非線形 Volterra 形積分方程式で記述される システムの解析†

小 野 雅 彦*・堀 内 和 夫**

* 早稲田大学大学院 東京都新宿区西大久保 4-170

** 早稲田大学理工学部 東京都新宿区西大久保 4-170

(昭和 44 年 9 月 26 日 受付)

Analysis of Systems Described by Nonlinear Volterra Integral Equations

Masahiko ONO* and Kazuo HORIUCHI**

(* Graduate School of Science and Engineering, Waseda University, Sinjuku-ku, Tokyo)

(** School of Science and Engineering, Waseda University, Sinjuku-ku, Tokyo)

(Received September 26, 1969)

This paper is concerned with nonlinear control system with finite memory, the input-output relation of which is governed by nonlinear Volterra integral equations. Investigation concerning global properties of this system is made by the method of functional analysis, that is, existence and uniqueness problems of output signals are reduced to mapping problems in signal space, where n -dimensional direct product space of L_2 -Banach space is constructed as signal space (n denotes the number of output signals). And, with the help of well-known contraction mapping principle, it is shown that, under several basic assumptions imposed on the system, there always exist output signals with finite total energy, corresponding to any input signals under the same condition, that the upper bound of output signals for almost all time t can be constructed concretely, and that the procedure of calculation of output signals can be established by the method of successive approximation.

But, on the other hand, contraction mapping principle requires a very strict restriction such that Lipschitz coefficient associated with mapping should be less than unity. Then for the purpose of removing this restriction, extended L_2 -Banach space is introduced with denotation $L_2^{(\sigma)}$, which is defined as the whole of measurable functions satisfying the following condition :

$$\|x\|^{(\sigma)} = \left\{ \int_0^\infty |x(t)|^2 e^{-2\sigma t} dt \right\}^{1/2} < +\infty \quad (\sigma \geq 0)$$

and by constructing n -dimensional direct product space of $L_2^{(\sigma)}$, and regulating the parameter σ , the problems mentioned above can again be reduced to contraction mapping principle, even for more general systems. In addition to this, by using the properties of norm $\|\cdot\|^{(\sigma)}$, it is shown that there always exist output signals with finite mean power, corresponding to any input signals under the same condition.

As results, very comprehensive control systems can be treated even for signals with infinite total energy, and so, even in this case, upper bound of output signals can be constructed concretely.

1. 緒 言

本論文は、記憶の有限な非線形システムを連立形の

非線形 Volterra 形積分方程式で記述し、関数解析的な立場から写像の問題に帰着させて解析を行なう。非線形システムの線形部分をインパルス応答で表現し、システム全体を積分方程式で記述して関数解析的に取

† 第 8 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 44・8)

り扱う手法は、Beneš, 堀内らによって導入され、時間に関して不変なシステムについていくつかの詳細な結果が与えられているが、本論文においては時変部分を含む、あるクラスの非線形システムを対象としてすべて時領域にて解析を行なう。また、非線形 Volterra 形積分方程式の初等的な数学的取り扱い、その逐次近似的な求解の手續きとともによく知られているが、本論文においては、信号の全エネルギー、平均電力などの物理量と直接の対応をつけるため、また Lebesgue 可測性のレベルで信号を取り扱うために、 $L_2(0, \infty)$ -Banach 空間の多次元直積空間を信号空間に選び、そこにおける写像の問題に帰着させて解析を行なう。

本論文の結果によれば、出力信号の興味ある関数形の評価関数が具体的に構成され、これによって出力信号の本質的有界性、大域的応動などをただちに知ることができる。また本論文の解析は、すべてよく知られた縮小写像の原理を基礎にしているが、周知のとおり、この原理の適用には、厳しい抱束条件が課せられる。そこで本論文においては、 $L_2(0, \infty)$ -ノルムを指数関数的に拡張したノルムを導入し、より広範なシステムを縮小写像と帰着させることを試みる。この手法は、周波数解析における Fourier 変換から Laplace 変換への拡張の思想を関数解析に適用したものと考えてよく、結果もきわめて自然な形で拡張される。また、本論文の結果は、ノルムの性質からただちに全エネルギー、そして平均電力の意味での安定性に関する1つの十分条件を与える。

