モデルのステップ応答に最適に追従する線形制御系†

須 賀 一 郎

東京工業大学大学院 東京都目黒区大岡山 2-12-1

(昭和 44 年 10 月 9 日 受付)

Linear Control System Optimally Following Model Step Response

Ichiro SUGA

(Graduate School, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo)

(Received October 9, 1969)

Designing method of linear control systems by means of the theory of optimal regulator problem with a quadratic performance index has many advantages compared with conventional design methods. For example, under reasonable restrictions this method always assures a stable control system by straightforward computations.

However, if some characteristics (overshoot, settling time, etc.) of the system to be constructed are previously required, there are no general rules to reflect these requirements on the parameters of the quadratic performance index.

One shortcoming of the regulator problem is that signals from outside are only considered as impulsive disturbances added to each integrator, since reference or command is not assumed to exist in the regulator problem. This is not convenient to design servosystem.

This paper discusses an extended regulator problem effectively applicable to the case where design requirements are given and a stepwise reference exists in addition to the impulsive disturbances. In this problem there are introduced a model fulfilling the required characteristics and a modified quadratic performance index containing the value of control function necessary to keep the plant at a steady-state.

The optimal system constructed by this method consists of the both of a feedback controller and a feedforward controller, and its step response can satisfactorily be kept close to that of the model without offset.

An illustrative example is also presented.

1. ま え が き

線形定常系の“regulator”問題は、任意の初期値を与えられた線形定常プラントに対して、状態と操作量の2次形式を被積分関数とする評価関数を最小にする問題として定式化され、解もよく知られており、最適軌道は状態空間中の原点（定常状態）におちつく。

ところで、各状態に初期値を与えることは制御開始時刻にインパルス関数を加えることと等価であるから、regulator 問題とは、ある時刻にインパルス状外乱の加わったプラントの状態を最適に定常状態に移行させる制御問題であるといえよう。

regulator 系のブロック線図を Fig. 1 に示す。図

$$(\text{performance index} : \int_0^{\infty} (x'Qx + u'Ru)dt, Q \geq 0, R > 0)$$

Fig. 1 Regulator system

から明らかなように、構成系あるいは制御系は、いわゆる“線形（自動）制御系”となる。

このように、regulator 問題として線形制御系を構

† 第 8 回計測自動制御学会学術講演会で発表（昭 44・8）

成することは、従来の方法（周波数応答法、根軌跡法など）にくらべて、試行錯誤の手間の少ない点、多入力プラントも同様に扱える点、つねに安定性を保証している点など有利な点があるが、構成系にあらかじめ希望した特性（たとえば行き過ぎ量、整定時間）などを持たせたい場合には、いかに Q, R を選べよいか、という問題が生ずる。この問題に対して、 Q, R の値と構成系の種々の特性との間の量的、あるいは定性的関係を求める立場があるが、その中には、 Q の R に対するおもみを増していくとき、構成系の極がいかに配置するかについて述べたもの^{1), 2)}、具体的なプラントをとりあげ、 Q の数値と構成系の整定時間などの特性との量的関係を実験的に考察したもの^{3), 4)}、などがある。いっぽう、Tyler⁵⁾ は、与えられた諸特性仕様を満たしたモデルを想定し、モデルとプラント出力の差の 2 次形式を評価関数中に採用して、構成系の特性をモデルの特性にできるだけ近づけようとする model-in-the-system 法を提案した。しかしながら、この方法ではモデルが自励系の微分方程式で表わされているため、目標値 (references) の導入にあいまいさが残る。このような行き方とは別に、構成系の構造の一部を指定してしまい、パラメータ最適化問題として考える接近法がある⁶⁾が、プラントが高次系の場合 regulator 問題の解法にくらべて計算は容易ではない。

