ステップ式最急傾斜法による分布定数系 最適問題の直接解法

金 井 喜 美 雄

防衛大学校航空工学教室 横須賀市走水 1-10-20

(昭和 44 年 9 月 13 日 受付)

Direct Method of the Optimal Control Problem of Distributed Parameter Systems Due to Stepwise Steepest Descent Method

Kimio KANAI

(Dept. of Aeronautical Engineering, The Defense Academy, Yokosuka)

(Received September 13, 1969)

There are two kinds of algorithms for deriving the time-optimal control function. One is the indirect method which employs the necessary condition of optimal control such as the Pontryagin's maximum principle. The other is the direct method which does not employ such a necessary condition in solving the problem.

In this paper, an optimal control problem of metal heating process is solved numerically applying the Stepwise Steepest Descent Method, in which the proper value of stepsize is derived analytically by the minimizing performance criterion at each step.

In this method, the performance criterion value converges in about ten iterations. The convergence is compared with that in the Continuous Steepest Descent Method.

Although various methods have been proposed for optimizing distributed parameter systems, the authors proved that the Pontryagin's maximum principle is directly applicable in such optimization problems by introducing infinite-dimensional state variable equations. However, the convergence in the authors' previous method was not well established mathematically. As the present direct method determine the optimal control function without using the maximum principle, and moreover this numerical result agrees with the numerical solutions of the two point boundary value problem introducing infinite-dimensional equations, we may conclude that this indirect method produces results with acceptable engineering accuracy.

1. ま え が き

さきに、分布定数系の最適制御問題に無限次元状態方程式を導入し、ポントリアギンの最大原理を適用して最適条件を求めると 2 点境界値問題は第 2 種フレドホルム形積分方程式に帰着することを導き、フレドホルム形積分方程式解法のアロリズムを決定して具体的に数値計算によって最適制御関数を求めた¹⁾。また、最適制御法則を決定するという立場からリカッチ解に依存した閉ループ系の構成を解析し²⁾、計算機を使用するリカッチ形偏微分方程式の近似解法を示し、数値計算を実行して近似最適制御系の構成、評価関数の

収束を検討した³⁾。

本論文では以前にとりあげた時定数のある加熱炉で金属片を加熱するという最適問題をステップ式最急傾斜法によって最適条件を直接求めるときのアロリズムについて考察する。このとき、各ステップの評価関数値が最小になるような最適な歩みのとり方をシステムのウェイト関数を用いて解析的に与え得ることを示し、そしてアロリズムを確立する。この手法を具体的な数値計算に適用して最適制御関数を決定する。この結果を歩み係数が一定である連続式手法と比較し、さらに、最大原理の必要条件を適用して得られる間接法の結果とも比較して両手法の合理性を検討する。

2. 問題の記述

本論文でとりあげる問題は次のように記述されるものとする。加熱プロセスの運動方程式は、

$$\frac{dX_0(\tau)}{d\tau} = -r \cdot X_0(\tau) + u(\tau) \quad (1)$$

$$\frac{\partial X(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 X(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} &= \alpha [X(0, \tau) - X_0(\tau)] \\ \frac{\partial X(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

で与えられる¹⁾。ここで、 X_0 は加熱炉の雰囲気温度をあらわし、 $X(\xi, \tau)$ は金属片の温度、 $u(\tau)$ は燃料流量であり、 r, α はそれぞれ炉放熱率、熱伝達率をあらわす。終端条件は、

$$t_f: \text{指定}, X_0(t_f), X(\xi, t_f): \text{自由} \quad (4)$$

とする。また、評価関数は次のようにとる。

$$J = \frac{f}{2} \int_0^1 [X^*(\xi) - X(\xi, t_f)]^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2(\tau) d\tau \quad (5)$$