2. L_2 -信号空間における解析

Fig. 1 に示すような時変線形部分を含む非線形フィードバックシステムを考える。

Fig. 1 Nonlinear feedback system containing time-varying linear part

このシステムは初期状態を零とおくことにより、次の連立形の積分方程式にて記述することができる。

$$x_i(t) = \int_0^t \rho_i(\tau, t) \varphi_i[x_1(\tau), \dots, x_n(\tau), u_1(\tau), \dots, u_r(\tau), \tau] d\tau \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ここで φ_i は非線形結合を示し、 ρ_i はインパルス応

答を示す関数である。また $x_i(t)$ は出力信号を、 $u_j(t)$ は入力信号を示す。本論文においては、上式をさらに一般化して、

$$x_i(t) = \int_0^t f_i[x_1(\tau), \dots, x_n(\tau), u_1(\tau), \dots, u_r(\tau), \tau, t] d\tau \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

の形にシステムを表現して解析を行なう。

また、次式にて出力信号ベクトル、入力信号ベクトルを導入する。

$$\mathbf{x}(t) \triangleq (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(t) \triangleq (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)) \quad (3)$$

本章においては、出力信号空間として、2 乗可積分な可測関数の全体として定義される $L_2(0, \infty)$ の n 次元直積空間を構成し、位相(直積位相)を、

$$\|\mathbf{x}\| \triangleq \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i\| \left(\|\mathbf{x}_i\| = \sqrt{\int_0^\infty |x_i(t)|^2 dt} \right) \quad (4)$$

なるノルムにて導入する。以降においては、出力信号空間を単に信号空間と称することにする。なお、入力信号ベクトルについても、(4) 式と平行して、

$$\|\mathbf{u}\| \triangleq \sum_{j=1}^r \|\mathbf{u}_j\| \left(\|\mathbf{u}_j\| = \sqrt{\int_0^\infty |u_j(t)|^2 dt} \right) \quad (5)$$

にてノルムを定義しておく。また、信号ベクトルの絶対値は、

$$|\mathbf{x}(t)| \triangleq \sum_{i=1}^n |x_i(t)| \quad (6)$$

$$|\mathbf{u}(t)| \triangleq \sum_{j=1}^r |u_j(t)| \quad (7)$$

にて定義される。

さて、次の成分をもつ信号空間の写像 J を定義しよう。

$$J_i \mathbf{x}(t) \triangleq \int_0^t f_i\{\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau, t\} d\tau \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

すると方程式系 (1) は、 J の不動点、

$$\mathbf{x}(t) = J\mathbf{x}(t) \quad (9)$$

として表現され、システムの性質は写像 J の性質に還元されるわけである。われわれは、次節において、 J の連続性その他の性質について検討を加える*。

次に、以下の解析において、システムに仮定される条件を列記しよう。

$$(A-1) \quad |f_i\{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}, \tau, t\} - f_i\{\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{u}^{(2)}, \tau, t\}|$$

* 本論文の解析においては、初期状態をすべて零、すなわち、

$$\mathbf{x}(0+) = \theta^{(n)}$$

とおいっているが、これが仮定されない場合は、システムが非線形であるために、Volterra 形と Fredholm 形の混合問題となり、きわめて複雑な議論となる。これに関しては、今後の課題としたい。

$$\leq |\rho_i(\tau, t)| \cdot (|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}| + |\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}|) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

ここに $\{\rho_i(\tau, t)\} \ (i=1, 2, \dots, n)$ は有界可測であり、条件、

$$\int_0^\infty dt \int_0^t |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau < +\infty \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

を満足するものとする。

$$(A-2) \quad f_i\{\theta^{(m)}, \theta^{(r)}, \tau, t\} \equiv 0 \quad (0 \leq \tau \leq t < \infty) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

ただし、 $\theta^{(m)}, \theta^{(r)}$ はそれぞれ出力、入力における零信号を示す。

(A-1), (A-2) よりただちに次式が成立する。

$$|f_i\{\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau, t\}| \leq |\rho_i(\tau, t)| \cdot (|\mathbf{x}| + |\mathbf{u}|) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

$$[J\theta^{(m)}]_{u=\theta^{(r)}} = \theta^{(m)} \quad (14)$$

2.2 写像 J の性質

本章では次式にて C_i, C を定義し、かつ付加条件、

$$C < 1 \quad (15)$$

が満足されているものとしよう。

$$C_i \triangleq \sqrt{\int_0^\infty dt \int_0^t |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