Fig. 1 に示されるように、regulator 系においては、外部から系にはいる信号はインパルス関数だけである（図中、点線で示すように、ゼロ以外の目標値を差し引き点を通して操作量の一部とすることは、工学的な妥当性はあっても regulator 問題の結果としては根拠がない。3. においてその最適制御論の根拠を述べる）。それでは、プラント出力の追従すべき目標関数（目標値）が外部から系に加えられるときはいかにすべきか、という第 2 の問題が生ずる。この問題に関しては、よく知られた“tracking 問題⁷⁾、およびそれを改変した方法⁸⁾が任意の関数を目標関数として選べる点ですぐれているが、構成された制御系は on-line の計算機構を必要とし、いわゆる線形制御系ではなくなる。これに対して、目標関数を自励系の微分（差分）方程式の解として表わされるクラス（たとえば、ステップ関数、正弦波関数など）だけに制限し、さらに通常の regulator 問題を修正して適用することによって線形制御系が構成されるが、このことは Kalman と Koepcke⁹⁾ によりサンプル値系の設計のために利用され、連続系に対しては Kreindler¹⁰⁾ によって解析された。この方法によれば、目標関数は command generator と呼ばれるフィルタを通り、さらに差し引き点

を通して操作量の一部となるが、厳密にいうと command generator はほとんどの場合物理的実現性を持たないという欠点がある。

本稿では、以上ふたつの問題に関連したつぎのような要求にしたがって制御系を構成する。

「あらかじめ要求される特性を満たしたモデルを想定しておき、目標関数としてステップ関数を加えた場合のプラント出力が、モデルのステップ応答（以下、理想ステップ応答と呼ぶ）にオフセットなしでできるだけ一致するように、制御系を構成せよ」

両者の応答が満足できる程度で一致すれば、構成系はモデルの持つ特性、すなわち仕様を満たしているはずである。この点で Tyler⁵⁾ の方法と共通するところがあるが、本報告の場合は、さらにステップ状目標関数が系に加わることをはっきりと前提している。したがって、外部からの信号としてインパルス状外乱以外に目標関数を考えている点で通常の regulator 問題より一般的である。もちろん、第 2 の問題に関連して紹介した論文にくらべて、目標関数をステップ関数に限った点で本方法はより特殊であるが、こうすることによってつねに物理的実現可能な線形制御系が構成される。また、Kreindler¹⁰⁾ の方法に見られるようなオフセットも表われてこない。あらかじめ要求する特性仕様としては、インディシャル応答に関する評価基準がよく用いられることも、ステップ状目標関数を選んだ理由である。

以下の節で、上記要求に match した 2 次形式評価関数を導入して、これに対する最適解およびその解法手順、適用例について述べる。

2. 問題の定式

プラント (S) は次式で表わされるものとする。

$$(S) \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad y = c'x$$

ただし、 $x: n$ 次元状態ベクトル、 $u: \text{スカラー操作量}$ 、 $y: \text{スカラー出力}$ 、 $A: n \times n$ 行列、 $b, c: n$ 次元ベクトル。

なお、伝達関数は次式で表わされる。

$$G_p(s) = c'(sI - A)^{-1}b$$

この (S) に関してつぎの仮定をおく。

(A-1) (S) は完全可制御、完全可観測である。

(A-2) (S) は微分性ではない。

モデル (M) を次式のように設定する。

$$(M) \quad \dot{p} = Fp + gr, \quad q = h'p + \beta r$$

ただし、 $p: m$ 次元モデル状態ベクトル、 $r: \text{スカラーモデル入力}$ 、 $q: \text{スカラーモデル出力}$ 、 $\beta: \text{スカラー}$ さらに、 F, g, h はつぎのような canonical form で表

わされているものとする。

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -f_1 & -f_2 & \cdots & & -f_m \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$$

とくに, $r = \sigma \mathbf{1}$ (1: 単位ステップ関数) のときの出力, すなわち理想ステップ応答を $q_o(t)$ と書く。

このモデルの伝達関数は次式となる。

$$G_m(s) = \frac{h_m s^{m-1} + \cdots + h_1}{s^m + f_m s^{m-1} + \cdots + f_1} + \beta$$

