線形偏微分方程式系の入力-状態 関係式と可制御性†

野村 拓己・中村 嘉平

名古屋大学工学部 名古屋市千種区不老町

(昭和 43 年 12 月 18 日 受付)

Input-State Relation and Controllability of Linear Partial Differential Equation System

Takumi NOMURA and Kahei NAKAMURA

(Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya)

(Received December 18, 1968)

In this paper it is aimed to make an explicit expression of controllability condition of the system which is described by a linear partial differential equation. At first is shown the input-state relation of the system, and next is discussed the controllability condition by virtue of authors' already presented theorem.

The "genuine solution" of differential equation for square integrable input function can not be known in general, but the "weak solution" which is equal to the "genuine solution" almost everywhere in its domain, can be obtained by the method proposed in this paper. In order to use this "weak solution" as the input-state relation, it is necessary to introduce the topology under which every functions equal each other almost everywhere are identified as the same. From this point of view, the L_2 topology is introduced into the state space.

In the partial differential equation systems, there are two types of controls, one is spatially distributed, the other is concentrated on the boundary. In this paper are derived input-state relations for these two kinds of control and reduced to congruent equations in l_2 space. To these relations in l_2 space, is applied the theorem obtained by authors in ref. (2) treating the necessary and sufficient condition for a system to be controllable. And then this condition is expressed explicitly in terms of both the elliptic differential operator of the differential equation and the operators which describe the control mechanisms. The operators which describe the boundary control mechanisms are bounded operators defined on the boundary, but they become unbounded ones in the input-state relation in l_2 space. Therefore, in the cases of boundary controls can not be applied the same reasoning as in distributed controls. However, it is also possible in this case to obtain the explicit expression of controllability condition by the appropriate modification of the theorem.

1. 緒 言

筆者らは無限次元状態空間系の可制御性と可観測性について考察し, Kalman が得た有限次元系の可制御性と可観測性の理論¹⁾を無限次元系へ拡張した²⁾.

さらに無限次元系の最短時間制御の一意性が, システムの可制御性によって保証されることも示した³⁾. ここでは放物形の線形偏微分方程式で記述されるシステムの可制御条件を陽な形に表現することを考察する. なおこれは先に筆者らが得た結果⁴⁾の拡張である.

可制御条件を検討するためには, 偏微分方程式系の

† 第 6 回計測自動御学会学術講演会で発表 (昭 41・10)

入力状態関係式を知ることが第一に必要である。そこでまずこれについて検討する。

偏微分方程式で記述されるシステムの制御入力には、空間的に分布した制御機構をとおしてシステムに加えられるものと、境界に集中した制御機構をとおして加えられるものがある。制御入力が時間と空間変数とについて Hölder 連続であるときには、システムの入力-状態関係式は偏微分方程式の基本解によって表現できる^{5), 6)}。このときの入力-状態関係式は偏微分方程式の“真の解 (genuine solution)”⁵⁾である。しかし最適制御問題では制御入力は2乗可積分なベクトル値関数であるのが一般である。この種の入力に対する偏微分方程式の“真の解”は得られていない。いっぽう“真の解”にほとんどいたるところで等しい“弱い解 (weak solution)”⁵⁾は本稿にのべる方法によって得ることができる。したがって“弱い解”を“真の解”と同一視できる位相を状態空間に導入すれば、この“弱い解”をシステムの入力-状態関係式とすることができる。このことは2つの状態を表現する関数がほとんどいたるところで等しいならば、この2つの状態は同じであるとするところである。したがって実在する物理系、たとえば温度系の温度分布または弦の振動系の変位の分布などを考えると、この分布関数がほとんどいたるところで等しければ同一の状態にシステムがあるとみなすことになる。この一見このましくない結果は次のように考えると正当化される。すなわち分布定数系の状態を正しく測定することは一般に不可能であるから、状態の推定を測定出力から行なわなければならない。この測定機構を数学的に記述する作用素は状態空間と出力空間との位相を適切に選んだとき連続になっていることが望ましい。それは似かよった2つの状態にシステムがあるとき、対応する出力が似かよっていることを保証するからである。このとき通常出力空間の位相は定まっているから、実在する物理系から測りうる出力よりシステムの状態を知るとき、その精度が出力測定機構を表現する作用素の連続性によって制限されることになる。このように実在の物理系の数式モデルを考えると、実在系の内部状態の多くを同一の状態とみなすことは出力測定機構を考慮するかぎり避けられないことである。

本稿では上記の理由と、さらに状態空間がヒルベルト空間であってほってほしいという要請から状態空間を L_2 空間とする。しかし本稿の議論がヒルベルト空間の1つであるソボレフ空間を状態空間としても同様に成立することはあきらかである。そしてさらに、偏微分方程式の“弱い解”をシステムの入力-状態関係

式とみなすことにする。このとき偏微分方程式の基本解をだ円形微分作用素の固有値と固有関数とによって陽な形に表現できる。さらに偏微分方程式の弱い解が実際に L_2 空間に属することも本稿で示す。

はじめに2乗可積分な制御入力が空間分布した制御機構を通して加えられているときの入力-状態関係式(弱い解)を求める。これは制御入力が Hölder 連続であるときに成立する基本解による表現を拡張したもので表わせることを示す。次に、制御入力が境界に集中した制御機構をとおして加えられるときは、制御入力は断片的連続な時間関数であるとする。この境界上で加えられる入力を等価な空間分布制御におき換えて、 L_2 空間における発展方程式を得る。しかしこのとき境界制御機構に等価な空間制御機構を表現する作用素は非有界作用素になる。そして L_2 空間は l_2 空間に同形であるから、状態空間を l_2 空間とみなすことによってこれらの入力-状態関係式を簡略化できることを示す。

このようにして得た入力-状態関係式に文献 2) で得た定理を適用することにより、システムの準完全可制御条件を陽な形に表現することができた。なお境界制御の場合にはすでにのべたごとく等価な制御機構が非有界作用素になるので、直接には文献 2) の結果は適用できない。しかしこの結果を拡張することによって境界制御の場合にも陽な可制御条件が得られることを示す。

2. ダイナミカルシステム

偏微分方程式系の可制御条件を検討する準備として、入力-状態関係式を導く。

状態空間 X を $L_2(\Sigma)$ とし、時刻 t におけるシステムの状態を $x(t, \cdot)$ とする。ここで $t \geq 0$, かつ $x(t, \alpha)$ は実数であり、空間変数 α は R_n の有界開集合 Σ に属し、 Σ の境界 $\partial\Sigma$ は区分的に滑らかであるとする。

ダイナミカルシステムは次の線形定常な放物形偏微分方程式 (1.1)~(1.3) で記述されるものとする。

偏微分方程式,

$$L_{Df}; \frac{\partial x}{\partial t}(t, \alpha) = Ax(t, \alpha) + D(\alpha)f(t) \quad (1.1)$$

ここで A は,

$$A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\alpha) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + a(\alpha),$$

$$a_{ij}(\alpha) = a_{ji}(\alpha), \quad |\alpha(\alpha)| < \infty$$

で定義される線形だ円形偏微分作用素とする。

境界条件,

$$B_{B\varphi}; k(\sigma)x(t, \sigma) + (1-k(\sigma)) \frac{\partial x}{\partial n}(t, \sigma) = B(\sigma)\varphi(t), \quad (1.2)$$

$\sigma \in \partial \Sigma$, $\frac{\partial}{\partial n}$ は $\partial \Sigma$ 上の外向法線方向への微分作用素, $0 \leq k(\sigma) \leq 1$, $k(\cdot) \in C^2(\partial \Sigma)$ とする.

