線形計画法による準最適制御の計算法

毛 利 彰・永 井 智 幸・高 田 勝

九州大学工学部 福岡市箱崎町

(昭和 44 年 4 月 3 日 受付)

A Computational Method for Sub-Optimal Control by Linear-Programming

Akira MOHRI, Tomoyuki NAGAI and Masaru TAKATA

(Faculty of Engineering, Kyusyu University, Fukuoka)

(Received April 3, 1969)

A minimum-time control problem of a linear system is reduced to a problem of L.P. (Linear Programming), when it is considered in the sampled-mode control. In this case, if we take the sampling-interval small, then a solution, which is given by this sampled-mode system, will be available as the first approximation of a solution of the continuous system. Therefore, by reducing the sampled-mode control to Bang-Bang type control and evaluating the variation of the terminal time point by variations of switching-times, this continuous-type problem can be solved by L.P. too. Then an accuracy which is given by this method is within the error of the order of 10^{-4} in term of a norm of $\mathbf{x}$, $\|\mathbf{x}\|$. This accuracy is acceptable, compared with Yamaguchi's, Plants's and others.

In one word, this report describes a method which solves a minimum-time control problem of a linear system by L.P., which is a usual and simple procedure.

1. ま え が き

制御系の最適化の問題は, Bellman の Bang-Bang 制御, Pontryagin¹⁾ の Maximum Principle (以後 M.P.) 以前においては, 個別的に論じられてきたただけであったが, Bellman や Pontryagin らにより, はじめて変分学の立場より一般的かつ統一的に論じられるようになった。

一般に最適制御問題は, Neustadt²⁾ や Knudsen³⁾ の論文に示されるように, 2 点境界値問題に帰着され, 解析的には一般にその解は求められず, 数値解として求められることになる。したがって最適解を求めるにあたり, 収束のはやいアルゴリズムの開発が問題となる。

もし, プロセスが線形で評価関数もまた線形である場合には, 坂和⁴⁾ が示すように, 線形計画法 (以後 L.P.) を使用することが可能であり, 収束もはやくより実用的なアルゴリズムが得られる。

サンプル値系に対する最短時間制御への L.P. の使用が高田⁵⁾ によりさきに示されているが, 以下に述べ

ることは, その連続系に対する拡張ともいえるものであり, ここで用いる手法に対する発想としては, Plant⁶⁾, 山口⁷⁾, ならびに Larson⁸⁾ に負うところが大きい。

ここでは一操作量についてのアルゴリズムとその結果を示すものであるが, 最適化の手法としては, M.P. により導出される最短時間制御関数に対する必要条件, およびサンプル値制御においてサンプリング周期を小さくすると連続系に対する M.P. の結果に近づくという性質を利用し, 最終的に, L.P. の問題に帰着せしめたものである。

当論文においては, はじめに L.P. による線形プロセスの最短時間サンプル値制御について述べ, 次にその連続系に対する拡張を試みる。最後にその結果, ならびに考察を述べるものである。

2. 問 題 の 設 定

プロセスは次のベクトル微分方程式により表わされるものとする。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (1)$$

ここで $\mathbf{x}(t)$ は n 次元状態ベクトル, $\mathbf{A}$ は $n \times n$ 定数行列, $\mathbf{b}$ は n 次元ベクトル, $u(t)$ はスカラーで,

$$|u(t)| \leq 1 \quad (2)$$

を満足する制御関数とする。

最短時間制御問題とは, 状態ベクトル $\mathbf{x}(t)$ を, 初期値 $\mathbf{x}(0)$ から最終値 $\mathbf{x}_f^*$ へ最短時間で到達させる制御関数 $u(t)$ を求めることである。

$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0^*$ とおくと, (1) 式の解は次のとおりである。

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \left(\mathbf{x}_0^* + \int_0^t \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau \right) \quad (3)$$

ここで $\Phi(t)$ は (1) 式の斉次方程式,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (4)$$

の基本行列である。すなわち $\Phi(t)$ は,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathbf{A}\Phi, \quad \Phi(0) = \mathbf{I} \quad (5)$$

を満足する $n \times n$ 行列である。

$\mathbf{A}$ が定数行列のときには, $\Phi(t)$ は次式で与えられる。

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} \quad (6)$$

(1), (2) 式に対する最適制御関数 $u^*(t)$, 最適軌道を $\mathbf{x}^*(t)$ とする。Pontryagin の M.P. によると $u^*(t)$ に対する必要条件は,

$$u^*(t) = \text{sgn}(\boldsymbol{\eta}, \Phi^{-1}(t) \mathbf{b}) \quad (7)$$

を満足する $\mathbf{0}$ でない n 次元ベクトル $\boldsymbol{\eta}$ が存在することである。ここで $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ はベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の内積を示す。