ここでは制御関数 (control sequence) を求めることが問題とされるから初期条件が指定されなければならない。初期条件は次のようにおくことにする。

$$X_0(0) = 0, X(\xi, 0) = 0 \quad (6)$$

したがって、本論文の問題の記述は評価関数 (5) 式を最小にするような最適制御関数 $u(\tau)$ を決定する問題であるといえる。

3. 加熱プロセスのウエイテング関数

最適問題のアルゴリズムを決定するために、まず、システムのウエイテング関数を求める必要がある。初期条件 (6) 式を考慮して (2) 式をラプラス変換すると、

$$\frac{\partial^2 Z(\xi, s)}{\partial \xi^2} = s \cdot Z(\xi, s) \quad (7)$$

となる。ここで、 s はラプラス演算子をあらわし、 Z は $Z(\xi, s) = \mathcal{L}[X(\xi, t)]$ を意味している。

(1) 式および境界条件 (3) 式をラプラス変換すると、

$$(s+r)Z_0(s) = U(s) \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z(\xi, s)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} &= \alpha [Z(0, s) - Z_0(s)] \\ \frac{\partial Z(\xi, s)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(7) 式を ξ について解くと一般解は次のようにかける。

$$Z(\xi, s) = c_1(s) \cdot e^{\sqrt{s}\xi} + c_2(s) \cdot e^{-\sqrt{s}\xi} \quad (10)$$

これから、

$$\frac{\partial Z(\xi, s)}{\partial \xi} = \sqrt{s} \cdot \{c_1(s) \cdot e^{\sqrt{s}\xi} - c_2(s) \cdot e^{-\sqrt{s}\xi}\} \quad (11)$$

となる。また、(9) 式の第 1 式に (8) 式の Z_0 を代入すると、

$$\frac{\partial Z(\xi, s)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \alpha \cdot Z(0, s) - \frac{\alpha}{s+r} \cdot U(s) \quad (12)$$

とかきかえられる。したがって、(11) 式の関係を用いると、(9)、(12) 式から、

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{s} \{c_1(s) - c_2(s)\} &= \alpha \cdot \{c_1(s) + c_2(s)\} - \frac{\alpha}{s+r} U(s) \\ \sqrt{s} \cdot e^{\sqrt{s}} \cdot c_1(s) - \sqrt{s} \cdot e^{-\sqrt{s}} \cdot c_2(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(13) 式から、 c_1, c_2 を求めると、

$$\left. \begin{aligned} c_1(s) &= \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s} (e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}}) + \alpha (e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}})} \cdot \frac{\alpha}{s+r} \cdot U(s) \\ c_2(s) &= \frac{e^{\sqrt{s}}}{\sqrt{s} (e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}}) + \alpha (e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}})} \cdot \frac{\alpha}{s+r} \cdot U(s) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(14) 式の関係 (10) 式に代入して整とんすると、

$$Z(\xi, s) = \frac{\cosh[(1-\xi)\sqrt{s}]}{\sqrt{s} \cdot \sinh\sqrt{s} + \alpha \cosh\sqrt{s}} \cdot \frac{\alpha}{s+r} \cdot U(s) \quad (15)$$

と求まる。(15) 式は時間領域に戻す必要があるが、コンボリューション積分として求めることが可能である。

いま、(15) 式を次のようにおく。

$$Z(\xi, s) = W(\xi, s) \cdot U(s) \quad (16)$$

ここで、 $W(\xi, s)$ は次の関係になっている。

$$W(\xi, s) = \frac{\cosh[(1-\xi)\sqrt{s}]}{\sqrt{s} \sinh\sqrt{s} + \alpha \cosh\sqrt{s}} \cdot \frac{\alpha}{s+r} \quad (17)$$

つぎに、(16) 式をラプラス逆変換すると、

$$X(\xi, \tau) = \int_0^\tau W(\xi, \tau - \sigma) u(\sigma) \cdot d\sigma \quad (18)$$