したがって, 分子の次数が m 以下であるかぎり任意の伝達関数をモデルとして採用できる。

(M) に関してつぎの仮定をおく。

(A-3) (M) は定位性である。

つづいて, つぎの評価関数を導入する。

$$J = \int_0^\infty \{ (y(t) - q_o(t))^2 + \rho (u(t) - \bar{u})^2 \} dt$$

ただし, $\rho (>0)$: 操作量の損失についての重み。

1. で述べた要求にしたがうためには, 定常状態においてプラント出力 $y(t)$ をある値 ($\lim_{t \rightarrow \infty} q_o(t)$) に留めておかねばならない。そのためには一般的にいって, ある大きさの定常操作量を加えておくことが必要である。この定常分を $\bar{u}$ で表わすと, 評価関数中に含まれる操作量の損失項は, 通常採用される u^2 よりも $(u - \bar{u})^2$ のほうが自然であろう。ここで $\bar{u}$ の値は, (S), および $r = \sigma \mathbf{1}$ のときの (M) の定常状態の方程式, ならびに $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} q_o(t)$ の式, すなわち,

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A\bar{x} + b\bar{u} \\ 0 &= F\bar{p} + g\sigma \\ c'\bar{x} &= h'\bar{p} + \beta\sigma \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

を満たすことが必要である。ここで, $\bar{x}, \bar{p}$ は x, p の定常値を表わす。

$\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}$ は最適解算出のための重要なパラメータとなる。したがって, これらの存在性に関するつぎの定理をあげておく。

【定理 1】 線形代数方程式,

$$\begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & A & b \\ -h' & c' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{x} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \quad (2)$$

は唯一解を持つ (証明は付録 1 参照)

これら唯一解を $\hat{p}, \hat{x}, \hat{u}$ とおくと, (2) 式中の行列の構造から明らかなように (1) 式を満たす $\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}$ は, つぎの関係式によって唯一に考えられる。

$$\bar{p} = \sigma \hat{p}, \quad \bar{x} = \sigma \hat{x}, \quad \bar{u} = \sigma \hat{u} \quad (3)$$

なお, 容易に想像できるように, プラントが無定位性 ($\det A = 0$) のときは $\hat{u} = 0$ となる。

3. 最適解および制御系の構成

前章で設定された最適制御問題をまとめるとつぎのようになる。

$$(P-1) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, & y = c'x, & x(0) = x_0 & (4) \\ \dot{p} = Fp + g\sigma \mathbf{1}, & q_o = h'p + \beta\sigma \mathbf{1}, & p(0) = 0 & (5) \\ J = \int_0^\infty \{ (y - q_o)^2 + \rho (u - \bar{u})^2 \} dt, & \rho > 0 & (6) \end{cases}$$

すなわち, (4) 式のプラントに対して評価関数 (6) 式を最小にする最適操作量 u^* を決定したい。ただし, 評価関数中の $\bar{u}$ は前節 (2), (3) 式で決定される定数であり, $q_o(t)$ は (5) 式の系の出力である。なお, (4) 式でプラントの初期状態を任意の値 x_0 とおいたことは, 時刻 $t=0$ でプラントに任意の強さのインパルス状外乱の加わる可能性を考慮していることを表わす。

この問題に対してつぎのことがいえる。

【定理 2】 (i) 行列微分方程式系,

$$\begin{aligned} -\dot{P}_1 &= cc' + A'P_1 + P_1A - \rho^{-1}P_1bb'P_1, \\ P_1 &= P_1', \quad P_1(0) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} -\dot{P}_2 &= hc' + F'P_2 + P_2A - \rho^{-1}P_2bb'P_1, \quad P_2(0) = 0 \\ & \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\dot{P}_3 &= hh' + F'P_3 + P_3F - \rho^{-1}P_2bb'P_2', \\ P_3 &= P_3', \quad P_3(0) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

は, $t \rightarrow -\infty$ において唯一の定常解 $\bar{P}_1 (n \times n \text{ 行列}), \bar{P}_2 (m \times n \text{ 行列}), \bar{P}_3 (m \times m \text{ 行列})$ を持つ。

(ii) 問題 (P-1) の最適操作量は次式となる。

$$u^* = (\hat{u} + k_1'\hat{x} - k_2'\hat{p})\sigma \mathbf{1} + k_2'p - k_1'x \quad (10)$$

