin{aligned} \delta^+ J(f; -g) &= \int_{Z(f)} |g(t)| dt - \langle \operatorname{sgn} f \\ &+ K^* Kf - K^* c, g \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

上の 2 つの式から最適解 f のみたすべき式が得られる.

$$|\langle \operatorname{sgn} f + K^* Kf - K^* c, g \rangle| \leq \int_{Z(f)} |g(t)| dt \quad (19)$$

$R(f) = \{t \in (0, T) | f(t) \neq 0\}$ とおくと, $Z(f) \cap R(g)$ のルベーク測度が 0 となる g に対して (19) 式は,

$$\langle \operatorname{sgn} f + K^* Kf - K^* c, g \rangle = 0 \quad (20)$$

となる. したがって, とくに f のゼロ点が高々可算個である場合には最適解 f はつぎの式で与えられる.

$$\operatorname{sgn} f + K^* Kf - K^* c = 0 \quad (21)$$

F が一般の L^1 または n 次元ユークリッド空間 R^n のときには付録 II を参照して同様の条件式を得ることができる.

4.2 消費エネルギーに注目する場合

F はヒルベルト空間とし, 制御入力 f は,

$$\|f\|_2^2 = \int_0^T \|f(t)\|_F^2 dt$$

で評価する. このとき評価関数,

$$J_2(f) = \frac{1}{2} \|f\|_2^2 + \frac{1}{2} \|Kf - c\|_2^2 \quad (22)$$

を最小にする最適制御を求める.

$$\begin{aligned} \delta^+ J_2(f; g) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\|f + \epsilon g\|_2^2 - \|f\|_2^2}{\epsilon} \right. \\ &+ \left. \frac{\|Kf - c + \epsilon Kg\|_2^2 - \|Kf - c\|_2^2}{\epsilon} \right) \\ &= \langle f, g \rangle_{L^2(0, T; F)} + \langle Kf - c, Kg \rangle_{L^2(0, T; U)}^{*3} \\ &= \langle f + K^* Kf - K^* c, g \rangle_{L^2(0, T; F)} \end{aligned}$$

$\delta^+ J_2(f; -g) = -\delta^+ J_2(f; g)$ となり, $J_2(f)$ はガトウ微分可能である. したがって定理 1 の系より必要十分条件はつぎの式で与えられる.

$$\begin{aligned} f + K^* Kf - K^* c &= 0 \\ [I + K^* K] f &= K^* c \end{aligned} \quad (23)$$

$[I + K^* K]$ の逆作用素が存在してかつ有界作用素となる (付録 III) から, 最適解の存在も保証される.

$$f = [I + K^* K]^{-1} K^* c \quad (24)$$

さらに $[I + K^* K]^{-1}$ も存在して,

$$[I + K^* K]^{-1} K^* = K^* [I + K^* K]^{-1}$$

となるから (24) 式はつぎの式に書くこともできる.

*2 記号 $\langle, \rangle$ はつぎのことをあらわす.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t)g(t) dt$$

*3 $\langle f, g \rangle_{L^2(0, T; F)} = \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle_F dt$ なる内積を意味する.

*1 ここではヒルベルトノルムは 2 乗してある. それでないといわれる条件式が複雑になり実際の計算が非常に困難になる. 以下 p ノルムの場合には p 乗して評価する. なおこのようにしても J の凸性はかわらない¹⁴⁾.

$$f = K^*[I + KK^*]^{-1}c \quad (25)$$

4.3 制御入力振幅に注目する場合

F は実数空間とし、 f は $(0, T)$ 上で定義された有界関数とする。そして制御入力 f を、

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t)| \quad (26)$$

なるノルムで評価するものとする。このとき評価関数、

$$J_\infty(f) = \|f\|_\infty + \frac{1}{2} \|Kf - c\|_2^2 \quad (27)$$

を最小とする最適入力 f の満たすべき式を求める。

$\delta^+ J_\infty(f; g)$ は付録 V を参照すれば、

$$\begin{aligned} \delta^+ J_\infty(f; g) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \frac{\|f + \epsilon g\|_\infty - \|f\|_\infty}{\epsilon} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\|Kf - c + \epsilon Kg\|_2^2 - \|Kf - c\|_2^2}{\epsilon} \right\} \\ &= \sup_{\epsilon > 0} \left[\inf_{\|f\|_\infty - f(t) < \epsilon} f(t) g(t) \right] \\ &\quad + \langle K^*Kf - K^*c, g \rangle \end{aligned}$$