となる。ここにおいてシステムは偏微分方程式で記述されているが定数係数系であるからインパルス応答は時間のインターバルのみを考慮すればよいことは明らかである。したがって、ウエイテング関数 $W(\xi, \tau - \sigma)$ が求まると制御関数 $u(\tau)$ に対する温度分布 $X(\xi, \tau)$ が決定できる。しかるに、ウエイテング関数 $W(\xi, \tau)$ を求めるには (17) 式をラプラス逆変換すればよい。 $W(\xi, s)$ の極は無限個あり、次のようになる。

$$s_0 = -r, s_i = -\beta_i^2 \quad (i=1, 2, \dots) \quad (19)$$

ただし、 β_i は、

$$\beta_i \cdot \tan \beta_i = \alpha \quad (20)$$

なる超越方程式の実根である。いま、 $W(\xi, s)$ の分母を $H(s)$ 、分子を $G(\xi, s)$ とおくと、 $W(\xi, s)$ の逆変換は次の公式を用いて求めることができる⁴⁾。

$$W(\xi, \tau) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(\xi, s)}{H(s)} \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(\xi, s_i)}{H'(s_i)} e^{s_i \tau} \quad (21)$$

すなわち、

$$W(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cos[(1-\xi)\beta_i]}{\left\{ \left(\frac{1+\alpha}{\beta_i^2} + \frac{1}{\alpha} \right) \cdot \cos \beta_i \right\} \cdot \{r - \beta_i^2\}} e^{-\beta_i^2 \tau} \\ + \frac{\alpha \cos[(1-\xi)\sqrt{r}]}{\alpha \cos \sqrt{r} - \sqrt{r} \cdot \sin \sqrt{r}} \cdot e^{-r\tau} \quad (22)$$

(22)式において β_i は(20)式の根として無限個あるが実際に数値計算をするのには最初の数項だけを考慮すれば十分である。

4. 最急傾斜法による最適制御関数を求めるアルゴリズム

最急傾斜法によるアルゴリズムは次式で与えられる⁵⁾。

$$u_{p+1}(\tau) = u_p(\tau) - K \cdot \frac{\partial J}{\partial u(\tau)} \Big|_{u(\tau)=u_p(\tau)} \quad (23)$$

ここで、 $u_p(\tau)$ は第 p 番目の近似制御関数であり、 $\partial J / \partial u(\tau)$ はこの配関数をあらわし、 K は歩みをあらわす定数である。

つぎに、 $\partial J / \partial u(\tau) |_{u(\tau)=u_p(\tau)}$ をウエイテング関数を用いて計算することを考える。

一般に、時刻 σ に単位インパルス入力に加えられたときの τ における応答 $X(\xi, \tau, \sigma)$ を $W(\xi, \tau, \sigma)$ とかく。 $W(\xi, \tau, \sigma)$ はインパルス応答であり、(18)式の関係を満たしている。すなわち、初期時刻を0とし、 $\tau = t_f$ における $X(\xi, t_f)$ を求めると、

$$X(\xi, t_f) = \int_0^{t_f} W(\xi, t_f, \sigma) u(\sigma) d\sigma \quad (24)$$

となり、この関係を(5)式に代入して J を求めると、

$$J = \frac{f}{2} \int_0^1 \left[X^*(\xi) - \int_0^{t_f} W(\xi, t_f, \sigma) u(\sigma) d\sigma \right]^2 d\xi \\ + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2(\tau) d\tau \quad (25)$$

こう配関数は次のように計算できる。 $u(\tau)$ の変分を $\delta u(\tau)$ とし、これに伴う J の1次増分を δJ とおくと、 J の1次増分は δu とあるベクトルとの内積の形であらわすことができる。このときの相手のベクトルがこう配である。すなわち、 δJ を $\delta J = \int g(\tau) \delta u(\tau) d\tau$ なる形であらわしたとき、 $g(\tau)$ がこの配関数である。これらの関係を(25)式に適用すると、

$$J + \delta J = \frac{f}{2} \int_0^1 \left[X^*(\xi) - \int_0^{t_f} W(\xi, t_f, \sigma) \{u(\sigma) + \delta u(\sigma)\} d\sigma \right]^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{u(\tau) + \delta u(\tau)\}^2 d\tau \\ = \frac{f}{2} \int_0^1 \left[X^*(\xi) - \int_0^{t_f} W(\xi, t_f, \sigma) u(\sigma) d\sigma \right]^2 d\xi - f \cdot \int_0^1 \left\{ X^*(\xi) - \int_0^{t_f} W(\xi, t_f, \sigma) u(\sigma) d\sigma \right\} \\ \times \int_0^{t_f} W(\xi, t_f, \sigma) \delta u(\sigma) \cdot d\sigma \Big] d\xi + \frac{f}{2} \left\{ \int_0^{t_f} W(\xi, t_f, \sigma) \delta u(\sigma) d\sigma \right\}^2 d\xi \\ + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2(\tau) d\tau + \int_0^{t_f} u(\tau) \cdot \delta u(\tau) \cdot d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{\delta u(\tau)\}^2 d\tau \quad (26)$$