ここで, $k_1 \triangleq \rho^{-1}\bar{P}_1b$, $k_2 \triangleq \rho^{-1}\bar{P}_2b_2$, $\hat{p}, \hat{x}, \hat{u}$ は (2) 式で与えられる。また, このときの J の値は,

$$J = \sigma^2 \left\{ \left(\hat{x} - \frac{x_0}{\sigma} \right)' \bar{P}_1 \left(\hat{x} - \frac{x_0}{\sigma} \right) - 2 \left(\hat{x} - \frac{x_0}{\sigma} \right)' \bar{P}_2' \hat{p} + \hat{p}' \bar{P}_3 \hat{p} \right\} \quad (11)$$

となる。

(iii) このときのプラント出力を $y^*(t)$ とすると, 任意の σ に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} y^*(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} q_o(t)$

(iv) (7)~(9) 式の左辺をゼロとおくと, 行列代数方程式系 (7)'~(9)' 式が構成される。

$$0 = cc' + A'P_1 + P_1A - \rho^{-1}P_1bb'P_1, \quad P_1 = P_1' \quad (7)'$$

$$0 = hc' + F'P_2 + P_2A - \rho^{-1}P_2bb'P_1 \quad (8)'$$

$$0 = hh' + F'P_3 + P_3F - \rho^{-1}P_2bb'P_2, \quad P_2 = P_2' \quad (9)'$$

これに,

$$P_1 > 0 \quad (P_1: \text{正定}) \quad (12)$$

なる要求を付加すると, $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ は (7)'~(9)' 式および条件 (12) が与える唯一解である (証明 付録 2 参照)。

最適解のために必要な $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ は (iv) で述べた代数方程式の解としても与えられるが、プラントが高次の場合には、(7), (8) 式の微分方程式の解として計算するほうが計算機むきである。

また、(iii) で示されるように、目標関数 r がステップ関数であるかぎり、プラントの定位性、無定位性にかかわらず、制御系の出力 $y^*(t)$ は理想ステップ応答 $q_0(t)$ にオフセットなしで漸近する。すなわち、目標値に関して 1 形の制御系が構成される。

以上で得られた諸結果を用いて、プラント (P) が与えられたときの本制御系の構成あるいは設計手順を述べる。

Step 1 希望特性仕様を加味してモデル (M) を想定し、 F, h を定める。

Step 2 (2) 式を解いて $\hat{p}, \hat{z}, \hat{u}$ を求める。

Step 3 適当な ρ を選ぶ。

Step 4 (7), (8) 式の定常解 $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ を求める。

Step 5 以上で求めた数値を (10) 式に代入して最適操作量 u^* を得る。

Step 6 構成された制御系をシミュレーションして、必要なら ρ あるいはモデルを選びなおし、Step 4 以下をくり返す。

一般的にいって、 ρ の値を小さくすれば $y^*(t)$ は $q_0(t)$ により近づくが、過渡状態における操作量の絶対値は増す。したがって、Step 6 でシミュレーションの結果、過大操作量による飽和のおそれのあるときは ρ を増せばよい。また、 ρ を適当に小さく選んでも、工学的な意味で満足できる程度の一致が $y^*(t)$ と $q_0(t)$ の間に認められない場合は、モデルがプラントにとって不適当なのであり、希望特性仕様を手おししてモデルを再選定する必要がある。いずれにしても ρ あるいはモデルの選定は、取り扱う個々の問題に応じて議論されるべき性質のものであり、試行錯誤的な手法は避けられないであろう。

このようにして構成された最適制御系は、目標値 ($r=\sigma 1$) に対する prefilter (feedforward) 部と、プラントの状態 (x) に対する feedback 部から成る (Fig. 2)。

ここで、とくにモデルとして伝達関数が β (実数) で表わされるときを考えてみる。すなわち $q_0(t)=\beta \cdot \sigma 1$ 。このときは、モデルの状態変数 p 、および $\bar{p}$ (あるいは $\hat{p}$) はすべて考える必要がないから、