初期条件,

$$I_{x_0}; x(0, \cdot) = x_0(\cdot) \in L_2(\Sigma) \quad (1.3)$$

ダイナミカルシステム (1.1)~(1.3) に加えられている制御入力, 空間制御 $f(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_r(\cdot))'$ と境界制御 $\varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \dots, \varphi_s(\cdot))'$, $r, s < \infty$ であり, それぞれ E_r 値 2 乗可積分, E_s 値断片的連続な時間関数である.

空間制御機構 $D(\cdot)$ は $D(\cdot) = (D^1(\cdot), D^2(\cdot), \dots, D^r(\cdot))$

$$\|D(\cdot)\|_{L_2(\Sigma)}^2 = \int_{\Sigma} \sum_{i=1}^r (D^i(\alpha))^2 d\alpha < \infty$$

$$D(\alpha)f(t) = \sum_{i=1}^r D^i(\alpha)f_i(t) \quad (2)$$

とする. また境界制御機構 $B(\cdot)$ は, $B(\cdot) = (B^1(\cdot), \dots, B^s(\cdot))$,

$$\|B(\cdot)\|_{L_2(\partial \Sigma)}^2 = \int_{\partial \Sigma} \sum_{i=1}^s (B^i(\sigma))^2 d\sigma < \infty,$$

$$B(\sigma)\varphi(t) = \sum_{i=1}^s B^i(\sigma)\varphi_i(t) \quad (3)$$

とする.

次にダイナミカルシステム (1.1)~(1.3) の入力-状態関係式を考察するはじめに偏微分方程式 (1.1)~(1.3) の基本解を定義する.

【定義 1】⁹⁾ 偏微分方程式 (1.1)~(1.3) の基本解 $\Phi(t, \alpha; \beta)$, ($t > 0, \alpha, \beta \in \Sigma$) とは, $L_2(\Sigma)$ に属する任意の関数 $v_0(\cdot)$ について,

$$v(t, \alpha) \equiv \int_{\Sigma} \Phi(t, \alpha; \beta) v_0(\beta) d\beta, t > 0, \alpha \in \Sigma$$

で定義される $v(t, \alpha)$ が, 微分方程式 L_0 ((1.1) 式で $f(\cdot) = 0$ とした式), 境界条件 B_0 ((1.2) 式で $\varphi(\cdot) = 0$ とした条件) を満足し, かつ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} v(t, \cdot) = v_0(\cdot), \text{ となる正值関数}$$

である.

物理的には基本解 $\Phi(t, \cdot; \beta)$ は時刻 0 で $\beta \in \Sigma$ の位置に加えられた単位インパルスに対する, システムの応答の分布を表わしていると解釈できる.

状態空間 X を $L_2(\Sigma)$ とすることによって, 基本解 $\Phi(t, \alpha; \beta)$ の一意な表現を次の補助定理 1 によって得ることができる.

【補助定理 1】⁹⁾ だ円形微分作用素 A の固有値は実数であって高々可算個存在する. この固有値を λ_n ($\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$), その多重度を m_n ($n = 1, 2, \dots$) とし, λ_n に対応する固有関数を $\psi_{ni}(\cdot)$ ($i = 1, 2, \dots, m_n$) とする. このとき $\lambda_1 < \infty$ であって, $n \rightarrow \infty$ のとき $\lambda_n \rightarrow -\infty$ で

ある. また固有関数系 $\{\psi_{ni}\}$ は $L_2(\Sigma)$ で完備であって正規直交系,

$$\langle \psi_{ni}, \psi_{mj} \rangle_X = \delta_{ij} \delta_{mn}, \|\psi_{ni}\|_X = \|\psi_{mj}\|_X = 1$$

とすることができる. この $\{\lambda_n\}, \{\psi_{ni}\}$ によって, 基本解は,

$$\Phi(t, \alpha; \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_n} e^{\lambda_n t} \psi_{ni}(\alpha) \psi_{ni}(\beta) \quad (4)$$

(この級数は $\forall \delta > 0$ について, $[\delta, \infty) \times \Sigma \times \Sigma$ で一様収束する)

と表現できる.

制御入力 $f(\cdot), \psi(\cdot)$ と制御機構 $D(\cdot), B(\cdot)$ が適当な条件を満たすとき, システム (1) の入力-状態関係式が次の補助定理 2 によって得られる.

【補助定理 2】⁹⁾ 次の仮定 (i), (ii) が満足されるとき.

(i) $D(\alpha)f(t)$ は $(t, \alpha) \in (0, T] \times \Sigma$ で Hölder 連続である.

(ii) $B(\sigma)\psi(t)$ は $(t, \sigma) \in (0, T] \times \partial \Sigma$ で Hölder 連続である.

このとき微分方程式 (1.1)~(1.3) の“真の解” $x(t, \alpha)$, $(t, \alpha) \in (0, T] \times \Sigma$ は

$$\begin{aligned} x(t, \alpha) = & \int_{\Sigma} \Phi(t, \alpha; \beta) x_0(\beta) d\beta \\ & + \int_0^t \int_{\Sigma} \Phi(t-\tau, \alpha; \beta) D(\beta) f(\tau) d\beta d\tau \\ & + \int_0^t \int_{\partial \Sigma} \left\{ \Phi(t-\tau, \alpha; \sigma) \right. \\ & \left. - \frac{\partial \Phi(t-\tau, \alpha; \sigma)}{\partial n_{\sigma}} \right\} B(\sigma) \varphi(\tau) d\sigma d\tau \quad (5) \end{aligned}$$

である.

一般の制御問題においては, 制御量 $D(\cdot)f(\cdot), B(\cdot)\varphi(\cdot)$ はそれぞれ $(0, T] \times \Sigma, (0, T] \times \partial \Sigma$ で 2 乗可積分ではあっても Hölder 連続ではないことが多い. そこで 2 乗可積分な $D(\cdot)f(\cdot), B(\cdot)\varphi(\cdot)$ に対して (5) 式の表現を拡張することを検討する.

2.1 $D(\cdot)f(\cdot) \in L_2((0, T] \times \Sigma)$, $\varphi(\cdot) = 0$ であるとき

はじめに制御入力は空間制御 $f(\cdot)$ だけである場合の入力-状態関係式を検討する.