となり、高次項を省略すると δJ は次のようになる。

$$\delta J = f \cdot \int_0^1 \left[\int_0^{t_f} \left\{ \int_0^{t_f} W(\xi, t_f, \sigma) u(\sigma) d\sigma - X^*(\xi) \right\} W(\xi, t_f, \sigma) d\xi \right] \delta u \cdot d\sigma + \int_0^{t_f} u(\tau) \delta u(\tau) d\tau \quad (27)$$

したがって、この配関数 $g(\tau) = \partial J / \partial u(\tau)$ は、

$$\frac{\partial J}{\partial u(\tau)} = f \cdot \int_0^1 \left[\int_0^{t_f} W(\xi, t_f, \sigma) u(\sigma) d\sigma - X^*(\xi) \right] W(\xi, t_f, \tau) d\xi + u(\tau) \quad (28)$$

と求まる。いま、本論文で扱っているシステムは $W(\xi, t_f, \sigma) = W(\xi, t_f - \sigma)$ なる関係を満足するから(28)式は、

$$\frac{\partial J}{\partial u(\tau)} \Big|_{u(\tau)=u_p(\tau)} = f \cdot \int_0^1 \left[\int_0^{t_f} W(\xi, t_f - \sigma) u_p(\sigma) d\sigma \right] W(\xi, t_f - \tau) d\xi - f \cdot \int_0^1 X^*(\xi) \cdot W(\xi, t_f - \tau) d\xi + u_p(\tau) \quad (29)$$

となる。(22)式の $W(\xi, \tau)$ を用いると数値計算が実行でき、制御関数を決定することができる。

いま、簡単のために $X^*(\xi) = \text{一定}$ とし、(22)式の $W(\xi, \tau)$ を用いて(29)式の積分を実行する。まず、(29)式の右辺第2項は、

$$f \cdot \int_0^1 X^*(\xi) \cdot W(\xi, t_f - \sigma) d\xi = f \cdot X^* \cdot \int_0^1 W(\xi, t_f - \sigma) d\xi \\ = f \cdot X^* \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\left(\frac{1+\alpha}{\beta_i^2} + \frac{1}{\alpha} \right) \cdot \cos \beta_i \cdot (r - \beta_i^2)} \cdot \frac{\sin \beta_i}{\beta_i} \cdot e^{-\beta_i^2(t_f - \tau)} + \frac{\alpha \cdot e^{-r(t_f - \tau)}}{\alpha \cos \sqrt{r} - \sqrt{r} \sin \sqrt{r}} \cdot \frac{\sin \sqrt{r}}{\sqrt{r}} \right\} \quad (30)$$