定理 1 中の (2) 式は、

$$\begin{bmatrix} A & b \\ c' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} \quad (2)'$$

Fig. 2 Construction of optimal control system

となり (この方程式の唯一解の存在性は付録 1 で保証されている)、定理 2 中の最適操作量は、

$$u^* = (\hat{u} + k_1' \hat{x}) \sigma 1 - k_1' x \quad (10)'$$

となる。すなわち、構成系の prefilter 部はゲインだけの伝達要素となる。さらに、プラントが正のゲイン定数を持った無定位性のときは、 $\hat{u}=0$ かつ $k_1' \hat{x} = \beta / \sqrt{\rho}$ となることが示され得る。したがって、この場合に対応する構成系が (点線を生かした) Fig. 1 である。

4. 例

次式で表わされる 5 次系プラントを考える。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 2 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = 0$$

$$y = [1, 0, 0, 0, 0] x$$

$$G_p(s) = \frac{75(s+4)}{s(s+0.1)(s^2+10s+30)(s+10)}$$

モデルとしてつぎの 2 次系を想定する。

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r, \quad q = [\omega_n^2, 0] p$$

$$G_m(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

とくに、 $\omega_n=1.0$, $\zeta=0.707$, $\rho=0.01$ と選んだとき、前章の計算手順によって構成された制御系を Fig. 3 に示す。

つぎに、 $\omega_n=0.1, 1.0, 10$, $\zeta=0.707$, $\rho=0.01$, 1.0 とそれぞれ選んだときに、モデルのインディシャル応答 $q_1(t)$ ($\sigma=1$) と制御系のそれとの違いの評価量 $\int_0^\infty (y^*-q_1)^2 dt$ の値、およびそれぞれの場合の最適操作量の最大絶対値を Table 1 に示す。

表からわかるように、 $\omega_n=0.1$ と選んだときは ρ の値によらず $y^*(t)$ と $q_1(t)$ の差は非常に小さい。いっぽう、 $\omega_n=1.0$ の場合 ($\omega_n=0.1$ のモデルより 10 倍速い応答時間を持つモデルを採用したことを意味する) には、 $\rho=0.01$ のときの $y^*(t)$ と $q_1(t)$ は満足できる程度で一致するが、 $\rho=1.0$ のときはもはや y^*

Fig. 3 Example of optimal control system

 Table 1 Values of $\int_0^\infty (y^* - q_1)^2 dt$

ζ=0.707		ω _n		
		0.1	1.0	10
ρ	0.01	0.735 × 10 ⁻⁷ (0.008 8)	* 1) 0.827 × 10 ⁻³ (1.413)	0.337 (7.99)
	1.0	0.167 × 10 ⁻⁵ (0.008 7)	* 2) 0.847 × 10 ⁻¹ (0.367)	1.067 (0.936)

Indicial responses in the cases * 1), * 2) are shown in Figure 4

Numbers in parentheses indicate the maximal values of $|u^*(t)|$

(t) は $q_1(t)$ に追いつけなくなる。この様子を Fig. 4 に示す。

さらに応答時間の 10 倍速いモデルを採用したとき、すなわち $\omega_n=10$ のときは、もはや $\rho=0.01$ の場合でも $y^*(t)$ と $q_1(t)$ の差は大きい。そこでもし必要なら、より小さい ρ を採用して両者を近づけることができるが、Table 1 の () 内の数値から類推されるように、 $u^*(t)$ の最大絶対値が線形許容範囲を越えるおそれがあるのである。したがって、 $\omega_n=10$ のモデルは、この例のプラントによって少々理想的すぎるモデルであるともいえる。

1. で述べたように、本方法では目標関数 (r) としてステップ関数だけを考えているが、これ以外の関数を選んだときモデルと構成系の応答がどの程度一致するかを調べることも必要であろう。このための一般的理論は非常に困難であるが、ひとつの目安として両者の周波数応答を計算して比較することにする。

$\rho=0.01$ に固定し、 $\omega_n=0.1, 1.0, 10$ の場合について、横軸を ω_n で基準化した両者の振幅特性を Fig. 5 に示す。図に見られるように、 $\omega_n=10$ の場合は両者の違いは歴然としているが、他のふたつの場合は $0 < \omega < 4 \omega_n$ の範囲において、± 3 dB の誤差内で一致する。