$\Sigma_T \equiv (0, T] \times \Sigma$ とし, $\Phi(t, \alpha; \beta)$ を形式的に $\Phi(t, \alpha; \tau, \beta)$ と書くことにする. すなわち,

$$\Phi(t, \alpha; \tau, \beta) \equiv \Phi(t, \alpha; \beta), (t, \alpha) \in \Sigma_T, (\tau, \beta) \in \Sigma_T$$

基本解 $\Phi(t, \alpha; \tau, \beta)$ は $\Sigma_T \times \Sigma_T$ 上の正值関数である. T' を $0 < T' \leq T$ なる任意の数とし, $\Sigma_{T'} \equiv (0, T'] \times \Sigma$ とする.

$$N_1(\Phi) \equiv \sup_{(t, \alpha) \in \Sigma_{T'}} \left\{ \int_{\Sigma_{T'}} \Phi(t, \alpha; \tau, \beta) d\beta d\tau \right\}$$

$$N_2(\Phi) \equiv \sup_{(\tau, \beta) \in \Sigma T'} \left\{ \int_{\Sigma T'} \Phi(t, \alpha; \tau, \beta) d\alpha dt \right\}$$

とすると、文献 5) より、

$$\|\Phi\|_1 \equiv \max(N_1(\Phi), N_2(\Phi)) < \infty \quad (6)$$

となる。

$$x(T', \alpha) \equiv \int_{\Sigma T'} \Phi(T' - t, \alpha; \beta) D(\beta) f(t) d\beta dt \quad (7)$$

とする。

$$\begin{aligned} \|x(T', \cdot)\|_{L_2(\Sigma T')}^2 &= \int_{\Sigma T'} (x(T', \alpha))^2 d\alpha dt \\ &= T' \cdot \|x(T', \cdot)\|_{L_2(\Sigma)}^2 \end{aligned}$$

$$\|D(\cdot)f(\cdot)\|_{L_2(\Sigma T')}^2 \leq \|D(\cdot)\|_{L_2(\Sigma)}^2 \cdot \|f(\cdot)\|_{L_2(T')}^2$$

であるから Riez の不等式⁹⁾によって、

$$\begin{aligned} \sqrt{T'} \|x(T', \cdot)\|_{L_2(\Sigma)} &= \|x(T', \cdot)\|_{L_2(\Sigma T')} \\ &\leq \|\Phi\|_1 \|D(\cdot)f(\cdot)\|_{L_2(\Sigma T')} \end{aligned}$$

が得られ、これから (7) 式で定義される $L_2(\Sigma T')$ から $L_2(\Sigma)$ への線形写像は有界な写像であるといえる。

$(0, T]$ 上で定義された E_T 値の Hölder 連続な関数の集合 $H(T)$ は $L_2(T)$ で稠密である。また同様に $H(\Sigma)$ は $L_2(\Sigma)$ で稠密である。このことから D, f をそれぞれ $L_2(\Sigma), L_2(T)$ の任意の元とすると、 $H(\Sigma), H(T)$ から適当に点列 $\{D_n\}, \{f_n\}$ を選んで、

$$s\text{-}\lim_n D_n = D, \quad s\text{-}\lim_n f_n(t) = f(t), \quad \text{a.e.}, \quad t \in (0, T]$$

とすることができる。このとき $\{D_n f_n\}, Df \in L_2(\Sigma T)$ であり、かつ $s\text{-}\lim_n D_n f_n(t) = Df(t)$, a.e., $t \in (0, T]$ である。さらに、

$$\begin{aligned} x_n(T', \alpha) &= \int_0^{T'} dt \int_{\Sigma} \Phi(T' - t, \alpha; \beta) \\ &\quad \times D_n(\beta) f_n(t) d\beta dt \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} x(T', \alpha) &= \int_0^{T'} dt \int_{\Sigma} \Phi(T' - t, \alpha; \beta) \\ &\quad \times D(\beta) f(t) d\beta dt \end{aligned} \quad (9)$$

とすると、(7) 式の写像は有界であるから、

$$s\text{-}\lim_n x_n(T', \cdot) = x(T', \cdot), \quad T' \in (0, T] \quad (10)$$

(8) 式は微分方程式 $L_{D_n} f_n$, 境界条件 B_0 , 初期条件 I_0 を満たす微分方程式 (1.1) ~ (1.3) の“真の解”である。いっぽう、(9) 式は“真の解”であるとはいえないが、次に定義する“弱い解”であることは証明できる。

【定義 2】⁹⁾ 偏微分方程式系 (1.1) ~ (1.3) の“弱い解” (weak solution)

A に共役な作用素 A^* は、

$$\begin{aligned} A^* v(\alpha) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \{a_{ij}(\alpha) v(\alpha)\} \\ &\quad + a(\alpha) v(\alpha), \quad v(\cdot) \in C^2(\Sigma) \end{aligned} \quad (11)$$

である。

次の条件 (i) ~ (iv) を満たす関数 $\psi(t, \alpha)$ の集合を Ψ とする。

(i) $\psi(t, \alpha)$ は $(0, T] \times \bar{\Sigma}$ で (t, α) について 1 回連続微分可能である。すなわち、 $\psi(t, \alpha) \in C^1((0, T] \times \bar{\Sigma})$

(ii) $\psi(t, \alpha)$ は各 $t \in (0, T]$ について、 α に関して 2 回連続微分可能である。すなわち、 $\psi(t, \alpha) \in C^2(\Sigma)$, $t \in (0, T]$

(iii) $\psi(t, \alpha)$ の台は $(0, T] \times \bar{\Sigma}$ のコンパクト集合である

(iv) 境界条件 B_0 を満たす

関数族 Ψ の任意の関数 $\psi(t, \alpha)$ について、

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Sigma} \left\{ x(t, \alpha) \left(\frac{\partial}{\partial t} + A \right) \psi(t, \alpha) \right. \\ \left. + D(\alpha) f(t) \psi(t, \alpha) \right\} d\alpha dt \\ + \int_0^T \int_{\partial \Sigma} \varphi(t, \sigma) \left\{ \psi(t, \sigma) - \frac{\partial \psi}{\partial n}(t, \sigma) \right\} d\sigma dt = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

を満たす $x(t, \alpha) \in (0, T] \times \Sigma$ は偏微分方程式 (1.1) ~ (1.3) の“弱い解”である。

Ψ の任意の関数 ψ を用いて、線形はん関数 $\langle \cdot, \psi \rangle$ を

$$\begin{aligned} \langle x, Df \rangle, \psi \rangle &\equiv \int_0^T \int_{\Sigma} \left\{ x(t, \alpha) \left(\frac{\partial}{\partial t} + A \right) \psi(t, \alpha) \right. \\ &\quad \left. + D(\alpha) f(t) \psi(t, \alpha) \right\} d\alpha dt \end{aligned} \quad (13)$$

で定義すると、 $\langle \cdot, \psi \rangle$ は $L_2(\Sigma T) \times L_2(\Sigma T)$ 上の連続なはん関数である。