したがって (1), (2) 式に対する最適制御関数 $u^*(t)$ は, いわゆる Bang-Bang 形となり, $u^*(0)$ の値, 切換え時刻, および切換え回数を求めることが問題となる。

3. 最短時間サンプル値制御

連続系において (1) および (2) 式で表わされるプロセスは, サンプル値制御系の場合, サンプルング周期を T とすると, 次の階差方程式により表わされる。

$$\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{G}_r(T) \mathbf{x}_r + \mathbf{h}_r(T) m_r \quad (8)$$

$$|m_r| \leq 1 \quad (9)$$

$$(r=0, 1, 2, \dots)$$

ここで $\mathbf{x}_r$ は, 時刻 rT における系の状態を示す n 次元のベクトル, m_r は第 r 段での操作量を示すスカラー量である。また $\mathbf{G}_r(T), \mathbf{h}_r(T)$ は (1) 式の行列 $\mathbf{A}$ が定数行列の場合には, r に依存せず $\mathbf{G}(T), \mathbf{h}(T)$ となる。ここに,

$$\mathbf{G}(t) = e^{\mathbf{A}t} \quad (10)$$

$$\mathbf{h}(t) = \int_0^t \mathbf{G}(t) \mathbf{G}^{-1}(\tau) \mathbf{b} d\tau \quad (11)$$

あきらかに, $\mathbf{G}(t)$ は $n \times n$ 行列, $\mathbf{h}(t)$ は n 次元ベ

クトルとなっている。

このとき, サンプル値系に対する最短時間制御問題は次のように表現される。

すなわち, 最小の段数 r で指定された点 $\mathbf{x}_f^*$ に $\mathbf{x}_r$ を, 初期状態 $\mathbf{x}_0^*$ から移動させるような操作量 $m_r (r=0, 1, 2, \dots)$ の点列を選ぶことである。ここでとうぜん m_r は $rT \leq t \leq (r+1)T$ の間, 一定値に保持される。

以上の問題に対する理論的考察は, Lee⁹⁾ や熊谷¹⁰⁾ らによりなされている。

いま (9) 式をみたす一連の操作量 $\{m_r\}$ を加えたとき, 時刻 KT での状態ベクトル $\mathbf{x}_K$ は, (8) 式により次のようになる。

$$\mathbf{x}_K = \mathbf{G}^K(T) \mathbf{x}_0^* + \sum_{r=0}^{K-1} \mathbf{G}^r(T) \mathbf{h}(T) m_{K-r-1} \quad (12)$$

状態点 $\mathbf{x}_K$ と, 目標点 $\mathbf{x}_f^*$ との間の誤差ベクトル $\mathbf{e}$ を次のように定義する。

$$\mathbf{e} = (e^1, e^2, \dots, e^n)' = \mathbf{x}_f^* - \mathbf{x}_K \quad (13)$$

このとき, 最短時間問題は $\max \{|e^i|, i=1, \dots, n\}$ を零とするような, できるだけ小さい K の値, および (9) 式をみたす操作系列 $\{m_r\} (r=0, 1, \dots, K-1)$ をみいだすこととなる。これは新しい変数 g を導入して, L.P. の問題に帰することができる。すなわち,

$$g + e^i \geq 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (14)$$

$$g - e^i \geq 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (15)$$

および,

$$-1 \leq m_r \leq 1 \quad (r=0, \dots, K-1) \quad (16)$$

の条件の下で, g の最小値が許容値以下となるような最小の K を求めよということになる。

いま行列 $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}_{ij}\} (n \times K)$ を次のように定義する。

$$\mathbf{S} = (\mathbf{G}^{K-1}(T) \mathbf{h}(T), \mathbf{G}^{K-2}(T) \mathbf{h}(T), \dots, \mathbf{G}(T) \mathbf{h}(T), \mathbf{h}(T)) \quad (17)$$

また K 次のベクトル $\mathbf{i}_K$ を $\mathbf{i}_K = (1, 1, \dots, 1)'$ とし, ベクトル $\mathbf{v}, \mathbf{C}$ を次のように定義する。

$$\mathbf{v} = (v^1, v^2, \dots, v^K)', \quad (v^i = m_{i-1} + 1, i=1, \dots, K) \quad (18)$$

$$\mathbf{C} = (c^1, c^2, c^n)' = \mathbf{x}_f^* - \mathbf{G}^K(T) \mathbf{x}_0^* + \mathbf{S} \mathbf{i}_K \quad (19)$$