同様に $\delta^+ J_\infty(f; -g)$ を計算し、両者が非負であることから、最適制御 f はつぎの式で与えられる。

$$\begin{aligned} \inf_{\epsilon > 0} \left[\sup_{\|f\|_\infty - f(t) < \epsilon} f(t) g(t) \right] &\leq \langle K^*c - K^*Kf, g \rangle \\ &\leq \sup_{\epsilon > 0} \left[\inf_{\|f\|_\infty - f(t) < \epsilon} f(t) g(t) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

ここに g は有界関数である。

とくに g が連続関数であるときには、(28) 式は、

$$\begin{aligned} \min_{t: |f(t)| = \|f\|_\infty} f(t) g(t) &\leq \langle K^*c - K^*Kf, g \rangle \\ &\leq \max_{t: |f(t)| = \|f\|_\infty} f(t) g(t) \end{aligned} \quad (29)$$

となる。

4.4 一般のバナッハ空間の場合 ($1 < p, q < +\infty$)

F は L^p または l^p 空間、 U は L^q または l^q なる空間とする。評価関数、

$$J_{p,q}(f) = \frac{1}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \|Kf - c\|_q^q \quad (30)$$

を最小にする f の条件式を求める。

$$\begin{aligned} \delta^+ J_{p,q}(f; g) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{J_{p,q}(f + \epsilon g) - J_{p,q}(f)}{\epsilon} \\ &= \langle |f|^{p-1} \operatorname{sgn} f, g \rangle \\ &\quad + \langle |Kf - c|^{q-1} \operatorname{sgn}(Kf - c), Kg \rangle \end{aligned}$$

J_2 と同様に (30) 式はガウ微分可能であるから、最適制御は次式で与えられる。

$$|f|^{p-1} \operatorname{sgn} f + K^*[Kf - c]^{q-1} \operatorname{sgn}(Kf - c) = 0 \quad (31)$$

なお $\|f\|_p^p$ が狭義凸関数であることから $J_{p,q}$ も狭義凸関数となり、定理 2 により最適制御は一意である。

5. 例

ヒルベルト空間での最適追従問題および最終値制御

問題の例をあげ、作用素とその共役作用素 K^* の具体的な形、および最適解の計算方法を示す。

5.1 空間分布制御入力による最終値制御

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + f(t, x) \quad 0 < x < 1 \\ \text{境界条件} \quad u(t, 0) &= 0, \quad u(t, 1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

初期状態が $u(0, x)$ であるときつぎの評価関数、

$$\begin{aligned} I(f) &= \frac{1}{2} \int_0^1 |u(T, x) - u^d(T, x)|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 |f(t, x)|^2 dx dt \end{aligned} \quad (33)$$

を最小にする最適制御 f を決定する。

2. で示したように、 $u(t) \equiv u(t, \cdot)$, $f(t) = f(t, \cdot)$ その他の記号を適切に約束すれば (32) 式は次式になる。

$$\dot{u}(t) = Au(t) + f(t)$$

A から生成される半群 $S(t)$ $t \geq 0$ を用いれば、 $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ $\Omega = (0, 1)$ なる入力に対して解は、

$$u(t) = S(t)u(0) + \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma) d\sigma \quad (34)$$