(8) 式で定義された $x_n(T' \alpha)$, $T' \in (0, T]$ は微分方程式 $L_{D_n} f_n$, 境界条件 B_0 , 初期条件 I_0 を満たす“真の解”であるから、また“弱い解”でもある。したがって (12) 式と (13) 式より、

$$\langle x_n, D_n f_n \rangle, \psi \rangle = 0 \quad (14)$$

が成立する。

また (10) 式より、 $\lim_n x_n = x$ in $L_2(\Sigma T)$ であるから、

$$\lim_n \langle x_n, D_n f_n \rangle = \langle x, Df \rangle \text{ in } L_2(\Sigma T) \times L_2(\Sigma T) \quad (15)$$

である。

はん関数 $\langle \cdot, \psi \rangle$ は $L_2(\Sigma T) \times L_2(\Sigma T)$ 上で連続であるから、(14) 式と (15) 式より、 Ψ の任意の元 ψ について、

$$\langle \langle x, Df \rangle, \psi \rangle = \lim_n \langle x_n, D_n f_n \rangle, \psi \rangle = 0 \quad (16)$$

が成立する。この (16) 式より、(9) 式で定義された $x(\cdot)$ が微分方程式 L_{Df} , 境界条件 B_0 , 初期条件 I_0 を満たす (1) 式の“弱い解”であることになる。

さらに放物形の偏微分方程式の“弱い解”は $(0, T] \times \Sigma$ のほとんどいたるところで“真の解”に等しいから⁵⁾, (9) 式で定義された $x(\cdot)$ (弱い解) は微分方程式 $L_D f, B_0, I_0$ を満たす真の解に $(0, T] \times \Sigma$ のほとんどいたるところで等しい. ここで“真の解”はシステムの実際の内部状態を表現しており, また“弱い解”によって表わされる内部状態はシステムの実際の内部状態とは一般に異なっている. しかし, システムの状態空間へ L_2 空間の位相を導入して, ほとんどいたるところで等しい関数によって表現される状態は同一であるとみなすことにすると, “真の解”は“弱い解”にほとんどいたるところで等しいから, “真の解”の表わす状態と“弱い解”があらわす状態とは同一であることになる.

以上の考察より, 状態空間 X を $L_2(\Sigma)$ とすると, 空間分布制御 $f(\cdot)$ と制御機構 $D(\cdot)$ をそれぞれ $L_2(T), L_2(\Sigma)$ に拡張しても, システム (1.1)~(1.3) の時刻 T の状態はまた (5) 式で表現できることが示された. だしこのとき (5) 式の等式は $L_2(\Sigma)$ の意味で成立すると解釈する.

状態空間を $L_2(\Sigma)$ とすることにより, 基本解 $\Phi(t, \alpha; \beta)$ は (4) 式で表現できるから, $\varphi(\cdot) = 0$ のとき (5) 式は,

$$x(T, \alpha) = \int_{\Sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_n} e^{\lambda_n T} \psi_{ni}(\alpha) \psi_{ni}(\beta) x_0(\beta) d\beta \\ + \int_0^T dt \int_{\Sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_n} e^{\lambda_n(T-t)} \psi_{ni}(\alpha) \\ \times \psi_{ni}(\beta) D(\beta) f(t) d\beta,$$

と書き換えられる. また $\Phi(t, \alpha; \beta)$ は, (t, α) を固定すると $L_2(\Sigma)$ の元であるから, a. e., $\alpha \in \Sigma$ で,

$$\int_{\Sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_n} e^{\lambda_n T} \psi_{ni}(\alpha) \psi_{ni}(\beta) x_0(\beta) d\beta \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_n} e^{\lambda_n T} \psi_{ni}(\alpha) \int_{\Sigma} (\psi_{ni}(\beta) x_0(\beta) d\beta)$$

また Lebesgue-Faton の Lemma⁷⁾ によって,

$$\int_0^T dt \int_{\Sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_n} e^{\lambda_n(T-t)} \psi_{ni}(\alpha) \psi_{ni}(\beta) D(\beta) f(t) d\beta \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_n} \left(\int_0^T dt \int_{\Sigma} e^{\lambda_n(T-t)} \psi_{ni}(\beta) D(\beta) f(t) d\beta \right) \\ \times \psi_{ni}(\alpha), \text{ a. e., } \alpha \in \Sigma$$

これらの結果から $L_2(\Sigma)$ の意味で,

$$x(T, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_n} \left[\left\{ e^{\lambda_n T} \int_{\Sigma} \psi_{ni}(\beta) x_0(\beta) d\beta \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^T e^{\lambda_n(T-t)} \left(\int_{\Sigma} \psi_{ni}(\beta) D(\beta) f(t) d\beta \right) dt \right\} \right. \\ \left. \times \psi_{ni}(\alpha) \right] \quad (17)$$

と書ける.

$L_2(\Sigma)$ と l_2 とは同形であり, $\{\psi_{ni}\}$ は $L_2(\Sigma)$ の完備な正規直交系であるから, (17) 式に合同な式を l_2 空間で考えることにより, 入力-状態関係式を簡略化できる.

$$\left. \begin{aligned} D_{ni}^j &\equiv \int_{\Sigma} D^j(\alpha) \psi_{ni}(\alpha) d\alpha, \quad j=1, 2, \dots, r \\ D_{ni} &\equiv (D_{ni}^1, D_{ni}^2, \dots, D_{ni}^r) \\ \xi_{ni}(t) &= e^{\lambda_n t} \int_{\Sigma} \psi_{ni}(\alpha) x_0(\alpha) d\alpha \\ &+ \int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)} d\tau \int_{\Sigma} \psi_{ni}(\alpha) D(\alpha) f(\tau) d\alpha \\ &= e^{\lambda_n t} \xi_{ni}(0) + \int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)} D_{ni} f(\tau) d\tau \\ \xi(t) &\equiv (\xi_{11}(t), \xi_{12}(t), \dots, \xi_{21}(t), \dots, \xi_{31}(t), \dots)' \\ \tilde{D} &\equiv [D_{11}', D_{12}', \dots, D_{21}', \dots, D_{31}', \dots]' \\ \tilde{\Phi}(t) &\equiv \text{diag}(e^{\lambda_{n1} t} I_{n_1}), (I_{n_i} \text{ は } m_n \times m_n \text{ の単位マトリクス}) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

とすると, (17) 式に合同な入力-状態関係式は,

$$\xi(T) = \tilde{\Phi}(T) \xi(0) + \int_0^T \tilde{\Phi}(T-t) \tilde{D} f(t) dt \quad (19)$$

である.

2.2 $B(\cdot) \varphi(\cdot) \in L_2((0, T] \times \partial \Sigma)$, $f(\cdot) = 0$ であるとき

次に制御入力が境界制御 $\varphi(\cdot)$ だけである場合の入力-状態関係式を検討する. ここで微分方程式 (1.1) の作用素 A は,

$$A \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2} + a(\alpha) \quad (20)$$

であり, $\varphi(\cdot)$ は断片的に連続な時間関数とする. また **2.1** と同じく T を任意の正数とする.