このとき, (13) 式は次のように表わされる。

$$\mathbf{e} = \mathbf{C} - \mathbf{S} \mathbf{v} \quad (20)$$

したがって, いま問題となっている L.P. の形は, 次のように示される。すなわち,

$$-g + \sum_{j=1}^K \mathbf{S}_{ij} v^j \leq C^i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

$$-g - \sum_{j=1}^K \mathbf{S}_{ij} v^j \leq -C^i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

$$0 \leq v^r \leq 2 \quad (r=1, \dots, K) \quad (23)$$

の $(2n+2K)$ 個の条件の下で, 次の評価関数,

$$f = -g \quad (24)$$

を最大にせよという問題となる。

(21)~(24)式で示される L. P. の解において求められた g の値が,

$$g \leq \delta \quad (\delta: \text{許容誤差}) \quad (25)$$

をみたすとき、状態点 $\mathbf{x}_K$ は目標点 $\mathbf{x}_f^*$ に到達したとみなせる。したがって、小さな k の値に対して、上の L. P. を解き、その解 g が(25)式をみたすまで K の値を一段ずつ増加してゆくことにより、サンプル値系に対する最適制御系列 $\{m_r\}$ ($r=0, 1, \dots, K-1$) を求めることができる。

4. 連続系への拡張

すでに述べたように最短時間制御問題は、一般に 2 点境界値問題となり繰返し計算法でとかなければならない。

このとき、最短時間制御関数のおよその形がわかるならば、収束のはやい計算法が採用される。

前章で示した方法によって得られるサンプル値系に対する最適操作系列 $\{m_r\}$ はサンプリング周期 T により変化する。このとき、Lee らが示すように $\{m_r\}$ は Bang-Bang 形とはならず、中間値をとるものとなるが、 T を細かくしてゆくと連続系に対して、MP により予測される結果に近づくことがわかる。したがってこの $\{m_r\}$ を Bang-Bang 形になおした場合、連続系に対する最適制御関数 $u^*(t)$ にかかなり近いものが得られるものと予想される。

ここでは、制御面積が等しくなるように $\{m_r\}$ から、Bang-Bang 形の制御を求める。すなわち $\{m_r\}$ の符号の切換え回数を $(S-1)$ とする。このとき、Bang-Bang 形の制御 $u(t)$ を次のように決める。

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \text{sgn}(m_r), \quad \sum_{j=0}^{i-1} \tau_j \leq t \leq \sum_{j=0}^i \tau_j \\ \text{ここで、} \\ \tau_i &= \sum_{j=r}^{r+p} |m_j| T, \quad \text{sgn}(m_r) = \text{sgn}(m_{r+1}) = \\ &\dots = \text{sgn}(m_{r+p}) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ただし、 $\tau_0=0$, ($i=1, 2, \dots, S$)

切り換え時刻 t_i ($i=1, 2, \dots, S-1$) はとうぜん次式により求められる。

$$t_i = \sum_{j=1}^i \tau_j \quad (i=1, 2, \dots, S-1), \quad \text{また } t_S = \sum_{j=1}^S \tau_j \quad (27)$$

このとき、とうぜん $u(t)$ は $t \geq t_S$ なる t では零とする。

図で説明すると $\{m_r\}$ として Fig. 1-(a) のようなものが与えられたとき $u(t)$ は、(26), (27)式に従い、Fig. 1-(b) のようになる。

Fig. 1 Transformation from sampled-mode control to Bang-Bang type control by using eq. (26)

以上の手順によって求められた制御関数 $u(t)$ は確かに Bang-Bang 形になっている。

以上のように、サンプル値系に対する最適操作系列 $\{m_r\}$ から Bang-Bang 形の制御を得るために、制御面積が等しくなるように決めたが、これがもっとも簡単な方法ではあるが最上のものではない。

別な方法として次のような手法も考えられる。すなわち、いま $u = \text{sgn}(m)$ とし、制御量 u と制御量 m とを同じ初期状態に、それぞれ τ, t 時間作用させるとき、状態点は次のように移動させられる。

(8)式により、

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}(t) \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}(t) m \quad (28)$$

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{G}(\tau) \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}(\tau) u \quad (29)$$

ここで、

$$u = \text{sgn}(m) \quad (30)$$

また、 $\mathbf{G}(t)$, $\mathbf{h}(t)$ をテーラー展開することにより次式を得る。

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{G}(0) + \left[\frac{d\mathbf{G}(S)}{dS} \right]_{S=0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{d^2\mathbf{G}(S)}{dS^2} \right]_{S=0} \cdot t^2 + \dots \quad (31)$$

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}(0) + \left[\frac{d\mathbf{h}(S)}{dS} \right]_{S=0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{d^2\mathbf{h}(S)}{dS^2} \right]_{S=0} \cdot t^2 + \dots \quad (32)$$