Fig. 4 Indicial responses of optimal control system

Fig. 5 Gain characteristics of optimal control system

5. あとがき

いわゆる線形（自動）制御系の設計のために regulator 問題の解法を用いることは種々の点で利益があるが、同時にまた不満点もある。

本稿では、構成系に要求される特性仕様があらかじめ与えられており、かつステップ状目標関数の存在を前提としているとき、すなわち、理想とするステップ応答が与えられている場合に適用可能な、モデルおよび修正された評価関数を用いる拡張 regulator 問題を提起し、その最適解を与えた。

なお、本稿では 1 入力 1 出力プラントを取り扱ったが、多入力多出力プラントへ本系方法を拡張することは近似非干渉制御系の設計に役立つものと思われるので検討中である。

謝 辞

おわりに、終始御指導くださった東京工業大学故伊沢計介教授に感謝し、深く哀悼の意を表します。また、本稿の数値計算に関して御尽力くださった同学伊沢研究室大学院学生大村憲一氏、松尾英夫氏にお礼申し上げます。

なお、本研究に対して財団法人・服部報公会からの御援助を賜ったことを記し、深謝の意を表します。

参考文献

- 1) R.E. Kalman : When Is a Linear Control System Optimal?, Trans. ASME, Vol. 86 D, 51/86 (1964)

- 2) J. S. Tyler and F. B. Tuteur : The Use of a Quadratic Performance Index to Design Multivariable Control Systems, IEEE Trans., Vol. AC 11, 84/92 (1966)
- 3) 中川ほか：垂直離着陸航空機の最適姿勢制御における評価関数の重み係数選択に関する一考察，制御工学，10-12, 518/525 (1966)
- 4) 竹田ほか：二次形式評価関数の重みマトリクスと制御成績，計測自動制御学会第 7 回学術講演会予稿集，25/28 (1968)
- 5) J. S. Tyler, Jr. : The Characteristics of Model-Following Systems as Synthesized by Optimal Control, IEEE Trans., Vol. AC 9, 485/498 (1964)
- 6) 市川：構成系の性質の一部を指定した最適問題，計測と制御，8-6, 374/377 (1969)
- 7) M. Athans and P. L. Falb : Optimal Control, 9-9, McGraw-Hill (1966)
- 8) 早勢・市川：目標値の未来値を最適に利用する追値制御，計測自動制御学会論文集，5-1, 86/94 (1969)
- 9) R. E. Kalman and R. W. Koepcke : Optimal Synthesis of Linear Sampling Control Systems Using Generalized Performance Indexes, Trans. ASME, Vol. 80 D, 1820/1826 (1958)
- 10) E. Kreindler : On the Linear Optimal Servo Problem, Int. J. Control, 9-4, 465/472 (1969)
- 11) R. E. Kalman : Contributions to the Theory of Optimal Control, Bol. soc. Mat. Mexico, 102/119 (1960)
- 12) R. Bellman : Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill (1960)

□ 付 録 1 □

(2) 式の左辺の行列を Π とおくと，

$$\det \Pi = \det F \cdot \det \Sigma, \quad \text{ここで } \Sigma = \begin{bmatrix} A & b \\ c' & 0 \end{bmatrix}$$

仮定 (A-3) から $\det F \neq 0$. よって，もし $\det \Sigma \neq 0$ なら $\det \Pi \neq 0$ となり証明がおわる．まず，

$$\Sigma = -\lim_{s \rightarrow 0} (sI - \Sigma)$$

行列式の算出演算は乗法と加法だけだから $\lim_{s \rightarrow 0}$ と $\det$ は交換可能．そこで，

$$\det \Sigma = (-1)^{n+1} \det \lim_{s \rightarrow 0} (sI - \Sigma)$$

$$= (-1)^{n+1} \lim_{s \rightarrow 0} \det (sI - \Sigma)$$

ここで， $G_p(s)$ の特性方程式，すなわち $\det (sI - A)$ を $\phi(s)$ とおくと，よく知られた行列式の公式から，

$$= (-1)^{n+1} \lim_{s \rightarrow 0} [\det (sI - A) \cdot \{s - c' (sI - A)^{-1} b\}]$$