状態空間の位相を $L_2(\Sigma)$ の相対位相とすることによって, 次の偏微分方程式 (1.1')~(1.3') を満たす解をシステムの入力-状態関係式としてよいことは **2.1** の場合と同様である.

$$L_0; -\frac{\partial}{\partial t} x(t, \alpha) = \sum_{i=1}^n -\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_i^2}(t, \alpha) \\ + a(\alpha) x(t, \alpha), \text{ a. e., } (0, T] \times \Sigma) \quad (1.1')$$

$$B_{B\varphi}; k(\sigma) x(t, \sigma) + (1-k(\sigma)) \frac{\partial x}{\partial n}(t, \sigma) \\ = B(\sigma) \varphi(t), \text{ a. e., } (0, T] \times \partial \Sigma) \quad (1.2')$$

$$I_{x_0}; s\text{-}\lim_{t \downarrow 0} x(t) = x_0 \quad (1.3')$$

偏微分方程式 (1.1')~(1.3') の解は一意に存在して, $L_2(\Sigma)$ に属することが次のように示せる.

はじめに, 境界制御 $\varphi(\cdot)$ を等価な空間制御に置換する.

関数空間 $\mathcal{E}_{L_2^2}(\Sigma)$ を Σ で定義された関数で、その超関数の意味での導関数が二階までこめて $L_2(\Sigma)$ に属するものの全体とする⁸⁾。また各 B^i , $i=1, 2, \dots, s$, について、

$$k(\sigma)k_i(\sigma) + (1-k(\sigma))\frac{\partial h_i}{\partial n}(\sigma) = B^i(\sigma), \text{ a. e., } \partial\Sigma$$

となる h_i が $\mathcal{E}_{L_2^2}(\Sigma)$ に存在するものとする。

このとき、 A の Green 作用素を G とすると、

$$\left. \begin{aligned} Ab &= 0 \quad \text{a. e., } \Sigma \\ kb + (1-k)\frac{\partial b}{\partial n} &= B^i \quad \text{a. e., } \partial\Sigma \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

なる円形偏微分方程式の解 b_i は、

$$b_i = (I - GA)h_i \quad (22)$$

で一意に表現され、かつ $b_i \in \mathcal{E}_{L_2^2}(\Sigma)$ ⁸⁾ である。

$\varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \dots, \varphi_s(\cdot))'$ は断片的連続であるから、

$$\frac{d}{dt}\varphi(\cdot) = \dot{\varphi}(\cdot) \quad \text{a. e., } t \in (0, T]$$

なる関数、

$$\dot{\varphi}(\cdot) = (\dot{\varphi}_1(\cdot), \dot{\varphi}_2(\cdot), \dots, \dot{\varphi}_s(\cdot))$$

を考えることができる。そこで、次の微分方程式、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= Ay - \sum_{i=1}^s b_i \dot{\varphi}_i \quad \text{a. e., } (0, T] \times \Sigma \\ ky + (1-k)\frac{\partial y}{\partial n} &= 0 \quad \text{a. e., } (0, T] \times \partial\Sigma \\ s\text{-}\lim_{t \downarrow 0} y(t) &= x_0 - \sum_{i=1}^s b_i \varphi_i(0+) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

の解 $y(\cdot)$ を求めることができれば、 $y + \sum_{i=1}^s b_i \varphi_i$ は偏微分方程式 (1.1') ~ (1.3') の解である。このことから (23) 式は (1.1') ~ (1.3') 式の境界制御入力を空間制御入力に等価的に置き換えたシステムであると考察えられる。

$$H = \left\{ y \in \mathcal{E}_{L_2^2}(\Sigma) \mid ky + (1-k)\frac{\partial y}{\partial n} = 0 \quad \text{a. e., } \partial\Sigma \right\}$$

は $\mathcal{E}_{L_2^2}$ の閉集合であるから、 H は $\mathcal{E}_{L_2^2}(\Sigma)$ の位相によってヒルベルト空間である。したがって (23) 式の解 $y(\cdot)$ を求めるには、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= Ay - \sum_{i=1}^s b_i \dot{\varphi}_i \\ s\text{-}\lim_{t \downarrow 0} y(t) &= x_0 - \sum_{i=1}^s b_i \varphi_i(0+) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

なる発展方程式をヒルベルト空間 H で考察すればよい。 A は放物形半群の生成作用素であるから、文献 9) によって (24) 式の解は一意に存在して H の元として表現できる。

以上によって偏微分方程式 (1.1') ~ (1.3') の解 $x(\cdot)$ は、一意に、

$$x(t) \in \mathcal{E}_{L_2^2}(\Sigma) \subset L_2(\Sigma), \quad \text{a. e., } t \in (0, T] \quad (25)$$

であることが示せた。

この事実によって、(1.1') を $L_2(\Sigma)$ の完備な正規直交系 $\{\psi_{ni}\}$ でフーリエ変換することができる。

$$\eta_{ni}(t) \equiv \int_{\Sigma} x(t, \alpha) \psi_{ni}(\alpha) d\alpha, \quad t > 0 \quad (26)$$

とする。(25) 式によって、

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} x(t, \alpha) \psi_{ni}(\alpha) d\alpha &= \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} x(t, \alpha) \psi_{ni}(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{d}{dt} \eta_{ni}(t) \end{aligned}$$

部分積分によって

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2} x(t, \alpha) + a(\alpha) x(t, \alpha) \right) \psi_{ni}(\alpha) d\alpha \\ = \int_{\Sigma} x(t, \alpha) \lambda_n \psi_{ni}(\alpha) d\alpha \\ + \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\partial x}{\partial n}(t, \sigma) \psi_{ni}(t, \sigma) \right. \\ \left. - x(t, \sigma) \frac{\partial \psi_{ni}}{\partial n}(t, \sigma) \right) d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lambda_n \eta_{ni}(t) + \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\partial \psi_{ni}}{\partial n}(\sigma) - \psi_{ni}(\sigma) \right) \\ &\quad \times B(\sigma) \varphi(t) d\sigma \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} B_{ni}^j &\equiv \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\partial \psi_{ni}}{\partial n}(\sigma) - \psi_{ni}(\sigma) \right) B^j(\sigma) d\sigma \\ j &= 1, 2, \dots, s \\ B_{ni} &\equiv (B_{ni}^1, B_{ni}^2, \dots, B_{ni}^s) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

とすると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \eta_{ni}(t) &= \lambda_n \eta_{ni}(t) + B_{ni} \varphi(t) \\ \eta_{ni}(t) &= e^{\lambda_n t} \eta_{ni}(0) + \int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)} B_{ni} \varphi(\tau) d\tau \\ \text{ただし、} \eta_{ni}(0) &\equiv \int_{\Sigma} x_0(\alpha) \psi_{ni}(\alpha) d\alpha \text{ である} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

が得られる。 $\{\psi_{ni}\}$ は $L_2(\Sigma)$ で完備であるから、境界制御入力に対するシステムの状態変化は、

$$x(T, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m \eta_{ni}(T) \psi_{ni}(\alpha), \quad t > 0 \quad (29)$$

で表現される。

ここで、

$$\begin{aligned} \eta(t) &\equiv (\eta_{11}(t), \eta_{12}(t), \dots, \eta_{21}(t), \dots, \eta_{31}(t), \dots)' \\ \tilde{B} &\equiv [B_{11}', B_{12}', \dots, B_{21}', \dots, B_{31}', \dots]' \end{aligned} \quad (30)$$