したがって、 t が微小量ならば(10), (11), (31)および(32)式から、 t の 2 次以上の高次の項を無視すると、

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t \quad (33)$$

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{b}t \quad (34)$$

ゆえに、(28)および(29)式で、 t と τ が微小なならば、

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t) \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}tm = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}m)t \quad (35)$$

$$\mathbf{x}(\tau) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}\tau) \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}\tau u = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}u)\tau \quad (36)$$

いま、

$$\mathbf{V} = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\tau) \quad (37)$$

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}m \quad (38)$$

$$\mathbf{V}_u = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}u \quad (39)$$

とおくと、

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_m t - \mathbf{V}_u \tau \quad (40)$$

ここで $\|\mathbf{V}\|^2$ が最小となるように τ を定めることにより、制御量 m を t 時間作用させることは、制御量 u を τ 時間させることとほぼ等価な結果となる。

$$\|\mathbf{V}\|^2 = \mathbf{V}'\mathbf{V} = [\mathbf{V}_m t - \mathbf{V}_u \tau]'[\mathbf{V}_m t - \mathbf{V}_u \tau]$$

$$= \mathbf{V}_m' \mathbf{V}_m t^2 - \mathbf{V}_m' \mathbf{V}_u t \tau - \mathbf{V}_u' \mathbf{V}_m t \tau + \mathbf{V}_u' \mathbf{V}_u \tau^2 \quad (41)$$

$\|\mathbf{V}\|^2$ は正で、 τ の 2 次式であるので、その τ についての最小値は $(d\|\mathbf{V}\|^2/d\tau)=0$ により求められる。すなわち、

$$\frac{d\|\mathbf{V}\|^2}{d\tau} = -[\mathbf{V}_m' \mathbf{V}_u + \mathbf{V}_u' \mathbf{V}_m]t + 2\mathbf{V}_u' \mathbf{V}_u \tau = 0 \quad (42)$$

より、

$$\tau = \frac{\mathbf{V}_u' \mathbf{V}_m t}{\mathbf{V}_u' \mathbf{V}_u} = \frac{[\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}u]' [\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}m]}{[\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}u]' [\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}u]} t \quad (43)$$

したがって、(43)式によって得られる τ を使用することにより(28)、(29)式の $\mathbf{x}(t)$ と $\mathbf{x}(\tau)$ との差は最小となる。

このことを用いることにより、サンプル値系の最適操作系列 $\{m_r\}$ に対するほぼ等価な Bang-Bang 形の制御関数が得られる。すなわち、 $\{m_r\}$ ($r=0, 1, \dots, K-1$) に対して、 $\tau_0=0$ とするとき、これに等価な Bang-Bang 形 $u(t)$ を次のように定義できる。

$$u(t) = \text{sgn}(m_r), \quad \sum_{j=0}^r \tau_j \leq t \leq \sum_{j=0}^{r+1} \tau_j \quad (r=0, 1, \dots, K-1)$$

ここで、

$$\tau_{r+1} = \frac{\sum_{j=1}^P [\mathbf{A}\mathbf{y}_{j-1} + \mathbf{b} \text{sgn}(m_r)]'}{[\mathbf{A}\mathbf{y}_{j-1} + \mathbf{b} \text{sgn}(m_r)]'} \frac{[\mathbf{A}\mathbf{y}_{j-1} + \mathbf{b}m_r]}{[\mathbf{A}\mathbf{y}_{j-1} + \mathbf{b} \text{sgn}(m_r)]'} t \quad (r=0, 1, \dots, K-1) \quad (44)$$

また、

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_r$$

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{G}^j(t) \mathbf{y}_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{G}^i(t) \mathbf{h}(t) m_r$$

ただし、

$$t = T/P \quad (P: \text{任意の正の整数})$$

以上、2 とおりの方法で求められる制御関数 $u(t)$ は、ともに Bang-Bang 形となっており、そのパターンは、サンプリング周期 T により変わる。しかし、ある程度 T を細かくしていくとそのパターンは最適制御関数 $u^*(t)$ のパターンに近くなり、 $u^*(t)$ の第 1 近似として使用できる。

この $u(t)$ に対応して状態点 $\mathbf{x}(t)$ の軌跡が定まり、その最終端 $\mathbf{x}(t_s)$ は(3)式により求められる。2. で述べたように、この $\mathbf{x}(t_s)$ を $\mathbf{x}_f^*$ に最短時間で到達させたいのであるから、誤差ベクトル $\mathbf{e}$ を次式で定義する。

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_f^* - \mathbf{x}(t_s) \quad (45)$$

このとき $u(t)$ の各操作時間間隔 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ を、微小量 $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \dots, \Delta\tau_s$ だけ変化させることにより

$\mathbf{x}(t_s)$ はとうぜん変化する。次章以下において述べる最適化の方法は、簡単にいえば、 $\|\mathbf{e}\|$ を最小にするように $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \dots, \Delta\tau_s$ を L.P. により決定してゆくものである。以下その方法を詳細に述べる。