$$C \triangleq \sum_{i=1}^n C_i \quad (17)$$

まず、 J の基本的な性質として、次の補題が成立する。

【補題 1】 J は信号空間において自身への連続な写像であり、かつ縮小的である。

【証明】 (10) 式より、

$$\begin{aligned} & \|J_i \mathbf{x}^{(1)} - J_i \mathbf{x}^{(2)}\|^2 \\ & \leq \int_0^\infty \left[\int_0^t |\rho_i(\tau, t)| \cdot \{|\mathbf{x}^{(1)}(\tau) - \mathbf{x}^{(2)}(\tau)| + |\mathbf{u}^{(1)}(\tau) - \mathbf{u}^{(2)}(\tau)|\} d\tau \right]^2 dt \\ & = \int_0^\infty \left[\sum_{k=1}^n \int_0^t |\rho_i(\tau, t)| \cdot |x_k^{(1)}(\tau) - x_k^{(2)}(\tau)| d\tau + \sum_{j=1}^r \int_0^t |\rho_i(\tau, t)| \cdot |u_j^{(1)}(\tau) - u_j^{(2)}(\tau)| d\tau \right]^2 dt \\ & \leq \int_0^\infty \left[\sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^t |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_0^\infty |x_k^{(1)}(\tau) - x_k^{(2)}(\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2} + \sum_{j=1}^r \left\{ \int_0^t |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_0^\infty |u_j^{(1)}(\tau) - u_j^{(2)}(\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \right]^2 dt \\ & = C_i^2 (\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\| + \|\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}\|)^2 \end{aligned}$$

ゆえに、各成分について加え合わせて、

$$\|J\mathbf{x}^{(1)} - J\mathbf{x}^{(2)}\| \leq C (\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\| + \|\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}\|) \quad (18)$$

(18) 式において、入力を固定して $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}$ とおけば、

$$\|J\mathbf{x}^{(1)} - J\mathbf{x}^{(2)}\| \leq C \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\| \quad (19)$$

また、(14) 式を (18) 式に適用すれば、

$$\|J\mathbf{x}\| \leq C (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{u}\|) \quad (20)$$

を得る。(19), (20) 式は、

$$\|\mathbf{u}\| < +\infty$$

なる任意の入力信号に対して J が自身への (ノルムの意味で) 連続な写像であることを示し、かつ $C < 1$ なる仮定により縮小的である。(証明終)

次に、信号空間内に、各成分が次の不等式を満足する信号ベクトル $\mathbf{x}(t)$ の集合 S を構成しよう。

$$|x_i(t)| \leq \frac{\|\mathbf{u}\|}{1-C} \sqrt{\int_0^t |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau} \quad (\text{a. e.}) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

S が閉集合であることは、Lebesgue 測度の性質を用いて容易に示すことができる¹⁾。しかも、 S は次の重要な性質を有する。

【補題 2】 S は J によって自身の内部に写される。

【証明】 任意の $\mathbf{x}(t) \in S$ に対して、

$$\begin{aligned} & |J_i \mathbf{x}(t)| \\ & \leq \sum_{k=1}^n \int_0^t |\rho_i(\tau, t)| \cdot |x_k(\tau)| d\tau \\ & + \sum_{j=1}^r \int_0^t |\rho_i(\tau, t)| \cdot |u_j(\tau)| d\tau \\ & \leq \frac{\|\mathbf{u}\|}{1-C} \sum_{k=1}^n \int_0^t |\rho_i(\tau, t)| \cdot \left\{ \int_0^\tau |\rho_k(\eta, \tau)|^2 d\eta \right\}^{1/2} d\tau \\ & + \sum_{j=1}^r \int_0^t |\rho_i(\tau, t)| \cdot |u_j(\tau)| d\tau \\ & \leq \frac{\|\mathbf{u}\|}{1-C} \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^t |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_0^\infty \int_0^\tau |\rho_k(\eta, \tau)|^2 d\eta d\tau \right\}^{1/2} \\ & + \sum_{j=1}^r \left\{ \int_0^t |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_0^\infty |u_j(\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \\ & = \frac{\|\mathbf{u}\|}{1-C} \cdot C \left\{ \int_0^t |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \\ & + \|\mathbf{u}\| \cdot \left\{ \int_0^t |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \\ & = \frac{\|\mathbf{u}\|}{1-C} \left\{ \int_0^t |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

が成立するが、これは $J\mathbf{x}(t) \in S$ を示し、したがって $J(S) \subset S$ である。(証明終)