とすると、(29) 式に同様な入力-状態関係式、

$$\eta(T) = \tilde{\Phi}(T) \eta(0) + \int_0^T \tilde{\Phi}(T-t) \tilde{B} \varphi(t) dt \in l_2 \quad (31)$$

が得られる。

ここで一般に $\tilde{B}$ は E_s から l_2 への有界な作用素で

はない。しかし、 $g \in E_s$, $t > 0$ のとき、

$$\|\tilde{\Phi}(t) \tilde{B} g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m_n} (e^{\lambda_n t} B_{nl} g)^2 \\ \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m_n} e^{2\lambda_n t} \|B_{nl}\|^2 \|g\|^2 \text{ であり、}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき λ_n は十分はやく $-\infty$ に発散するから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m_n} e^{2\lambda_n t} \|B_{nl}\|^2 < \infty$$

と仮定できる。

このとき、 $\tilde{\Phi}(t) \tilde{B}$ は E_s から l_2 への有界作用素である。

3. 可 制 御 性

システムの可制御性を定義し、2. で得たシステム (1.1)~(1.3) の入力-状態関係式を用いて、システム (1.1)~(1.3) が可制御である条件を検討する。

【定義 3】 準完全可制御 (quasi-complete controllability) 時刻 $t=0$ で零状態にあるシステムを考える。有限な時間 T 内で、全ての状態の任意の近傍内へシステムの状態を推移させることができるならば、システムは T 時間で準完全可制御であるという。任意に選んだ状態の任意の近傍内への推移が有限な時間で行なえるならば、単に準完全可制御であるという。

なおバナッハ空間における発展方程式で記述される一般のシステムの種々の可制御性については文献 2) で検討した。

3.1 空間分布制御の場合

はじめに、制御入力 $f(\cdot)$ が空間分布入力 $f(\cdot)$ だけである場合を検討する。このときシステム (1.1)~(1.3) の入力-状態関係式は (17) 式であり、これに合同な関係式は (19) 式である。したがってシステム (1.1)~(1.3) の準完全可制御性と (19) 式で入力-状態関係式が記述されるシステムが準完全可制御であることは同値である。

$$\tilde{A} \equiv \text{diag}[\lambda_n I_n] \quad (32)$$

とすると、 $\tilde{\Phi}(t)$ は $\tilde{A}$ によって生成される半群であり、 $\tilde{\Phi}(t) \xi$ ($\xi \in l_2$)、なる時間関数は $t \geq 0$ で解析関数である。また (19) 式で入力-状態関係式が記述されるシステムのダイナミカルな表現は l_2 空間における次の発展方程式である。

$$\dot{\xi}(t) = \tilde{A} \xi(t) + \tilde{D} f(t) \quad (33)$$

このシステムに文献 2) の定理 4 の系を適用して、次の定理を得る。

【定理 1】 制御入力 $f(\cdot)$ が E_r 値 2 乗可積分な関数であるとき、システム (33) が準完全可制御であるための必要十分条件は、 l_2 の任意の元 $\xi \neq 0$ に関し

$$\tilde{D}' \tilde{\Phi}(\tau) \xi \neq 0, \text{ a. e., } \tau \in (0, \infty) \quad (34)$$

となることである。またシステム (33) が準完全可制御であれば、測度 0 でない任意の有限な時間区間で準完全可制御である。

【証明】 $\tilde{A}$ は自己共役作用素であるから、 $\tilde{\Phi}(t)$ とその共役作用素 $\tilde{\Phi}^*(t)$ とは等しい。また $\tilde{D}$ の共役作用素 $\tilde{D}^*$ は $\tilde{D}$ の転置マトリクス $\tilde{D}'$ に等しい。この事実によって、文献 2) の定理 1 の系よりこの定理 1 が得られる。(証明終)

次に条件 (34) を陽な形に表現することを検討する。

$$\xi = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{21}, \dots, c_{31}, \dots)' \in l_2 \text{ とする。}$$

いま $\xi \neq 0$ なる ξ と、測度 0 でない時間区間 $(t_0, t_1]$ が存在して、 $\tilde{D}' \tilde{\Phi}(t) \xi = 0$, a. e., $t \in (t_0, t_1]$ であると

$$\begin{aligned} \tilde{D}' \tilde{\Phi}(t) \xi &= [D_{11}', D_{12}', \dots] \\ &\times \text{diag}(e^{\lambda_n t} I_n) (c_{11}, \dots, c_{21}, \dots)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \sum_{l=1}^{m_n} D_{nl}' c_{nl} = 0, \text{ a. e., } t \in (t_0, t_1] \end{aligned}$$

関数 $e^{\lambda_n t}$, $n=1, 2, \dots$ は 1 次独立な時間関数であるから、

$$\sum_{l=1}^{m_n} D_{nl}' c_{nl} = 0 \in E_r, \quad n=1, 2, \dots \quad (35)$$

が成立する。ここで $\xi \neq 0$ であるから、少なくとも 1 つ n を適当に選んで、 $(c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nm_n})$ の成分の中に零でない数が存在するようにできる。この n を N とする。(35) 式から、 $D_{N1}', D_{N2}', \dots, D_{Nm_N}'$ は 1 次従属なベクトルである。すなわち、 $\text{rank}[D_{N1}', D_{N2}', \dots, D_{Nm_N}'] < m_N$

以上のことから、システム (33) が準完全可制御でなければ、

$$\text{rank}[D_{n1}', D_{n2}', \dots, D_{nm_n}'] < m_n$$

となる n が少くとも 1 つ存在する。この対偶によって、「すべての $n=1, 2, \dots$ について、 $\text{rank}[D_{n1}', D_{n2}', \dots, D_{nm_n}'] = m_n$ ならば、システム (33) は準完全可制御である」を得る。

逆にシステム (33) が準完全可制御ならば、定理 1 によって、 $0 \neq \xi \in l_2$ なる任意の ξ について、

$$\tilde{D}' \tilde{\Phi}(t) \xi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m_n} e^{\lambda_n t} D_{nl}' c_{nl} \neq 0, \text{ a. e., } t \in (0, \infty)$$

である。

$$\xi_n = (0, \dots, 0, c_{n1}, \dots, c_{nm_n}, 0, \dots)' \neq 0$$

なるベクトルについても上の条件が成立するから、各 n について、 $(c_{n1}, \dots, c_{nm_n}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ のとき、 $\sum_{l=1}^{m_n} D_{nl}' c_{nl} \neq 0$ であることが必要である。

このことから「システム (33) が準完全可制御ならば、各 n について、 $\text{rank}[D_{n1}', D_{n2}', \dots, D_{nm_n}'] = m_n$

である」を得る。

以上の結果を次の定理にまとめることができる。

【定理 2】 E_r 値 2 乗可積分な空間分布制御によって、システム (1.1)~(1.3) が準完全可制御であるための必要十分条件は、各 $n=1, 2, \dots$ 、について、 $\text{rank}[D_{n1}', D_{n2}', \dots, D_{nm_n}'] = m_n$ となることである。このことからあきらかに、準完全可制御であるためには、 $r \geq m_n$, $n=1, 2, \dots$, が必要である。