5. LP による最適化

前章において述べた方法により得られる Bang-Bang 形制御 $u(t)$ の切り換え時刻を $t_1, t_2, \dots, t_{s-1}$ 、制御を打切る時刻を t_s として、

$$u(t) = u_i, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (i=0, 1, \dots, S-1) \quad (46)$$

$$\tau_{i+1} = t_{i+1} - t_i, \quad t_0 = 0 \quad (i=0, 1, \dots, S-1) \quad (47)$$

とすると、状態点は次のような軌道をえがく。

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0^* \\ \mathbf{x}(t_i) &= \mathbf{G}(\tau_i) \mathbf{x}(t_{i-1}) + \mathbf{h}(\tau_i) u_{i-1} \\ (i=1, 2, \dots, S) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

いま各操作時間間隔 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ を微小量 $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \dots, \Delta\tau_s$ 変化させたとき、各切り換え時刻における状態点および終端は、次のように変わる。

$$t_i' = \sum_{j=1}^i (\tau_j + \Delta\tau_j), \quad (i=1, 2, \dots, S) \quad (49)$$

とすると、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0^* \\ \mathbf{x}(t_i') &= \mathbf{G}(\tau_i + \Delta\tau_i) \mathbf{x}(t_{i-1}') + \mathbf{h}(\tau_i + \Delta\tau_i) u_{i-1} \\ (i=1, 2, \dots, S) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

ここで $\mathbf{G}(\tau_i + \Delta\tau_i)$ 、 $\mathbf{h}(\tau_i + \Delta\tau_i)$ をテーラー展開すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\tau_i + \Delta\tau_i) &= \mathbf{G}(\tau_i) + \frac{d\mathbf{G}(\tau_i)}{dt} \Delta\tau_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{G}(\tau_i)}{dt^2} \Delta\tau_i^2 + \dots \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\tau_i + \Delta\tau_i) &= \mathbf{h}(\tau_i) + \frac{d\mathbf{h}(\tau_i)}{dt} \Delta\tau_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{h}(\tau_i)}{dt^2} \Delta\tau_i^2 + \dots \end{aligned} \quad (52)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{G}(\tau_i)}{dt} &= \left[\frac{d\mathbf{G}(t)}{dt} \right]_{t=\tau_i}, & \frac{d^2\mathbf{G}(\tau_i)}{dt^2} &= \left[\frac{d^2\mathbf{G}(t)}{dt^2} \right]_{t=\tau_i}, \\ \frac{d\mathbf{h}(\tau_i)}{dt} &= \left[\frac{d\mathbf{h}(t)}{dt} \right]_{t=\tau_i}, & \frac{d^2\mathbf{h}(\tau_i)}{dt^2} &= \left[\frac{d^2\mathbf{h}(t)}{dt^2} \right]_{t=\tau_i} \end{aligned} \quad (53)$$

の意味である。 $\Delta\tau_i$ がある程度小さな値ならば、2 次以上の項は無視して、

$$\mathbf{G}(\tau_i + \Delta\tau_i) = \mathbf{G}(\tau_i) + \frac{d\mathbf{G}(\tau_i)}{dt} \Delta\tau_i \quad (54)$$

$$\mathbf{h}(\tau_i + \Delta\tau_i) = \mathbf{h}(\tau_i) + \frac{d\mathbf{h}(\tau_i)}{dt} \Delta\tau_i \quad (55)$$

($i=1, 2, \dots, S$)

としても、その誤差は無視できる。

(50)式に、(48)、(54)、(55)式を代入することにより次式を得る。

$$\mathbf{x}(t_s') - \mathbf{x}(t_s) = \mathbf{G}(\tau_s) \mathbf{G}(\tau_{s-1}) \cdots \mathbf{G}(\tau_2) \mathbf{V}_1 \Delta\tau_1 + \mathbf{G}(\tau_s) \mathbf{G}(\tau_{s-1}) \cdots \mathbf{G}(\tau_3) \mathbf{V}_2 \Delta\tau_2 + \cdots + \mathbf{G}(\tau_s) \mathbf{V}_{s-1} \Delta\tau_{s-1} + \mathbf{V}_s \Delta\tau_s \quad (56)$$

ここで、

$$\mathbf{V}_i = -\frac{d\mathbf{G}(\tau_i)}{dt} \mathbf{x}(t_{i-1}) + \frac{d\mathbf{h}(\tau_i)}{dt} \mathbf{u}_{i-1} \quad (i=1, 2, \dots, S) \quad (57)$$

である。また(10)、(11)式により、

$$\mathbf{G}(t) = e^{\mathbf{A}t}, \quad \mathbf{h}(t) = \int_0^t \mathbf{G}(t) \mathbf{G}^{-1}(\tau) \mathbf{b} d\tau \quad (58)$$