$$= (-1)^{n+1} \lim_{s \rightarrow 0} [\phi(s) \cdot \{s - G_p(s)\}]$$

$$= (-1)^n \lim_{s \rightarrow 0} \phi(s) \cdot G_p(s)$$

$\lim_{s \rightarrow 0} \phi(s) \cdot G_p(s)$ は $G_p(s)$ の分子の定数項を表わすが，

仮定 (A-2) から，これはゼロではない．ゆえに， $\det \Sigma \neq 0$.

□ 付 録 2 □

最初に，問題 (P-1) と等価な問題 (P-2) を導入する．変換，

$$\begin{aligned} z &\triangleq \begin{bmatrix} \bar{x} - x \\ \bar{p} - p \end{bmatrix}, & v &\triangleq \bar{u} - u, & \Gamma &\triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}, \\ \Phi &\triangleq \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}, & \Psi &\triangleq \begin{bmatrix} c \\ -h \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{付 1})$$

によって問題 (P-1) はつぎのように書きなおされる．

$$(P-2) \quad \begin{cases} \dot{z} = \Gamma z + \Phi v, & z(0) = z_0 \triangleq \begin{bmatrix} \bar{x} - x_0 \\ \bar{p} \end{bmatrix} \\ J = \int_0^\infty (z' \Psi \Psi' z + \rho v^2) dt & \rho > 0 \end{cases}$$

Kalman¹¹⁾ (定理 6.4, 6.7), および Riccati 形行列微分方程式，

$$-\dot{P} = \Psi \Psi' + \Gamma' P + P \Gamma - \rho^{-1} P \Phi \Phi' P, \quad P = P',$$

$$P(0) = 0 \quad (\text{付 2})$$

が定係数系であることから，問題 (P-2) に関するつぎのことが成立する．

【補題 1 (Kalman)】 「もし，(付 2) 式の $t \rightarrow -\infty$ における定常解 $\bar{P}$ が存在すれば，問題 (P-2) の最適操作量 v^* は，

$$v^* = -\rho^{-1} (\bar{P} \Phi)' z$$

で与えられ，このときの J の値は $z_0' \bar{P} z_0$ となる」．pair (Γ, Φ) が完全可制御なら $\bar{P}$ の存在することが証明できる (Kalman¹¹⁾ 定理 6.6) が，変換 (付 1) でわかるように完全可制御ではない．そこで，(付 2) 式の解 $P(t)$ を，

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_1(t), & -P_2'(t) \\ -P_2(t), & P_3(t) \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} P_1 = P_1'; n \times n \text{ 行列} \\ P_2; m \times n \text{ 行列} \\ P_3 = P_3'; m \times m \text{ 行列} \end{array} \right)$$

と分解して， $P_1(t), P_2(t), P_3(t)$ の $t \rightarrow -\infty$ における極限を調べる．

(i) 上記分解によって (付 2) 式は本文中の連立微分方程式系 (7), (8), (9) 式となる．(7) 式は問題 (P-1) において $\sigma = 0$ (したがって $\bar{p} = 0, \bar{x}$

$=0, \bar{u}=0$ ）として構成される通常の regulator 問題に対応するよく知られた Riccati 形行列微分方程式であり、仮定 (A-1) のもとに Kalman¹⁾ (定理 2) より $\bar{P}_1 = \lim_{t \rightarrow -\infty} P_1(t)$ が唯一に存在し、しかも $\bar{A} \triangleq A - \rho^{-1}bb'\bar{P}_1$ は安定である。

つぎに、(8) 式に関連する Kreindler¹⁰⁾ の結果を多少書き改めて導入する。

【補題 2 (Kreindler)】 「 $\bar{A}, F$ の固有値をそれぞれ λ_i, ν_j とする。もし、

$$\operatorname{Re}(\lambda_i + \nu_j) < 0, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, m$$