と書かれる。ここに、

$$S(t)u = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} u_n \phi_n \quad (35)$$

$$\phi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x, \quad \lambda_n = -(\pi n)^2, \quad n=1, 2, \dots$$

$$u_n = \int_0^1 u(x) \phi_n(x) dx$$

このとき、

$$K_1 f = \int_0^T S(T-\sigma)f(\sigma) d\sigma$$

で $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ から $L^2(\Omega)$ への有界作用素 K_1 を定義する。 K_1 の共役作用素 K_1^* は $L^2(\Omega)$ から $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ への有界作用素であり、次式で定義される。

$$\langle K_1 f, u \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, K_1^* u \rangle_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \quad \forall f$$

ここに、

$$\begin{aligned} \langle K_1 f, u \rangle &= \left\langle \int_0^T S(T-\sigma)f(\sigma) d\sigma, u \right\rangle \\ &= \int_0^T \langle S(T-\sigma)f(\sigma), u \rangle d\sigma \\ &= \int_0^T \langle f(\sigma), S^*(T-\sigma)u \rangle_{L^2(\Omega)} d\sigma \end{aligned}$$

いっぽう、

$$\langle f, K_1^* u \rangle = \int_0^T \langle f(\sigma), (K_1^* u)(\sigma) \rangle_{L^2(\Omega)} d\sigma$$

であり、また $S^*(t) = S(t)$ であるから、

$$(K_1^* u)(t) = S(T-t)u \quad 0 < t < T$$

となる。

$c = u^d(T) - S(T)u(0)$ とおけば最適解 f^* は (25)

式から、

$$f^* = K_1^* v, \quad v = [I + K_1 K_1^*]^{-1}c$$

で与えられる.

$$v + K_1 K_1^* v = c \quad (36)$$

まず $K_1 K_1^* v$ を計算する.

$$\begin{aligned} K_1 K_1^* v &= \int_0^T S(T-\sigma) (K_1^* v)(\sigma) d\sigma \\ &= \int_0^T S(T-\sigma) S(T-\sigma) v d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2T} S(\sigma) v d\sigma \end{aligned}$$

$v \in L^2(\Omega)$, $c \in L^2(\Omega)$ であり, $\{\phi_n\}$ は $L^2(\Omega)$ で完備正規直交基底をなすから²⁾,

$$\begin{aligned} v &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \phi_n \quad \text{ここに } v_n = \langle v, \phi_n \rangle_{L^2(\Omega)} \\ c &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n \quad c_n = \langle c, \phi_n \rangle \end{aligned}$$

とフーリエ展開すると, (35) 式により (36) 式は,

$$v_n + \frac{1}{2} \int_0^{2T} e^{\lambda_n \sigma} d\sigma v_n = c_n, \quad n=1, 2, \dots$$

となる.

$$\therefore v_n = \frac{c_n}{1 + \frac{1 - e^{-2(n\pi)^2 T}}{2(n\pi)^2}}$$

よって最適入力 f^0 は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} f^0(t) &= (K_1^* v)(t) = S(T-t) v \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi)^2 (T-t)} v_n \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{1 + \frac{1 - e^{-2(n\pi)^2 T}}{2(n\pi)^2}} e^{-(n\pi)^2 (T-t)} \phi_n \end{aligned} \quad (37)$$

5.2 空間分布制御入力による最適追従問題

(32) 式のシステムに対して,

$$\begin{aligned} J(f) &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 |u(t, x) - u^d(t, x)|^2 dx dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 |f(t, x)|^2 dx dt \end{aligned} \quad (38)$$

を最小にする入力 f を決める.

$$(K_2 f)(t) = \int_0^t S(t-\sigma) f(\sigma) d\sigma, \quad 0 < t < T$$

により, $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ から $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ への有界作用素 K_2 を定義する. K_2^* は $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ から自分自身への作用素であり, 次式により定義される.

$$\begin{aligned} \langle K_2 f, g \rangle_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} &= \langle f, K_2^* f \rangle_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}, \quad \forall f \\ \langle K_2 f, g \rangle &= \int_0^T \langle (K_2 f)(t), g(t) \rangle_{L^2(\Omega)} dt \\ &= \int_0^T \int_0^t \langle S(t-\sigma) f(\sigma), g(t) \rangle d\sigma dt \end{aligned}$$