(29)式の右辺第1項は、

$$f \cdot \int_0^1 \left[\int_0^{t_f} W(\xi, t_f - \sigma) u_p(\sigma) d\sigma \right] W(\xi, t_f - \tau) d\xi = f \cdot \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cos[(1-\xi)\beta_i]}{\left(\frac{1+\alpha}{\beta_i^2} + \frac{1}{\alpha} \right) \cos \beta_i \cdot (r - \beta_i^2)} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^{t_f} e^{-\beta_i^2(t_f-\sigma)} u_p(\sigma) d\sigma \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cos[(1-\xi)\beta_i]}{\left(\frac{1+\alpha}{\beta_i^2} + \frac{1}{\alpha}\right) \cos \beta_i \cdot (r-\beta_i^2)} \cdot e^{-\beta_i^2(t_f-\tau)} \right] d\xi \\
& + f \cdot \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cos[(1-\xi)\beta_i]}{\left(\frac{1+\alpha}{\beta_i^2} + \frac{1}{\alpha}\right) \cos \beta_i \cdot (r-\beta_i^2)} \cdot e^{-\beta_i^2(t_f-\tau)} \right] \cdot \left[\frac{\alpha \cos[(1-\xi)\sqrt{r}]}{\alpha \cos \sqrt{r} - \sqrt{r} \sin \sqrt{r}} \cdot \int_0^1 e^{-\gamma(t_f-\sigma)} \cdot u_p(\sigma) d\sigma \right] d\xi \\
& + f \cdot \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cos[(1-\xi)\beta_i]}{\left(\frac{1+\alpha}{\beta_i^2} + \frac{1}{\alpha}\right) \cos \beta_i \cdot (\alpha - \beta_i^2)} \cdot \int_0^{t_f} e^{-\beta_i^2(t_f-\sigma)} u_p(\sigma) d\sigma \right] \left[\frac{\alpha \cos[(1-\xi)\sqrt{r}]}{\alpha \cos \sqrt{r} - \sqrt{r} \sin \sqrt{r}} \cdot e^{-\gamma(t_f-\tau)} \right] d\xi \\
& + f \cdot \int_0^1 \left[\left(\frac{\alpha \cos[(1-\xi)\sqrt{r}]}{\alpha \cos \sqrt{r} - \sqrt{r} \sin \sqrt{r}} \right)^2 \cdot \int_0^{t_f} e^{-\gamma(t_f-\sigma)} u_p(\sigma) d\sigma \cdot e^{-\gamma(t_f-\tau)} \right] d\xi \quad (31)
\end{aligned}$$

ここで、(31)式の右边を個々に積分してから結合する。けっきょく、次のようなこう配関数が決定される。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial u(\tau)} \Big|_{u(\tau)=u_p(\tau)} &= u_p(\tau) - f \cdot X^* \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \sin \beta_i \cdot e^{-\beta_i^2(t_f-\tau)}}{\left(\frac{1+\alpha}{\beta_i^2} + \frac{1}{\alpha}\right) \cos \beta_i \cdot (r-\beta_i^2) \cdot \beta_i} + \frac{\alpha \sin \sqrt{r} \cdot e^{-\gamma(t_f-\tau)}}{\sqrt{r} (\alpha \cos \sqrt{r} - \sqrt{r} \sin \sqrt{r})} \right\} \\
& + f \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{t_f} e^{-\beta_i^2(t_f-\sigma)} \cdot u_p(\sigma) d\sigma \cdot \left[\left\{ \frac{\sin(2\beta_i)}{4\beta_i} + \frac{1}{2} \right\} \left\{ \left(\frac{1+\alpha}{\beta_i^2} + \frac{1}{\alpha} \right) \cos \beta_i \cdot (r-\beta_i^2) \right\}^2 \right. \\
& + \left. \frac{\alpha \cdot e^{-\gamma(t_f-\tau)}}{\left\{ \left(\frac{1+\alpha}{\beta_i^2} + \frac{1}{\alpha} \right) \cos \beta_i \cdot (r-\beta_i^2) \right\} (\alpha \cos \sqrt{r} - \sqrt{r} \sin \sqrt{r})} \cdot \left\{ \frac{\sin(\beta_i + \sqrt{r})}{\beta_i + \sqrt{r}} + \frac{\sin(\beta_i - \sqrt{r})}{\beta_i - \sqrt{r}} \right\} \right] \\
& + f \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{2 \cdot e^{-\beta_j^2(t_f-\tau)}}{\left\{ \left(\frac{1+\alpha}{\beta_i^2} + \frac{1}{\alpha} \right) \cos \beta_i \cdot (r-\beta_i^2) \right\} \left\{ \frac{1+\alpha}{\beta_j} + \frac{1}{\alpha} \right\} \cos \beta_j \cdot (\alpha - \beta_j^2)} \cdot \left\{ \frac{\sin(\beta_i + \beta_j)}{(\beta_i + \beta_j)} + \frac{\sin(\beta_i - \beta_j)}{\beta_i - \beta_j} \right\} \\
& \times \int_0^{t_f} e^{-\beta_i^2(t_f-\sigma)} \cdot u_p(\sigma) d\sigma + f \cdot \int_0^{t_f} e^{-\gamma(t_f-\sigma)} \cdot u_p(\sigma) d\sigma \left[\frac{\alpha^2 \cdot e^{-\gamma(t_f-\tau)}}{(\alpha \cos \sqrt{r} - \sqrt{r} \sin \sqrt{r})^2} \left(\frac{\sin(2\sqrt{r})}{4\sqrt{r}} + \frac{1}{2} \right) \right. \\
& + \left. \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot e^{-\beta_i^2(t_f-\tau)}}{\left\{ \left(\frac{1+\alpha}{\beta_i^2} + \frac{1}{\alpha} \right) \cos \beta_i \cdot (r-\beta_i^2) \right\} (\alpha \cos \sqrt{r} - \sqrt{r} \sin \sqrt{r})} \cdot \left\{ \frac{\sin(\beta_i + \sqrt{r})}{\beta_i + \sqrt{r}} + \frac{\sin(\beta_i - \sqrt{r})}{\beta_i - \sqrt{r}} \right\} \right] \quad (32)
\end{aligned}$$