3.2 境界制御の場合

次にシステム (1.1)~(1.3) に境界制御 $\varphi(\cdot)$ のみを加えたときに準完全可制御である条件を検討する。このときの入力-状態関係式は (29) 式であり、これに合同な表現は (31) 式である。 $\tilde{B}$ が非有界作用素であるから 3.1 の推論は成立しない。しかし次のように修正して定理 2 と同様な結果を得ることができる。

断片的連続な入力関数 $\varphi(\cdot)$ についての零状態推移式、

$$L_T \varphi = \int_0^T \tilde{\Phi}(T-t) \tilde{B} \varphi(t) dt$$

を考える。

システム (31) が T 時間で準完全可制御であることは L_T の値域 $R(L_T)$ の閉包 $\overline{R(L_T)}$ が l_2 に等しいことであり、このことは L_T のノルム共役作用素 L_T^* の零集合 $N(L_T^*)$ が 0 元からなることと同値である¹¹⁾。 $\eta \in l_2$ とすると、

$$\begin{aligned} \langle L_T \varphi, \eta \rangle &= \int_0^T \langle \varphi(t), (\tilde{\Phi}(T-t) \tilde{B})^* \eta \rangle dt \\ &= \langle \varphi, L_T^* \eta \rangle \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} L_T^*(t) &= (\tilde{\Phi}(T-t) \tilde{B})^* \\ &= [\tilde{\Phi}(T-t) \tilde{B}]^* = [e^{\lambda_1(T-t)} [B_{11}' B_{12}' \dots B_{1n_1}'] \\ &\quad e^{\lambda_2(T-t)} [B_{21}' \dots] e^{\lambda_3(T-t)} [\dots] \dots] \end{aligned}$$

である。

したがってシステム (31) が T 時間で準完全可制御であるための必要十分条件は、 $(\tilde{\Phi}(T-t) \tilde{B})^* \eta = 0$, a.e., $t \in (0, T]$ ならば $\eta = 0$ となることである。ただし $(0, T]$ は測度 0 でない時間区間とする。 $(\tilde{\Phi}(t) \tilde{B})^* \eta$ は t について解析関数であるから、 $(0, T']$ を測度 0 でない任意の有限時間区間とすると、もし $(\tilde{\Phi}(t) \tilde{B})^* \eta = 0$, a.e., $t \in (0, T']$ ならば $T' \leq T$ なる任意の T について、 $(\tilde{\Phi}(t) \tilde{B})^* \eta = 0$, a.e., $t \in (0, T]$ である。これからシステム (31) は準完全可制御であることと、測度 0 でない任意の有限時間で準完全可制御であることは同値である。

次に、 $\eta = (d_{11}, \dots, d_{21}, \dots)'$ とするとき、

$$\begin{aligned} (\tilde{\Phi}(T-t) \tilde{B})^* \eta &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n(T-t)} \sum_{i=1}^{m_n} B_{ni}' d_{ni} \\ &= 0, \text{ a.e., } t \in (0, T] \end{aligned}$$

ならば $\eta = 0$ となるための必要十分条件は、3.1 と同様に、各 $n=1, 2, \dots$ について $\text{rank}[B_{n1}', B_{n2}', \dots, B_{nm_n}'] = m_n$ となることである。以上によって次の定理を得る。

【定理 2】 E_s 値断片的連続な境界制御関数族によって、システム (1.1)~(1.3) が準完全可制御であるための必要十分条件は、各 $n=1, 2, \dots$ 、について、 $\text{rank}[B_{n1}', B_{n2}', \dots, B_{nm_n}'] = m_n$ となることである。

3.3 空間分布制御と境界制御とを用いる場合

システム (1.1)~(1.3) に E_r 値 2 乗可積分な空間制御と E_s 値断片的連続な境界制御を加える場合を検討する。空間制御 f と境界制御 φ を用いたときの零状態推移式に合同な式は、

$$\int_0^T \tilde{\Phi}(T-t) (\tilde{D} f(t) + \tilde{B} \varphi(t)) dt, \quad T > 0 \quad (36)$$

である。これは、

$$L_T[f, \varphi] = \int_0^T \tilde{\Phi}(T-t) [\tilde{D} \quad \tilde{B}] [f(t) \quad \varphi(t)]' dt$$

と考えることができる。

ここで、 $t > 0$ のとき $\tilde{\Phi}(t) [\tilde{D} \quad \tilde{B}]$ は有界な作用素であり、

$$\begin{aligned} L_T^*(t) &= [\tilde{\Phi}(T-t) [\tilde{D} \quad \tilde{B}]]^* \\ &= \left[e^{\lambda_1(T-t)} \begin{bmatrix} D_{11}' & \dots & D_{1n_1}' \\ B_{11}' & \dots & B_{1n_1}' \end{bmatrix} e^{\lambda_2(T-t)} \begin{bmatrix} D_{21}' & \dots \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. \times e^{\lambda_3(T-t)} \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix} \dots \right] \end{aligned}$$

したがって、 $\zeta \in l_2$ とすると、 $L_T^*(t) \zeta$ は E_{r+s} 値の t についての解析関数である。

さらに、 $\zeta = (e_{11}, \dots, e_{21}, \dots)'$ とするとき、

$$L_T^*(t) \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n(T-t)} \sum_{i=1}^{m_n} \begin{bmatrix} D_{ni}' \\ B_{ni}' \end{bmatrix} e_{ni}$$

である。

以上より 3.2 と同様にして次の定理を得る。

【定理 3】 E_r 値 2 乗可積分な空間分布制御と E_s 値断片的連続な境界制御関数とによって、システム (1.1)~(1.3) が準完全可制御であるための必要十分条件は、各 $n=1, 2, \dots$ 、について、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} D_{n1}', D_{n2}', \dots, D_{nm_n}' \\ B_{n1}', B_{n2}', \dots, B_{nm_n}' \end{bmatrix} = m_n$$

となることである。

3.4 例題による検討

最後に簡単なシステムの可制御性を検討する。

【例 1】 細長い鋼棒、あるいは薄肉円筒の加熱プロセス

Fig. 1 Heating process of slender steel rod by gas

両端を断熱して側面よりガスでもって加熱する (Fig. 1 参照)。

鋼棒の温度分布は α 軸に垂直な平面上では一様であると仮定し、輻射熱は鋼棒の温度 $x(t, \alpha)$ と加熱ガスの温度 $f(t)$ との差に比例すると仮定する。

鋼棒の内部に微小部分 Ω を考える。 Δt 時間内に α 軸に垂直な平面を通して Ω の内部に流入する熱量は、

$$k_i \int_{\Delta t} dt \int_{\Delta \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} d\alpha \quad k_i: \text{は定数}$$

鋼棒の側面から流入する熱量は、

$$- \int_{\Delta t} \int_{\Delta \alpha} k_e (x - f) d\alpha dt, \quad k_e: \text{定数}$$