であるので、 $d\mathbf{G}/dt$, $d\mathbf{h}/dt$ は次のように変形される。

$$\frac{d\mathbf{G}(\tau_i)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{G}(\tau_i), \quad \frac{d\mathbf{h}(\tau_i)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{h}(\tau_i) + \mathbf{b} \quad (i=1, 2, \dots, S) \quad (59)$$

したがって、

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}(t_i) + \mathbf{b}\mathbf{u}_{i-1} \quad (i=1, 2, \dots, S) \quad (60)$$

また行列 $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}$ を次のように定義する。

すなわち行列 $\mathbf{D}$ は $n \times S$ 行列でその第 j 列ベクトルは、

$$\mathbf{G}(\tau_s) \mathbf{G}(\tau_{s-1}) \cdots \mathbf{G}(\tau_{j+1}) \mathbf{V}_j \quad (61)$$

とする。この行列 $\mathbf{D}$ により(56)式は次のように表わされる。

$$\mathbf{x}(t_s') - \mathbf{x}(t_s) = \mathbf{D}\Delta\tau \quad (62)$$

ここで $\Delta\tau = (\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \dots, \Delta\tau_s)'$ である。

また(45)式において定義した誤差ベクトル $\mathbf{e}$ は、 $\Delta\tau$ により次のように変化する。

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_f^* - \mathbf{x}(t_s') = \mathbf{x}_f^* - \mathbf{x}(t_s) - \mathbf{D}\Delta\tau \quad (63)$$

したがって、問題は $\max \{ |e^i|, i=1, 2, \dots, n \}$ を最小とする $\Delta\tau$ を求めよということになる。

いっぽう、 $\Delta\tau$ に対する制限としては、 $\mathbf{G}(\tau_i + \Delta\tau_i)$, $\mathbf{h}(\tau_i + \Delta\tau_i)$ ($i=1, 2, \dots, S$) を、(54)、(55)式で近似したため $|\Delta\tau_i|$ ($i=1, 2, \dots, S$) は十分に小さな値でなければならない。このことは ε をある十分に小さな正数とすると、次式により示される。

$$|\Delta\tau_i| \leq \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, S) \quad (64)$$

またサンプル値系に対する結果より明らかに、状態点 $\mathbf{x}(t)$ は、すくなくとも時刻 KT 以前に、目標点 $\mathbf{x}_f^*$ に到達可能である。したがって、

$$\sum_{j=1}^S (\tau_j + \Delta\tau_j) \leq KT \quad (65)$$

すなわち、

$$\sum_{j=1}^S \Delta\tau_j \leq KT - \sum_{j=1}^S \tau_j \quad (66)$$

以上により、問題は新しい変数 g を導入することにより、次の L. P. の問題に帰着する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} g + e^i &\geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ g - e^i &\geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ |\Delta\tau_j| &\leq \varepsilon \quad (j=1, 2, \dots, S) \\ \sum_{j=1}^S \Delta\tau_j &\leq KT - \sum_{j=1}^S \tau_j \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

なる条件の下に g を最小にせよということになる。

いま S 次のベクトルを $\mathbf{i}_S = (1, 1, \dots, 1)'$ とし、ベクトル $\boldsymbol{\mu}, \mathbf{r}$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^S)', \quad \mu^i = \Delta\tau_i + \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, S) \quad (68)$$

$$\mathbf{r} = (r^1, r^2, \dots, r^n)' = \mathbf{x}_f^* - \mathbf{x}(t_s) + \varepsilon \mathbf{D}\mathbf{i}_S \quad (69)$$

このとき、(63)式は次のように表わされる。

$$\mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{D}\boldsymbol{\mu} \quad (70)$$

したがって、いま問題となっている L. P. の形は、次のように示される。

$$-g + \sum_{j=1}^S d_{ij} \mu^j \leq r^i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (71)$$

$$-g - \sum_{j=1}^S d_{ij} \mu^j \leq -r^i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (72)$$

$$0 \leq \mu^j \leq 2\varepsilon \quad (j=1, 2, \dots, S) \quad (73)$$

$$\sum_{j=1}^S \mu^j \leq KT - \sum_{j=1}^S \tau_j + \varepsilon S \quad (74)$$

なる $(2n+2S+1)$ 個の条件の下で、次の評価関数、

$$f = -g \quad (75)$$

を最大にせよということになる。

(71)~(75) 式で示される L. P. の解より $\Delta\tau$ を求め、それにより操作時間間隔 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_S$ を修正する。その後(48)式により終端 $\mathbf{x}(t_s)$ を求め、

$$\|\mathbf{x}_f^* - \mathbf{x}(t_s)\| \leq \delta \quad (\delta: \text{許容誤差}) \quad (76)$$