この関係式を(23)式に代入して第 p 番目の $u(\tau)$ を適当に与えると、歩み係数 K を試行錯誤的に与えることによってくり返し計算で近似解を求めることができる。しかし、 K の与え方によっては計算時間が非常にながくなり、収れんがしにくくなる。特に連続式最急傾斜法ではこの傾向が強くなり、実用的ではない。比例傾斜あゆみ手法を用いてもくり返し計算の途中で歩みの大きさをかえてうまく収束するような K をきめるのは容易でない。第 p 番目の $u(\tau)$ が与えられると、 $\partial J / \partial u(\tau) |_{u(\tau)=u_p(\tau)}$ が計算でき、 K をきめると次のステップの $u_{p+1}(\tau)$ が求まるから K を最適に選んでおけば $p+1$ 段の評価関数値を最小にできる。すなわち、第 p 番目の制御関数が与えられると J_{p+1} を最小にするような K をきめることができる。評価関数(5)式に(18)、(23)式の関係式を代入すると J_{p+1} は次のようになる。

$$J_{p+1} = \frac{f}{2} \cdot \int_0^1 \left[X^*(\xi) - \int_0^{t_f} W(\xi, t_f - \sigma) \left\{ u_p(\sigma) - K \cdot \frac{\partial J}{\partial u_p}(\sigma) \right\} d\sigma \right]^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left\{ u_p(\tau) - K \cdot \frac{\partial J}{\partial u_p}(\tau) \right\}^2 d\tau \quad (33)$$

(33)式は未知係数 K のみの関数である。(33)式を展開して K に関して整とすると、

$$\begin{aligned}
J_{p+1} &= \frac{K^2}{2} \cdot \left[\int_0^{t_f} \left(\frac{\partial J}{\partial u_p} \right)^2 d\tau + f \cdot \int_0^1 \left(\int_0^{t_f} W \cdot \frac{\partial J}{\partial u_p} \cdot d\sigma \right)^2 d\xi \right] - K \cdot \left[\int_0^{t_f} u_p \cdot \frac{\partial J}{\partial u_p} d\tau \right. \\
& \quad \left. - f \cdot \int_0^1 \left(X^* - \int_0^{t_f} W \cdot u_p d\sigma \right) \left(\int_0^{t_f} W \cdot \frac{\partial J}{\partial u_p} \cdot d\sigma \right) d\xi + \frac{f}{2} \cdot \int_0^1 \left(X^* - \int_0^{t_f} W \cdot u_p \cdot d\sigma \right)^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u_p^2 d\tau \right] \quad (34)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 J_{p+1} は K に関して2次式となり、 K^2 の係数が正であるから最小値が存在する。 J_{p+1} を最小にするような最適値 K_0 の値を求めると次の関係式が得られる。