鋼棒の断面積を S 、密度を ρ 、比熱を C とすると、 Ω の内部の熱量の変化は、

$$SC\rho \int_{\Delta t} \int_{\Delta \alpha} \frac{\partial x}{\partial t} d\alpha dt; \quad SC\rho > 0$$

したがって、

$$SC\rho \int_{\Delta t} \int_{\Delta \alpha} \frac{\partial x}{\partial t} d\alpha dt = k_i \int_{\Delta t} \int_{\Delta \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} d\alpha dt - k_e \int_{\Delta t} \int_{\Delta \alpha} (x - f) d\alpha dt$$

これが任意の $\Delta t \times \Delta \alpha$ について成立するから、

$$SC\rho \frac{\partial x}{\partial t} = k_i \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} - k_e x + k_e f$$

あらためて、 $\frac{k_i}{SC\rho} = k_i, \quad \frac{k_e}{SC\rho} = k_e, \quad \frac{k_e}{SC\rho} f(t) = f(t)$

とすると、次の偏微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t}(t, \alpha) &= k_i \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}(t, \alpha) - k_e x(t, \alpha) + f(t), \quad t > 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \frac{\partial x}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=l} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

このシステムは空間分布制御 $f(\cdot)$ によって制御される例である。空間分布の制御機構 $D(\cdot)$ は、 $D(\alpha) = 1, 0 < \alpha < l$ 、であるから、写像 $D(\cdot)$ は有界である。したがって定理 4 を適用できる。

(37) 式の固有値 λ_n と固有関数 ψ_n はそれぞれ、

$$\lambda_n = - \left(k_e + k_i \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_n &= \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \cos \frac{n\pi\alpha}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \\ \psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{l}} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

である。また、 $D_n = \int_0^l D(\alpha) \psi_n(\alpha) d\alpha = 0, n = 1, 2, \dots$

$$D_0 = \int_0^l D(\alpha) \psi_0(\alpha) d\alpha = \sqrt{l}$$

であるから、

$$\tilde{D} = [\sqrt{l}, 0, \dots]'$$

したがって定理 1 より、システム (37) は準完全可制御ではない。

【例 2】 鋼片の加熱プロセス¹⁰⁾

システムは次式で記述される。制御入力は境界制御 $\varphi(\cdot)$ である。また $\varphi(\cdot)$ は断片的連続であるとする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t}(t, \alpha) &= h \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}(t, \alpha), \quad 0 < \alpha < l, \quad t > 0, \quad h > 0 \\ x(t, 0) &= 0, \quad (1-k) \frac{\partial x}{\partial \alpha}(l, t) + kx(l, t) = \varphi(t) \\ 0 &< k < 1 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$\tan \theta = \frac{k-1}{kl} \theta, \theta > 0$ 、の小さいほうから数えて第 n 番目の根を $\nu_n l$ とする。システム (34) の固有値 λ_n と固有関数 ψ_n は、

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n &= -h\nu_n^2, \quad n = 1, 2, \dots \\ \psi_n(\alpha) &= \sqrt{\frac{4\nu_n}{2\nu_n l - \sin 2\nu_n l}} \sin \nu_n \alpha \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

である。また、

$$\begin{aligned} B_n &= \int_{\partial \Sigma} B(\sigma) \left(\frac{\partial \psi_n(\sigma)}{\partial n} - \psi_n(\sigma) \right) d\sigma \\ &= \frac{k}{1-k} \psi_n(l) \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき、 $\nu_n l$ は $\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$ に右から近づくから、

$$B_n \rightarrow \frac{(-1)^{n-1}k}{1-k} \sqrt{\frac{2}{l}}$$

となり、

$$\tilde{B} = [B_1, B_2, \dots]'$$
 は非有界作用素である。

しかし、 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$e^{2\lambda_n t} B_n^2 \rightarrow \left[\frac{2}{l} \exp \left(- \frac{(2n-1)^2}{2l^2} h\pi^2 t \right) \right] \frac{k^2}{(k-1)^2}$$

であるから、 $t > 0$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n t} B_n^2 < \infty$ である。これから $\tilde{\Phi}(t)\tilde{B}$ は有界作用素である (2.2 参照)。以上より定理 2 を適用することができ、システム (39) は準完全可制御である。

4. 結 言

線形な放物形の偏微分方程式で記述されるダイナミカルシステムの入力-状態関係式と準完全可制御性とを検討した。

はじめに、出力測定機構を表現する作用素が連続な作用素となるという要請から状態空間に L_2 位相を導入したものとすれば、入力-状態関係式は偏微分方程式の弱い解で表わされることを利用して入力-状態関係式を求めた。そしてさらに制御入力空間に分布した制御機構を通して加えられる場合と、境界に集中した制御機構を通して加えられる場合とでは、それぞれ異なった性質を有する入力-状態関係式が得られることを示した。すなわち前者の入力-状態関係式は (19) 式に合同である。そのとき制御機構を表現する作用素 $\tilde{D}$ は有界である。いっぽう、後者の入力-状態関係式は、(31) 式に合同であるが、制御機構を表現する作用素 $\tilde{B}$ は非有界である。これらの入力-状態関係式は断片的に連続な入力関数について得られたものであって、偏微分方程式系の最適制御問題を考察する出発点とすることができる。

本稿ではこの入力-状態関係式によって、システム (1.1) ~ (1.3) が準完全可制御であるための必要十分

な条件を検討し、これを陽な形に表現することができた (定理 1 ~ 定理 3)。さらに終わりに簡単な 2 つのシステムにこれらの定理を適用する例を示した。

最後に本研究にさいして終始熱心に討論いただいた自動制御研究施設の諸氏に感謝する。

参考文献

- 1) R. E. Kalman : On the General Theory of Control Systems, Proc. of 1st. IFAC, Butterworth & Co. Ltd. (1960)
- 2) 野村・中村：無限次元状態空間系の可制御性と可観測性, 名大自動制御研究施設報告 16, 26/35 (1969)
- 3) 野村・中村：ヒルベルト空間系の最短時間制御, 計測自動制御学会論文集投稿中
- 4) 野村・松尾・中村：無限次元状態空間系の可制御条件, 名大自動制御研究施設報告 15, 22/28 (1968)
- 5) 伊藤清三：偏微分方程式, 35/125+218, 培風館(1966)
- 6) S. Ito : Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems, Japanese Journal of Mathematics, 55/102 (1957)
- 7) K. Yoshida : Functional Analysis, 17, Springer Verlag (1965)
- 8) 溝畑 茂：偏微分方程式論, 133/220, 岩波書店(1965)
- 9) 舟橋・中村：半群の理論と放物型ダイナミカル・システムの解の存在と一意性, 名大自動制御研究施設報告 15, 8/14 (1968)
- 10) 坂和愛幸：最適制御過程 II, 83, 情報科学講座 A・4・2, 共立出版 (1968)
- 11) A. E. Taylor : Introduction to Functional Analysis, 226, John Wiley & Sons (1958)