2.3 縮小写像の原理の適用

前節までの結果を総合すると、写像 J は (ノルムの意味で) 連続かつ縮小的であり、閉集合 S を自身の内部にうつす。したがって縮小写像の原理が適用可能で

あり、積分方程式系 (1) は S において一意的な解をもつことが結論される。しかも任意の初期近似 $\mathbf{x}^{(0)}(t) \in S$ より出発して、逐次近似、

$$\mathbf{x}^{(m+1)}(t) = J\mathbf{x}^{(m)}(t) \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (22)$$

にしたがって (平均 2 乗誤差の意味で)、任意の精度まで近似関数を計算することが可能である。

以上の結果を命題の形にまとめる。

【命題 1】 連立積分方程式系 (1) で記述されるシステムが (A-1), (A-2) の仮定、ならび $C < 1$ になる付加条件を満足するものとする。すると全エネルギー有限な任意の入力信号 $\mathbf{u}(t)$ に対して全エネルギー有限な出力信号 $\mathbf{x}(t)$ が一意的に存在して、次の性質をもつ。

$$(P-1) \quad \|x_i(t)\| \leq \frac{\|\mathbf{u}\|}{1-C} \sqrt{\int_0^t |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

$$(P-2) \quad \|x_i\| \leq \frac{C_i}{1-C} \|\mathbf{u}\| \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (24)$$

しかも逐次近似による求解が可能であり、任意の初期近似 $\mathbf{x}^{(0)}(t) \in S$ より出発して任意の精度の近似解が計算できる。初期近似としては、たとえば、次のベクトルを選べばよい。

$$\mathbf{x}^{(0)}(t) = \left(\frac{\|\mathbf{u}\|}{1-C} \sqrt{\int_0^t |\rho_1(\tau, t)|^2 d\tau}, \dots, \right. \\ \left. \times \frac{\|\mathbf{u}\|}{1-C} \sqrt{\int_0^t |\rho_n(\tau, t)|^2 d\tau} \right) \quad (25)$$

また解 $\mathbf{x}(t)$ と第 m 近似 $\mathbf{x}^{(m)}(t)$ との間の誤差は、次式にて評価することができる。

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(m)}\| \leq \frac{C^m}{1-C} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\| \quad (m=1, 2, \dots) \quad (26)$$

(P-2) は、(P-1) の両辺のノルムをとることにより、ただちに導かれる性質である。

なおこの命題は、特定な入力信号に対する出力信号の存在を与えるものではなく、任意の全エネルギー有限な入力信号に対して全エネルギー有限な出力信号の存在を保証する十分条件であることに注目すべきであろう。

【注 1】 本章の解析においては、写像 J には完全連続性を要求せず、縮小写像の原理のみによって検討したが、完全連続性が仮定されるシステムについてはよく知られた Schauder の原理に基づく一般的な解析が可能である。これに関しては文献 7) を参照。

【注 2】 本章の解析は、記憶の無限なシステム、

$$x_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i\{\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau, t\} d\tau \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (27)$$

に対しても仮定を適当に修正することにより適用可能である。

3. 空間 $L_2^{(\sigma)}$ への拡張

3.1 $L_2^{(\sigma)}(0, \infty)$

前章では $C < 1$ なる付加条件を仮定したが、本章ではこの条件を仮定せずに検討する。まず条件、

$$\int_0^{\infty} |x(t)|^2 e^{-2\sigma t} dt < +\infty \quad (\sigma \geq 0)$$

を満足する可測関数 $x(t)$ の全体を $L_2^{(\sigma)}(0, \infty)$ としよう。この全体にノルム、

$$\|x\|^{(\sigma)} \triangleq \sqrt{\int_0^{\infty} |x(t)|^2 e^{-2\sigma t} dt}$$

で位相を導入すれば Banach 空間となる。そこで本章では $L_2^{(\sigma)}(0, \infty)$ の n 次元直積空間 $[L_2^{(\sigma)}(0, \infty)]^{(n)}$ を構成して信号空間と定義し、信号空間の位相を、

$$\|\mathbf{x}\|^{(\sigma)} \triangleq \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i\|^{(\sigma)} \\ \left(\|\mathbf{x}_i\|^{(\sigma)} = \sqrt{\int_0^{\infty} |x_i(t)|^2 e^{-2\sigma t} dt} \right) \quad (28)$$