積分順序を交換すれば,

$$= \int_0^T \left\langle f(\sigma), \int_0^T S(t-\sigma) g(t) dt \right\rangle d\sigma$$

$$\therefore (K_2^* g)(\sigma) = \int_0^T S(t-\sigma) g(t) dt$$

$c(t) = u^d(t) - S(t) u(0) \in L^2(\Omega)$ とおけば, 最適解 f^0 は (23) 式から,

$$[I + K_2^* K_2] f^0 = K_2^* c \quad (23')$$

である. まず $K_2^* K_2 f$ を計算する.

$$\begin{aligned} (K_2^* K_2 f)(t) &\equiv \int_t^T S(\sigma-t) (K_2 f)(\sigma) d\sigma \\ &= \int_t^T S(\sigma-t) \left[\int_0^\sigma S(\sigma-\tau) f(\tau) d\tau \right] d\sigma \\ &= \int_t^T d\sigma \int_0^\sigma S(2\sigma-t-\tau) f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$f_n(\tau) = \langle f(\tau), \phi_n \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(\tau, x) \phi_n(x) dx$$

とおけば,

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^T d\sigma \int_0^\sigma e^{\lambda_n(2\sigma-t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \times \phi_n$$

$c(t)$ のフーリエ係数を $c_n(t)$ として, (23') 式の両辺のフーリエ係数を比較すれば,

$$\begin{aligned} f_n(t) + \int_t^T d\sigma \int_0^\sigma e^{\lambda_n(2\sigma-t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \\ = \int_t^T e^{\lambda_n(\sigma-t)} c_n(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (39)$$

$f_n(t)$ は t について微分可能であることがわかり,

(39) 式を微分して整理すると次式を得る.

$$\dot{f}_n(t) + \lambda_n f_n(t) - \int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau = -c_n(t) \quad (40)$$

この微分積分方程式を $f_n(T) = 0$ のもとで解けば最適入力 f^0 が決定される.

とくに, $c_n(t)$ がほとんどいたる所で微分可能ならば (40) 式は微分方程式にすることができ, 陽の形で f を求めることができる. $c_n(t)$ が微分可能な点では $\dot{f}_n(t)$ が存在するから,

$$\begin{aligned} \dot{f}_n + \lambda_n f_n - f_n - \lambda_n \int_0^t e^{\lambda_n(t-\sigma)} f_n(\sigma) d\sigma &= -\dot{c}_n \\ \therefore \dot{f}_n(t) - (1 + \lambda_n^2) f_n(t) &= \lambda_n c_n(t) - \dot{c}_n(t) \end{aligned} \quad (41)$$

$\alpha_n = \sqrt{1 + \lambda_n^2}$ において (41) 式を解くと, D_n, E_n を積分定数として次式を得る.

$$\begin{aligned} f_n(t) &= D_n \sinh \alpha_n t + E_n \cosh \alpha_n t \\ &\quad - \int_0^t c_n(s) \left[\cosh \alpha_n(t-s) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_n}{\alpha_n} \sinh \alpha_n(t-s) \right] ds \\ \left. \begin{aligned} (40) \text{ 式から } \dot{f}_n(0) + \lambda_n f_n(0) &= -c_n(0) \\ (39) \text{ 式から } f_n(T) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (42) \end{aligned}$$

(42) 式を満足するように, D_n, E_n を決定すれば最終

的に次式を得る.

$$f_n(t) = \frac{\cosh \alpha_n t - \frac{\lambda_n}{\alpha_n} \sinh \alpha_n t}{\cosh \alpha_n T - \frac{\lambda_n}{\alpha_n} \sinh \alpha_n T} \int_0^T c_n(s) \times \left[\cosh \alpha_n (T-s) - \frac{\lambda_n}{\alpha_n} \sinh \alpha_n (T-s) \right] ds - \int_0^t c_n(s) \left[\cosh \alpha_n (t-s) - \frac{\lambda_n}{\alpha_n} \sinh \alpha_n (t-s) \right] ds \quad (43)$$