$$K_0 = \frac{\int_0^{t_f} u_p(\tau) \cdot \frac{\partial J}{\partial u_p}(\tau) d\tau - f \cdot \int_0^1 \left\{ \left(X^*(\xi) - \int_0^{t_f} W(\xi, t_f - \sigma) u_p(\sigma) d\sigma \right) \left(\int_0^{t_f} W(\xi, t_f - \sigma) \frac{\partial J}{\partial u_p}(\sigma) d\sigma \right) \right\} d\xi}{\int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial J}{\partial u_p}(\tau) \right\}^2 d\tau + f \cdot \int_0^1 \left\{ \int_0^{t_f} W(\xi, t_f - \sigma) \frac{\partial J}{\partial u_p}(\sigma) d\sigma \right\}^2 d\xi} \quad (35)$$

(35)式の K_0 が各ステップにおける最適な歩み係数を与える関係式である。したがって、こう配関数(32)式と最適なあゆみ係数(35)式とを用いて(23)式をくり返し計算すると制御関数が求まる。同時に、各ステップの評価関

数値を計算し、その値が収束したところで計算をうちきれば近似ではあるが最適制御関数が決定でき、そのときの最適温度分布も計算できる。

5. 数 値 計 算

具体的な加熱プロセスとして次の数値計算を行なうことにする。

$$\begin{cases} X^*=0.2 & f=1.0 \times 10^4 \\ t_f=0.4 & \gamma=25, \alpha=10 \\ \beta_i \tan \beta_i=10 & i=1, \dots, 6 \end{cases} \quad (36)$$

次に、 $p=1$ における制御関数はどのような関数形になっているのかわからないので次のように仮定する。

$$u(\tau)|_{p=1}=0 \quad (37)$$

(37)式の初期条件から計算を開始し、各ステップの制御関数を計算すると Fig. 1 の結果を得る。こう配関数を計算するさいの数値積分はニュートン・コーツの

Fig. 1 Calculation of optimal control

Fig. 2 Performance criterion values

近似式を用い、分割の数を $n=10, 20$ について実行した。 $p=10$ までは各ステップごとに大きな変動がみられるが、これ以後のくり返し計算ではほとんど差異があらわれなくなる。さらに、数値積分の分割では $n=10$ で十分であることも明らかである。

つぎに、ステップごとの評価関数値を計算したのが Fig. 2 であるが、図から明らかなように $p=6 \sim 10$ くらいで収束する。同じ数値について連続式最急傾斜法で計算した結果を同時にプロットしているが本論文の手法と比較できる。ここで、連続式最急傾斜法の歩み係数の大きさはステップ式手法における $p=1$ の最適値を用いている。 $p=30$ における評価関数値をそれぞれについて求めると、

$$J_{30} = \begin{cases} 18.554 & (\text{ステップ式}, n=10) \\ 18.523 & (\text{ステップ式}, n=20) \\ 18.563 & (\text{連続式}, n=10) \\ 19.985^{(1)} & (\text{間接法}) \end{cases} \quad (38)$$

となり、ほとんど大差のない結果になっている。しかし、図から明らかなように収束に要するステップ数（所要時間）が連続式にくらべて著しく改善されている。ここで、間接法とは途中で最大原理の必要条件を適用し、フレドホルム形積分方程式を解いたアルゴリズムのことである。

金属片の温度分布は(24)式の関係式から計算できる。すなわち、Fig. 1 で得られた $u(\tau)$ の各ステップの値に対して(24)式をニュートン・コーツの近似式を用いて数値積分を実行する (Fig. 3)。ここでも2種類

Fig. 3 Optimal temperature distribution

Fig. 4 Optimal temperature distribution applying continuous steepest descent method

の分割の仕方では計算したが、結果はほとんど一致していることがわかる。また、 $p=10$ を越えると収束してしまっている様子も明らかである。図中の点線であらわした曲線は同じ加熱プロセスの最適問題に無限次元状態方程式を導入して最大原理を適用し、最適条件として第2種フレドホルム形積分方程式を解いた結果¹⁾から得られた最適な温度分布をあらわしている。途中の数値積分の近似の相異から発生する両手法の誤差を考慮すればほぼ妥当な結果が得られたとみなせる。