なるノルムにて導入する。また入力信号ベクトルのノルムも、これと平行して、

$$\|\mathbf{u}\|^{(\sigma)} \triangleq \sum_{j=1}^r \|\mathbf{u}_j\|^{(\sigma)} \left(\|\mathbf{u}_j\|^{(\sigma)} = \sqrt{\int_0^{\infty} |u_j(t)|^2 e^{-2\sigma t} dt} \right) \quad (29)$$

にて定義しておく。なお、信号ベクトルの絶対値は前章と同じく (6), (7) 式で定義される。

次節では、次の成分をもつ写像 $J^{(\sigma)}$ 、

$$J_i^{(\sigma)} \mathbf{x}(t) \triangleq \int_0^t f_i\{\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau, t\} d\tau \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (30)$$

の種々の性質について検討する。

3.2 写像 $J^{(\sigma)}$ の性質

まず、次式にて $C_i^{(\sigma)}, C^{(\sigma)}$ を定義しよう。

$$C_i^{(\sigma)} \triangleq \sqrt{\int_0^{\infty} dt \int_0^t e^{-2\sigma(t-\tau)} \cdot |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau} \\ (i=1, 2, \dots, n) \quad (31)$$

$$C^{(\sigma)} \triangleq \sum_{i=1}^n C_i^{(\sigma)} \quad (32)$$

$C^{(\sigma)}$ は σ に関して単調であることが明らかであり、次の補題が成立する。この補題は初等的であるが、本章の解析においては本質的である。

【補題 3】 $C^{(\sigma)}$ は適当に大きな σ を選ぶことにより、 $C^{(\sigma)} < 1$ を満足せしめることができる。

【証明】 簡単のため、

$$\phi_i(t, \sigma) = \int_0^t e^{-2\sigma(t-\tau)} \cdot |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau$$

とおこう。するとよく知られた等式、

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} 2\sigma \int_0^t e^{-2\sigma(t-\tau)} \cdot |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau = |\rho_i(t, t)|^2 < +\infty$$

より,

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \phi_i(t, \sigma) = 0$$

が成立するが, これは任意の発散列 $\{\sigma_n\}$ ($\sigma_n \geq 0$) に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_i(t, \sigma_n) = 0$$

なることと同値である. このことと,

$$\phi_i(t, \sigma_n) \leq \phi_i(t, 0)$$

なることにより, Lebesgue の収束定理を用いて,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_i(\sigma_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \phi_i(t, \sigma_n) dt = \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_i(t, \sigma_n) dt = 0$$

が成立し, これより,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C^{(\sigma_n)} = 0$$

が従う. いっぽう, $\{\sigma_n\}$ は任意の発散列であるので,

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} C^{(\sigma)} = 0$$

が成立するが, これは十分大きな σ を選べば $C^{(\sigma)} < 1$ を満足ならしめることを示す. (証明終)

したがって, 本節においては, つねに $C^{(\sigma)} < 1$ を満足する σ が選ばれているものとする.

以上の仮定のもとに, $J^{(\sigma)}$ の基本的な性質として次の補題が成立する:

【補題 4】 $J^{(\sigma)}$ は信号空間において自身への連続な写像であり, かつ縮小的である.

【証明】 再び (10) 式より,

$$\|J_i \mathbf{x}^{(1)} - J_i \mathbf{x}^{(2)}\|^{(\sigma)}\|^2$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \left[\int_0^t |\rho_i(\tau, t)| \|\mathbf{x}^{(1)}(\tau) - \mathbf{x}^{(2)}(\tau)\| \right.$$

$$\left. + \|\mathbf{u}^{(1)}(\tau) - \mathbf{u}^{(2)}(\tau)\| \right] d\tau dt$$

$$= \int_0^\infty \left[\sum_{k=1}^n \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} |\rho_i(\tau, t)| \cdot |x_k^{(1)}(\tau) \right.$$

$$- x_k^{(2)}(\tau)| e^{-\sigma\tau} d\tau$$

$$+ \sum_{j=1}^r \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} |\rho_i(\tau, t)| \cdot |u_j^{(1)}(\tau)$$

$$- u_j^{(2)}(\tau)| e^{-\sigma\tau} d\tau \Big]^2 dt$$

$$\leq \int_0^\infty \left[\sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^t e^{-2\sigma(t-\tau)} |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \right.$$