よって最適入力 f° はつぎの式で与えられる.

$$f^\circ(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \phi_n(x)$$

6. 結 言

バナッハ空間における最適追従問題および最終値制御問題を考察し、最適解の必要十分条件を導いた. ヒルベルト空間以外での最適制御問題の最適解は非線形方程式で与えられることが示された. ヒルベルト空間の場合についての例をあげ、それらの最適解を計算した. なお $J_{p,q}$ の最適制御 (31) 式を計算するにはたとえ Altman¹⁵⁾ の方法が適用できる. L^1, L^∞ での最適制御を与える式 (19), (28) 式の計算法については目下研究中である.

本稿の理論の展開からわかるように、分布定数系を半群の理論によってバナッハ空間においてダイナミカル表示し、これに基づいて最適制御問題を考察することは理論的見通しをよくする. とくに有限次元で展開された理論が自然の形で分布系に拡張されていることがわかる. なお本手法は結局入力-状態関係式が有界作用素で表示できることを本質的に使っているだけである. したがって希望出力に追従させる問題についても、 K を入力-出力の作用素とするのみでそのまま適用される. この点に関しては文献 (16, 17) でさらに発展させた.

なお最適解を時間関数の形で求めたが、ヒルベルト空間の場合には有限次元の場合によく知られているようにフィードバックの形に書くこともできる^{11), 18)}.

最後に、本研究にさいして終始熱心に討論いただいた本学自動制御研究施設の諸氏、とくに助手松尾強、大学院学生野村拓己、赤塚義邦、南出成康らの諸氏に感謝する.

参 考 文 献

- 1) 舟橋・中村：半群の理論と放物型ダイナミカル・システムの解の存在と一意性，名大自動制御研究施設報告，Vol. 15, 8/14 (1968-4)
- 2) 舟橋・中村：分布定数系の入力・状態関係式のダイナ

ミカル表示，同上 15/21

- 3) A. G. Butkovskii : Maximum principle for optimum systems with distributed parameters, Automation and Remote Control, **22-10**, 1156/1169 (1962)
- 4) K. Ichikawa : Application of Pontryagin's maximum principle to the optimization of distributed parameter system, Res. Rept. of Aut. Cont. Lab., Faculty of Eng., Nagoya Univ., Vol. 15, 68/76 (1968-4)
- 5) P. K. C. Wang : Control of Distributed Parameter Systems, Advances in Control Systems, Vol. 1, Academic Press, 75/172 (1964)
- 6) H. O. Fattorini : Time-optimal control of solutions of operational differential equations, J. SIAM Control, **2-1**, 54/59 (1964)
- 7) A. V. Balakrishnan : Optimal control problems in Banach spaces, J. SIAM Control, **3-1**, 152/180 (1965)
- 8) A. Friedman : Optimal control in Banach spaces, J. Math. Anal. and Appl., **19-1**, 35/55 (1967)
- 9) E. I. Axelband : A solution to the optimal pursuit problem for distributed parameter systems, J. Computer and System Sciences, **1-3**, 261/286 (1967)
- 10) D. M. Wiberg : Feedback control of linear distributed systems, J. of Basic Engineering Ser. D., **89-2**, 379/384 (1967)
- 11) 中村・舟橋：分布定数系のレギュレータ問題，第6回計測制御学術講演会，220 (昭 42. 10 月)
- 12) N. Dunford and J. T. Schwartz : Linear Operators, part. 1 General Theory, Interscience Publ., 472 (1958)
- 13) F. A. Valentine : Convex Sets, 130/134, McGraw-Hill Company (1964)
- 14) C. Berge : Espaces Topologiques, 198/204, (1966-Dund)
- 15) M. Altman : On the Approximate Solutions of Operator Equations in L^p Spaces, Bulletin de Academie Polonaise des Sciences, **5-12**, 1099/1103 (1957)
- 16) 中村・舟橋：二乗積分評価による最適制御問題，第10回自制御大，110 (昭 42. 11 月)
- 17) 舟橋・中村：ヒルベルト空間における最適追従問題 (「計測と制御」論文集投稿中)
- 18) 舟橋・中村：ヒルベルト空間における最適フィードバック制御 (投稿中)