をみたすまで、上に述べた L. P. をくり返すことにより最短時間制御関数 $u^*(t)$ を求めることができる。

以上の操作で求めた $u(t)$ が $u^*(t)$ に一致するかどうかは、2. で述べたように、

$$u(t) = \text{sgn}(\boldsymbol{\eta}, \Phi^{-1}(t)\mathbf{b}) \quad (77)$$

を満足する $\mathbf{0}$ でない n 次元ベクトル $\boldsymbol{\eta}$ が存在するかどうかにより判別することができる。

6. 計算手順

前章までに述べた L. P. による最短時間問題の計算手順、およびそのフローチャートを簡単に示す (Fig. 2 参照)。

i) (1)式に示した $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ および $\mathbf{x}_0^*, \mathbf{x}_f^*$ を与える。

Fig. 2 Flow-Chart of Algorithm for time optimal problem

- ii) Sampling Interval T , Sampling Step の予測値 K を与える.
- iii) 数値積分により $G(T)$, $h(T)$ を求める.
- iv) (17)式の行列 S を計算, また(19)式のベクトル C を求める.
- v) (21)~(24)式の L.P. を解く.
- vi) (イ) (v) の結果より $|g| \leq \delta$ ならば (vii) に進む.
(ロ) (v) の結果より $|g| > \delta$ ならば K を1段まして (iv) にもどる.
- vii) (v) で得られた $\{m_r\}$ ($r=0, 1, \dots, K-1$) より (26), (27)式あるいは (44)式を用いて Bang-Bang 形の制御関数 $u(t)$ および切り換え時刻, 操作時間間隔 $\{\tau_i\}$ を求める.
- viii) 数値積分により $G(\tau_i)$, $h(\tau_i)$ ($i=1, \dots, S$) を求める.
- ix) (48)式から $x(t_S)$ を求める.
(イ) $\|x_f^* - x(t_S)\| \leq \delta$ ならば (xiv) にいく.
(ロ) $\|x_f^* - x(t_S)\| > \delta$ ならば (x) に進む.
- x) (60), (61)式により行列 D , および (69) 式よりベクトル r を求める.
- xi) (71)~(75)式の L.P. を解く.
- xii) (xi) の結果より $\tau_i \leftarrow \tau_i + \Delta \tau_i$ と修正する.
- xiii) (viii) にもどる.
- xiv) 計算終了.

以上により求めた制御関数 $u(t)$ が最短時間制御関数 $u^*(t)$ に一致するかどうかは, (77)式をみたす 0 でないベクトル η が存在するかどうかを検討することにより判別できる. もし $u(t)$ と $u^*(t)$ が一致し

ないときは, Sampling Interval T をさらに細かくして計算するとよい.

なお上の計算手順において, (ii)~(iv) までが 3. (vii) が 4., (viii)~(xiv) までが 5. においてそれぞれ説明した部分にあたる.

7. 計算例

以上の手順により, 実際に機械計算を実行した. 例題としては, 3次元および4次元の問題をとりあげた.

プログラムは, 九州大学中央計数施設に設置の OKITAC-5090 H 用に開発された ALGOL-H によった.

以下に示す例題において許容誤差 δ はともに 10^{-4} としている.

【Exp. 1】

$$A = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & -1.0 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad x_0^* = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 5.0 \\ -4.0 \end{bmatrix},$$

$$x_f^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\text{Sampling Interval}) = 1.0, \quad \epsilon = 0.4$$

まずサンプル値系の場合, $K=3$ より始めて $K=5$ で初めて目標点へ到達可能となった. 次にこれを(26)および(44)式により Bang-Bang 形にして計算を行なった結果, Fig. 3, Fig. 4 に示すように最短時間制御関数によく一致するものが得られた. 計算のくり返し回数は (26) 式によった場合が 5 回, (44) 式によった場合は 3 回である. また計算時間は, 数値積分におけるきざみ幅を 0.005, その許容誤差を 10^{-7} として, (26)式によった場合は 740 s, (44)式によった場合は 556 s であった.