$$\cdot \left\{ \int_0^\infty |x_k^{(1)}(\tau) - x_k^{(2)}(\tau)|^2 e^{-2\sigma\tau} d\tau \right\}^{1/2}$$

$$+ \sum_{j=1}^r \left\{ \int_0^t e^{-2\sigma(t-\tau)} |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau \right\}^{1/2}$$

$$\cdot \left\{ \int_0^\infty |u_j^{(1)}(\tau) - u_j^{(2)}(\tau)|^2 e^{-2\sigma\tau} d\tau \right\}^{1/2} \Big]^2 dt$$

$$= \{C_i^{(\sigma)} (\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|^{(\sigma)} + \|\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}\|^{(\sigma)})\}^2$$

が導かれ, 各成分について加え合わせることにより,

$$\|J\mathbf{x}^{(1)} - J\mathbf{x}^{(2)}\|^{(\sigma)} \leq C^{(\sigma)} (\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|^{(\sigma)}$$

$$+ \|\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}\|^{(\sigma)}) \quad (33)$$

が成立する. (33) 式において, 入力を変数として $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}$ とおけば,

$$\|J\mathbf{x}^{(1)} - J\mathbf{x}^{(2)}\|^{(\sigma)} \leq C^{(\sigma)} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|^{(\sigma)} \quad (34)$$

が導かれ, また, (14) 式を (33) 式に適用すれば,

$$\|J\mathbf{x}\|^{(\sigma)} \leq C^{(\sigma)} (\|\mathbf{x}\|^{(\sigma)} + \|\mathbf{u}\|^{(\sigma)}) \quad (35)$$

が従う. (34), (35) 式は $J^{(\sigma)}$ が自身への連続写像なることを示し, かつ $C^{(\sigma)} < 1$ なる仮定より縮小的である. (証明終)

次に, 再び信号空間において, 各成分が次の不等式を満足するベクトル $\mathbf{x}(t)$ の集合 $S^{(\sigma)}$ を導入しよう.

$$|x_i(t)| \leq \frac{\|\mathbf{u}\|^{(\sigma)}}{1 - C^{(\sigma)}} \cdot \sqrt{\int_0^t e^{2\sigma\tau} |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau} \quad (\text{a. e.})$$

$$(i=1, 2, \dots, n) \quad (36)$$

$S^{(\sigma)}$ は S と同様, 閉集合であることが容易に示され, しかも次の補題が成立する.

【補題 5】 $S^{(\sigma)}$ は $J^{(\sigma)}$ によって自身の内部に写される.

【証明】 任意の $\mathbf{x}(t) \in S^{(\sigma)}$ に対して,

$$\begin{aligned} |J_i \mathbf{x}(t)| &\leq \sum_{k=1}^n \int_0^t |\rho_i(\tau, t)| \cdot |x_k(\tau)| d\tau \\ &+ \sum_{j=1}^r \int_0^t |\rho_i(\tau, t)| \cdot |u_j(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{\|\mathbf{u}\|^{(\sigma)}}{1 - C^{(\sigma)}} \sum_{k=1}^n \int_0^t |\rho_i(\tau, t)| \\ &\cdot \left\{ \int_0^\tau e^{2\sigma\eta} |\rho_k(\eta, \tau)|^2 d\eta \right\}^{1/2} d\tau \\ &+ \sum_{j=1}^r \int_0^t |\rho_i(\tau, t)| \cdot |u_j(\tau)| d\tau \\ &= \frac{\|\mathbf{u}\|^{(\sigma)}}{1 - C^{(\sigma)}} \sum_{k=1}^n \int_0^t e^{2\sigma\tau} |\rho_i(\tau, t)| \\ &\cdot \left\{ \int_0^\tau e^{-2\sigma(\tau-\eta)} |\rho_k(\eta, \tau)|^2 d\eta \right\}^{1/2} d\tau \\ &+ \sum_{j=1}^r \int_0^t e^{2\sigma\tau} |\rho_i(\tau, t)| \cdot |u_j(\tau)| e^{-\sigma\tau} d\tau \\ &\leq \frac{\|\mathbf{u}\|^{(\sigma)}}{1 - C^{(\sigma)}} \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^t e^{2\sigma\tau} |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \\ &\cdot \left\{ \int_0^\infty d\tau \int_0^\tau e^{-2\sigma(\tau-\eta)} |\rho_k(\eta, \tau)|^2 d\eta \right\}^{1/2} \\ &+ \sum_{j=1}^r \left\{ \int_0^t e^{2\sigma\tau} |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \\ &\cdot \left\{ \int_0^\infty |u_j(\tau)|^2 e^{-2\sigma\tau} d\tau \right\}^{1/2} \\ &= \frac{\|\mathbf{u}\|^{(\sigma)}}{1 - C^{(\sigma)}} \cdot C^{(\sigma)} \left\{ \int_0^t e^{2\sigma\tau} |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \\ &+ \|\mathbf{u}\|^{(\sigma)} \left\{ \int_0^t e^{2\sigma\tau} |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \\ &= \frac{\|\mathbf{u}\|^{(\sigma)}}{1 - C^{(\sigma)}} \left\{ \int_0^t e^{2\sigma\tau} |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