なら、 $\bar{P}_2 = \lim_{t \rightarrow -\infty} P_2(t)$ が唯一に存在する」。

$\bar{A}$ は上述したように安定であり、仮定 (A-3) より F も安定。よって補題 2 より $\bar{P}_2$ が存在する。

(9) 式の解は次式で与えられる。

$$P_3(t) = \int_0^t e^{-F'(t-\tau)} \{ \rho^{-1} P_2(\tau) bb' P_2'(\tau) - hh' \} \times e^{-F'(t-\tau)} d\tau$$

補題 2 より $P_2(t)$ は $t \rightarrow -\infty$ で有界であり、 F は安定である。よって $\bar{P}_3 = \lim_{t \rightarrow -\infty} P_3(t)$ が存在する。

以上によって、(7)~(9) 式の定常解、あるいは(付 2) 式の定常解、

$$\bar{P} = \lim_{t \rightarrow -\infty} P(t) = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & -\bar{P}_2' \\ -\bar{P}_2 & \bar{P}_3 \end{bmatrix}$$

の存在性が保証された。

(ii) $\bar{P}$ が存在するので、補題 1 より問題 (P-2) の最適解が決定され、したがって同時に、問題 (P-1) の最適解が決定される。すなわち、

$$u^* = (\bar{u} + k_1' \bar{x} - k_2' \bar{p}) + k_2' p - k_1' x$$

であり、このときの J の値は、

$$J = (\bar{x} - x_0)' \bar{P}_1 (\bar{x} - x_0) - 2(\bar{x} - x_0)' \bar{P}_2' \bar{p} + \bar{p}' \bar{P}_3 \bar{p}$$

となる。さらに、関係式 (3) より、 $0 < t$ において、

$$\bar{p} = \hat{p} \cdot \sigma \mathbf{1}, \quad \bar{x} = \hat{x} \cdot \sigma \mathbf{1}, \quad \bar{u} = \hat{u} \cdot \sigma \mathbf{1}$$

であるから、けっきょく、(10), (11) 式を得る。

(iii) 最適操作量 u^* を用いたときの制御系の方程式は、(1) 式に注意して、 $\xi \triangleq \bar{x} - x, \eta \triangleq \bar{p} - p$ なる変数変換を行なうと、

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \bar{A}\xi + bk_2'\eta & \xi(0) = \bar{x} - x_0 \\ \dot{\eta} = F\eta & \eta(0) = \bar{p} \end{cases}$$

で表わされる。 $F, \bar{A}$ は安定であるから、 $\eta(t) = \bar{p} - p(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$)、かつ $\xi(t) = \bar{x} - x(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) であり、さらに (1) 式中の最後の関係式から、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y^*(t) = c\bar{x} = h'\bar{p} + \beta\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} q_\sigma(t)$$

(iv) $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ は (7)~(9) 式の定常解であるから、それぞれ行列代数方程式系 (7)'~(9)' 式の解のうちのひとつである。したがって、条件 (12) を付加したときに、これらが唯一解しか持ち得ないことを証明すればよい。

まず、(7)' 式は仮定 (A-1) のもとで対称な正定解をただひとつ持つ (Kalman¹⁾ 補題 1)。よって、(7)' 式と条件 (12) は唯一解 ($\bar{P}_1$) を与える。これを (8)' 式に代入すると線形行列代数方程式、

$$F'P_2 + P_2\bar{A} = -hc' \quad (\text{付 3})$$

を得る。 $F, \bar{A}$ はともに安定であるから両者の任意の固有値の和はゼロにならない。よって Bellman¹²⁾ (12 章, 定理 4) から (付 3) 式は唯一解 ($\bar{P}_2$) を与える。この $\bar{P}_2$ を (9)' 式に代入すると線形行列代数方程式、

$$F'P_3 + P_3F = \rho^{-1}\bar{P}_2bb'\bar{P}_2' - hh', \quad P_3 = P_3'$$

を得る。 F が安定であることから、前記と同様の議論によって、唯一解 ($\bar{P}_3$) をもつことが容易に示される。