□ 付 録 □

I. $V(\epsilon)$ が $\epsilon > 0$ について連続であること

$$\begin{aligned} |V(\epsilon_1) - V(\epsilon_2)| &= \left| \frac{J(f+\epsilon_1 g)}{\epsilon_1} - \frac{J(f+\epsilon_2 g)}{\epsilon_2} \right| \\ &= \left| \frac{J(f)}{\epsilon_1} - \frac{J(f)}{\epsilon_2} \right| = \left| \frac{\|Kf - c + \epsilon_1 Kg\|}{\epsilon_1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\|Kf - c + \epsilon_2 Kg\|}{\epsilon_2} + \frac{\|f + \epsilon_1 g\|}{\epsilon_1} - \frac{\|f + \epsilon_2 g\|}{\epsilon_2} \right| \\ &= \left| \frac{J(f)}{\epsilon_1} - \frac{J(f)}{\epsilon_2} \right| \leq \left| \frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right| \|Kf - c\| \end{aligned}$$

$$+ \left| \frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right| \|f\| + \left| \frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right| J(f) \\ \leq 2 \left| \frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right| J(f)$$

II. $L_1(0, T)$ のノルムの片側ガウ微分*

$$Z(f) = \{t \in (0, T) \mid f(t) = 0\}, \\ R(f) = \{t \in (0, T) \mid f(t) \neq 0\}$$

$$\operatorname{sgn} f(t) = \begin{cases} f(t)/|f(t)|, & f(t) \neq 0 \\ 0, & f(t) = 0 \end{cases} \text{ と定義する.}$$

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\|f + \epsilon g\| - \|f\|}{\epsilon} \\ = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^T \frac{|f(t) + \epsilon g(t)| - |f(t)|}{\epsilon} dt \\ = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[\int_{Z(f)} \frac{|\epsilon g(t)|}{\epsilon} dt \right. \\ \left. + \int_{R(f)} \frac{1}{\epsilon} \frac{|f(t) + \epsilon g(t)|^2 - |f(t)|^2}{|f(t) + \epsilon g(t)| + |f(t)|} dt \right] \\ = \int_{Z(f)} |g(t)| dt \\ + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{R(f)} \frac{2f(t)g(t) + \epsilon |g(t)|^2}{|f(t) + \epsilon g(t)| + |f(t)|} dt \\ = \int_{Z(f)} |g(t)| dt + \int_{R(f)} \frac{f(t)}{|f(t)|} g(t) dt \\ = \int_{Z(f)} |g(t)| dt + \int_0^T \operatorname{sgn} f(t) \cdot g(t) dt \\ = \int_{Z(f)} |g(t)| dt + \langle \operatorname{sgn} f, g \rangle$$

$Z(f) \cap R(g)$ のルベーク測度がゼロとなるときは、
 $= \langle \operatorname{sgn} f, g \rangle$

したがって、 $Z(f)$ の測度がゼロなる f の点では L^1 のノルムはガウ微分可能である。

f の領域が例えば $L^1(\Omega)$ なるときにはつぎのようになる。

$$Z(f) = \{(t, x) \in (0, T) \times \Omega \mid f(t, x) = 0\} \\ R(f) = \{(t, x) \in (0, T) \times \Omega \mid f(t, x) \neq 0\} \\ \|f\| = \int_0^T \|f(t)\|_{L^1(\Omega)} dt = \int_0^T \int_{\Omega} |f(t, x)| dx dt \\ \therefore \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\|f + \epsilon g\| - \|f\|}{\epsilon} \\ = \int \int_{Z(f)} |g(t, x)| dx dt \\ + \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{sgn} f(t, x) g(t, x) dx dt$$