が導かれるが、これは $J\mathbf{x}(t) \in S^{(\sigma)}$ にはかならない。
ゆえに、 $J^{(\sigma)}(S^{(\sigma)}) \subset S^{(\sigma)}$ が従う。(証明終)

3.3 縮小写像の原理の適用

前節までの結果より、 J は信号空間において縮小的な連続写像であり、かつ閉集合 $S^{(\sigma)}$ をその内部にうつす。ゆえに縮小写像の原理が適用可能であり、一意的な出力信号が $S^{(\sigma)}$ に存在する。また、逐次近似、

$$\mathbf{x}^{(m+1)}(t) = J^{(\sigma)}\mathbf{x}^{(m)}(t) \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (34)$$

に従って、 $\mathbf{x}(t)$ を任意の精度まで計算できることも前章と同様である。以下に命題の形で結果をまとめる。

【命題 2】 連立積分方程式系 (1) で記述されるシステムが (A-1)、(A-2) の仮定を満足するものとし、 $C^{(\sigma)} < 1$ を満足する σ を固定する。このとき、

$$\|\mathbf{u}\|^{(\sigma)} < +\infty \quad (35)$$

を満足する任意の入力信号に対して、一意的な出力信号 $\mathbf{x}(t)$ が存在し、次の性質をもつ。

$$(P-3) \quad |x_i(t)| \leq \frac{\|\mathbf{u}\|^{(\sigma)}}{1-C^{(\sigma)}} \sqrt{\int_0^t e^{2\sigma\tau} |\rho_i(\tau, t)|^2 d\tau} \quad (\text{a.e.})$$

$$(i=1, 2, \dots, n) \quad (36)$$

$$(P-4) \quad \|\mathbf{x}_i\|^{(\sigma)} \leq \frac{C_i^{(\sigma)}}{1-C^{(\sigma)}} \|\mathbf{u}\|^{(\sigma)} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (37)$$

しかも逐次近似による求解が可能であり、任意の初期近似 $\mathbf{x}^{(0)}(t) \in S^{(\sigma)}$ より出発して、漸化式 (34) に従って任意の精度まで出力応答の近似関数が計算できる。初期近似としては、たとえば、次のベクトルを選べばよい。

$$\mathbf{x}^{(0)}(t) = \left(\frac{\|\mathbf{u}\|^{(\sigma)}}{1-C^{(\sigma)}} \sqrt{\int_0^t e^{2\sigma\tau} |\rho_1(\tau, t)|^2 d\tau}, \dots, \frac{\|\mathbf{u}\|^{(\sigma)}}{1-C^{(\sigma)}} \sqrt{\int_0^t e^{2\sigma\tau} |\rho_n(\tau, t)|^2 d\tau} \right) \quad (38)$$

また、解 $\mathbf{x}(t)$ と第 m 近似との誤差は次式にて評価することができる。

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(m)}\|^{(\sigma)} \leq \frac{\{C^{(\sigma)}\}^m}{1-C^{(\sigma)}} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|^{(\sigma)} \quad (39)$$

この命題は、本質的に有界でない信号に対しても適用可能であり、広範な問題を取り扱うことができる。また、解の収束は、 σ の選び方に依存することに注意すべきである。

3.4 信号の平均電力に関する性質

前節に得られた命題 2 を用いて、信号の平均電力に関するじゃっかんの性質を調べる。本節では再び、

$$C = C^{(0)} < 1 \quad (40)$$

を仮定しよう。

まず、信号 $x(t)$ の平均電力 $P[x]$ を、

$$P[x] \triangleq \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \quad (41)$$