【Exp. 2】

$$A = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ -0.5 & -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.5 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & -1.5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \\ 4.0 \end{bmatrix},$$

$$x_0^* = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 10.0 \\ 10.0 \\ 10.0 \end{bmatrix}, \quad x_f^* = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$T = 1.0, \quad \epsilon = 0.3 \text{ として計算}$$

まずサンプル値系の場合, $K=3$ より始めて $K=6$ で初めて目標点へ到達可能となった. つぎにこれを (26)および(44)式によって, Bang-Bang 形にして, くり返し計算を行なった結果, Fig. 5, Fig. 6 に示すような結果が得られた. 計算時間は(26)式による場

Fig. 3 Control function for exp. 1 by using eq. (26)

Fig. 4 Control function for exp. 1 by using eq. (44)

合は 2020 s, (44)式による場合は 1666 s であった。ただし数値積分におけるきざみ幅は 0.01, その許容誤差は 10^{-7} である。

以上の 2 例によって, サンプル値制御を Bang-Bang 形制御にする場合には, (26) 式によるよりも (44) 式によるほうがくり返し回数も少なくなり, したがって計算時間も短くなるということがあきらかになった。

ここで全体の計算量および x の最終値の精度について少しふれてみる。まず計算量は近似のくり返し回数にだいたい比例するのはもちろんであるが, 1 くり返し計算での計算時間の大部分は $G(t)$ および $h(t)$ の数値積分計算であり, 数値積分計算はこの計算法ではだいたい系の次元数 n の 3 乗に比例するので, 全体として計算量は, くり返し回数および n^3 に比例するようである。次に x の最終値の精度であるが, これは各時間間隔がどれくらい正確であるかによる。この場合は数値積分のきざみ幅をたとえば Exp. 1 では $h=$

Fig. 5 Control function for exp. 2 by using eq. (26)

Fig. 6 Control function for exp. 2 by using eq. (44)

0.005 としている。すると時間間隔の修正量 $\Delta\tau_k$ がこの h より小さい order となる場合にはあまり意味がないことになる。数値計算の結果では, $h=0.005$ くらいでは最終値での誤差のノルムで, $\|4x\|=10^{-4}$ くらいが限度のようであった。

8. む す び

本論文において示した最短時間制御問題の計算法の特徴は,

- 1) サンプル値制御の結果を利用

2) 線形計画法による最適化

の2点にある。

例題において示したように、計算時間ならびに記憶容量の点よりみて、かなり実用的なアルゴリズムが得られた。

また、このアルゴリズムは、

i) サンプル値最短時間制御に対する解法

ii) 連続系最短時間制御に対する解法

の2段階よりなっている。いいかえると i) の段階においては操作量を、また ii) の段階においては操作時間間隔をそれぞれ変数と考え、その最適化を、L.P. により実行したものであるといえる。

なおこの方法によるとサンプル値系と連続系に対する最適解がそれぞれ求まることとなるが、工学的な観点から考えてみると、サンプル値系の場合はサンプリング周期 T に対する不明確さはないが、操作すべき制御量を、数値的に実際に実現可能かという問題が生ずる。逆に、連続系に対しては、制御が Bang-Bang 形となるので、操作量に対しては、なんらあいまいな点は生じないが、切り換え時刻の実現という点において、問題が残る。したがって、両者のうちでどちらを採用するかは、制御対象となるプロセスに応じて、工学的見地から決定しなければならないが、本論文で紹介したアルゴリズムは、その両方の制御系に対して適用可能なものとなっている。

なお最適化に用いた LP の計算法は2段階法を使用

し、そのアルゴリズムは藤川¹⁴⁾によるものを参照した。また遷移行列の機械計算については、さきに高田により紹介された数値積分による方法を用いている。

参 考 文 献

- 1) Pontryagin and others : The Mathematical Theory of Optimal Processes, John-Wiley & Sons (1962)
- 2) L.W. Neustadt : On Synthesizing Optimal Controls, Proc. Second IFAC Congress, Paper # 421 (1963)
- 3) H. K. Kundsen : An Iterative Procedure for Computing Time Optimal Controls, IEEE Trans. on A. C., Vol. AC-9, 23/30 (1964)
- 4) 坂和 : Application of Linear-Programming Technique to the Numerical Solution of Optimal Control Problem, Proc. of IFAC Tokyo Symposium, 53/60 (1965)
- 5) 高田 : 線形プロセスの最短時間サンプル値制御, 第7回プログラムシンポジウム報告集, B 11/B 28 (1966)
- 6) J. B. Plant : An Iterative Technique for the Computation of Time Optimal Controls, Proc. 3rd IFAC Congress, Paper 13 D, 13 D 1/13 D 10 (1966)
- 7) 山口 : 準最適制御の計算法, 計測自動制御学会論文集, 4-1, 54/60 (1968)
- 8) V. H. Larson : Minimum Time Control by Time Interval Optimization, Int. J. Control, 7-4, 381/394 (1968)
- 9) E. B. Lee : Recurrence Equations and Control of Their Evolutions, J. Math. Anal. Appl., Vol. 7, 118/126 (1963-Aug.)
- 10) 熊谷 : 飽和のあるサンプル値制御系の最適制御, 制御工学, 7-4, 193/200 (1963)
- 11) 藤川 : 線形計画法, (第4回 C.P. セミナーテキスト), 日本科学技術連盟 (1962)