III. $[I + K^*K]$ の作用素に関する諸点の証明

[1] $I + K^*K$ の逆作用素が存在すること。

$(I + K^*K)f = 0$ をみたす f が 0 元に限ることを示せばよい。

$$0 = \langle f, (I + K^*K)f \rangle = \|f\|^2 + \|Kf\|^2$$

$\|Kf\|^2 \geq 0$ であるから $\|f\| = 0$ すなわち $f = 0$ である。

[2] $[I + K^*K]^{-1}$ が有界作用素であること。

$f = [I + K^*K]^{-1}g$ とおくと、 $g = (I + K^*K)f$ であるから、

$$\|g\|^2 = \|f + K^*Kf\|^2 = \|f\|^2 + 2\|Kf\|^2 \\ + \|K^*Kf\|^2 \geq \|f\|^2 = \|(I + K^*K)^{-1}g\|^2$$

すなわち、

$$\|[I + K^*K]^{-1}g\| \leq \|g\|, \quad \forall g$$

よって $[I + K^*K]^{-1}$ は有界作用素であり、作用素ノルムは 1 でおさえられる。

[3] $[I + K^*K]^{-1}K^* = K^*[I + KK^*]^{-1}$ であること。

$$f = [I + K^*K]^{-1}K^*c \\ g = K^*[I + KK^*]^{-1}c$$

とおく。 f, g に $(I + K^*K)$ を作用させると、

$$[I + K^*K]f = K^*c \\ [I + K^*K]g = [I + K^*K]K^*[I + KK^*]^{-1}c \\ = K^*[I + KK^*][I + KK^*]^{-1}c \\ = K^*c$$

となる。

$$\therefore [I + K^*K]f = [I + K^*K]g$$

$$\text{i. e. } f = g$$

IV. $L^p(0, T)$ $1 < p < \infty$ でのノルムの微分

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\|f + \epsilon g\|^p - \|f\|^p}{\epsilon} \\ = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \left[|f(t) + \epsilon g(t)|^p - |f(t)|^p \right] dt \\ = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^T \left\{ |f(t) + \epsilon g(t)|^{p-1} + \dots \right. \\ \left. + |f(t)|^{p-1} \right\} \frac{|f(t) + \epsilon g(t)| - |f(t)|}{\epsilon} dt \\ = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{Z(f)} |g(t)|^p dt \epsilon^{p-1} \\ + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{R(f)} \left\{ \dots \right\} \frac{|f(t) + \epsilon g(t)|^2 - |f(t)|^2}{\epsilon[|f(t) + \epsilon g(t)| + |f(t)|]} dt \\ = \int_{R(f)} p|f(t)|^{p-1} \operatorname{sgn} f(t) g(t) dt \\ = \int_0^T p|f(t)|^{p-1} \operatorname{sgn} f(t) g(t) dt \\ = \langle p|f|^{p-1} \operatorname{sgn} f, g \rangle$$

とくに $p=2$ の場合には、

$$= 2 \langle f, g \rangle$$

である。 g について線形であるから、 $L^p(0, T)$, $1 < p < +\infty$ のノルムはガウ微分可能である。 $L^p(0, T; L^p(\Omega))$ についても同様の式を得る。

V.

$(0, T)$ 上で定義された有界関数に $\|f\|_{\infty} = \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t)|$ なるノルムを導入した空間での片側微分*

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\|f + \epsilon g\|_{\infty} - \|f\|_{\infty}}{\epsilon} \\ = \inf_{\epsilon > 0} \left[\sup_{\|f(t) - f(t')\| < \epsilon} f(t) g(t) \right] \\ = \max_{t: |f(t)| = \|f\|_{\infty}} f(t) g(t)$$

とくに g が連続関数であるときには、

* B. K. Kripke and T. J. Rivin : Approximation in the metric of $L^1(X, \mu)$, Trans. Amer. Math. Soc., 119, 101/122 (1965)

* V. L. Smulian : Sur la structure de la sphère unitaire dans l'espace de Banach, Matematichesкий Сборник T. 9 (51), N 3, 545/561 (1941)