にて定義する。すると公式⁵⁾、

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \int_0^\infty |x(t)|^2 e^{-\lambda t} dt \quad (42)$$

より、 $P[x]$ と $\|\mathbf{x}\|^{(0)}$ との間には、

$$P[x] = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0} 2\sigma \{\|\mathbf{x}\|^{(\sigma)}\}^2 \quad (43)$$

が成立する。したがって平均電力有限な入力信号、すなわち、

$$P[u_j] < +\infty \quad (j=1, 2, \dots, r) \quad (44)$$

なる $\mathbf{u}(t)$ に対して、(37) 式の両辺に (43) 式を適用すれば、出力信号の平均電力の上界を与える次の不等式を導くことができる。

$$(P-5) \quad \sqrt{P[x_i]} \leq \frac{C_i}{1-C} \sum_{j=1}^r \sqrt{P[u_j]} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (45)$$

次に、平均電力有限な入力信号 $\mathbf{u}^{(1)}(t), \mathbf{u}^{(2)}(t)$ に対応する出力信号をそれぞれ $\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t)$ とする。すると、(33) 式を考慮することにより、

$$\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|^{(\sigma)} \leq \frac{C^{(\sigma)}}{1-C^{(\sigma)}} \cdot \|\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}\|^{(\sigma)} \quad (46)$$

が導かれるが、ここで前と同様に (43) 式を適用すれば

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{P[x_i^{(1)} - x_i^{(2)}]} \leq \frac{C}{1-C} \cdot \sum_{j=1}^r \sqrt{P[u_j^{(1)} - u_j^{(2)}]} \quad (47)$$

が得られる。したがって、次の重要な性質が成立する。

$$(P-6) \quad P[u_j^{(1)} - u_j^{(2)}] = 0 \quad (j=1, 2, \dots, r) \quad (48)$$

なる入力信号 $\mathbf{u}^{(1)}(t), \mathbf{u}^{(2)}(t)$ に対応する出力信号 $\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t)$ の間には、

$$P[x_i^{(1)} - x_i^{(2)}] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (49)$$

なる関係が成立する。

これは、定常成分の等しい相異なる入力信号に対応する出力信号の定常成分は等しいという事実に他ならず、注意すべき性質の 1 つである。

4. 結 言

前節までの解析により、写像 J に完全連続性を要求しないで出力信号の存在、有界性に関する十分条件、ならびにその評価関数が具体的に得られ、とくに $C < 1$ なる条件においては、システムは、

1. 全エネルギー有限な入力信号
→ 全エネルギー有限な出力信号
2. 平均電力有限な入力信号
→ 平均電力有限な出力信号

の意味において安定なことが示された。

そして, L_2 -信号空間において $C < 1$ なる条件が満足されなくとも, 拡張された信号空間 $L_2^{(\sigma)}$ を導入してパラメータ σ の値を適当に定めることにより $C^{(\sigma)} < 1$ を満足せしめ, 縮小写像の原理を適用ならしめたことが本論文の解析手法の特色である. その結果, 全エネルギーが有限でない信号に関する解析さえも可能となり, 出力信号の発散の度合をも, 同様な条件の下で具体的に示すことができた.

参考文献

- 1) V. E. Beneš : A nonlinear integral equation from the theory of servomechanism, B. S. T. J., XL, 3, 1309/1321 (1961)
- 2) K. Horiuchi: Nonlinear feedback couplings of control systems, Memoirs of the School of Science & Engineering, Waseda Univ., 29, 11/27 (1965)
- 3) K. Horiuchi : Multi-variable control systems with nonlinear forward and feedback couplings, *ibid.*, 30, 113/128 (1966)
- 4) K. Horiuchi : Exponential boundedness of nonlinear control systems, *ibid.*, 31, 107/117 (1967)
- 5) V. E. Beneš : A nonlinear integral equation in the Marcinkiewicz space $\mathfrak{M}_2$, Jour. of Mathematics and Physics, XLIV, 3, 24/35 (1965)
- 6) J. Kudrewicz : Energetic stability of nonlinear system, IFAC Proceedings of the 3rd congress, I, Paper 12. F. (1966)
- 7) 小野・堀内 : 非線形 Volterra 形積分方程式で表わされるシステムの解析 (I), 電子通信学会回路とシステム理論研究会資料 (CT 69-7)