Fig. 4 は連続式最急傾斜法 ($K=0.054221$ に固定) によって計算した温度分布の結果をプロットしたものである。Fig. 3 と Fig. 4 との結果を比較することによって最適な歩み係数を選んだことによる効果が $p=3\sim 4$ ぐらいに顕著にあらわれていることが明らかである。

さらに、計算時間の比較に関してはステップ式手法のほうが連続式手法にくらべて必ずしも収束が速いとはいえない点に注意すべきである。なぜならば、各ステップごとに最適な歩み係数を計算する作業が加わるのでそれだけ時間が長くなるので単にステップの回数だけの比較では厳密ではない。しかし、本論文では両手法の比較のために第1ステップの歩み係数を共通に最適値をとった関係で連続式手法もかなりよい収束が得られたが、あまり妥当でない係数を選んだとしたら連続式手法は収束までにかかなり時間が長くなり、さらに、収束しない場合すら起こり得る。

以上の結果より本論文の手法によって求めた最適制御関数はかなり精度の高いものが得られたとみなせる。間接法との比較で精度をあげるためには無限個の

和を有限個 ($i=6$) で近似したが、さらにこの個数をふやす必要があるように思われる。ただ、間接法ではフレドホルム形積分方程式を近似計算して $X(\xi, t_f)$ を求め、しかるのちに $u_{opt}(\tau)$ を最適制御条件式からきめているのに反し、直接法では解析的なウェイト関数形を求め、こう配関数をウェイト関数であらわれて数値積分を実行し、しかるのちに、ウェイト関数を用いたコンボリューション積分を近似計算して $X(\xi, t_f)$ を求めているので厳密に比較するのはかなり複雑であるように思われる。

6. あとがき

最適制御関数を求めるアルゴリズムには、ポントリアギンの最大原理のような最適制御の必要条件を適用したうえで求める間接法と、そのような必要条件を求めないで直接的に最適制御関数を求める直接法とがあるが、本論文では分布定数系の代表例として加熱プロセスの最適問題を取りあげ、ステップ式最急傾斜法を適用して直接法によって最適制御関数を決定する方法を示し、計算機を使用して具体的な数値計算を実行した。

従来、分布定数系の最適制御問題に関しては種々の手法が提案されてきたが、筆者らは無限次元状態方程式を導入することによってポントリアギンの最大原理が分布定数系に対しても直接的に適用できることを示し、その最適条件を導いた¹⁾。しかし、無限次元状態方程式の導入は極限操作において数学的厳密性に欠けるものであった。本論文のアルゴリズムは直接法であるから途中で最大原理を補助手段として適用しないで最適制御関数が決定できるのはもちろんであるが、この数値解が無限次元状態方程式の導入により得られた2点境界値問題の数値計算の結果とほぼ一致したということは、無限次元状態方程式の導入による筆者らの手法の正当性が実証できたとみなしてさしつかえない。

また、本論文では同一の計算式をくり返し使用する逐次近似的な方法でデジタル計算機を用いたが、10ステップくらいで収束したという結果から判断して、さらに、具体的な問題には最大原理の適用自体が非常に困難になる場合が多い点を考慮すると、本論文のような直接法によるアルゴリズムの利用価値は高いものであると考えられる。

本論文では最適制御の時間関数を求めたので開ループ制御になっている。1回だけの $u_{opt}(\tau)$ を求めただけでは単にプログラム制御をただけで完全に開ループ制御であるが、もし無限回のくり返しで $u_{opt}(\tau)$

を求めなおすと仮定すれば optimal control law にもとづいて構成されたシステムと同じ動作をすることになる。最近の計算機の発達を考えるとかなり速く $u_{\text{opt}}(\tau)$ を求めなおすことができるので、それだけよい制御ができることになる。

終わりに、筆者が名古屋大学大学院工学研究科博士課程在学中に御指導いただいた市川邦彦教授，日ごろ御指導いただいている航空工学教室塚原鶴夫教授，またデジタル計算機で御指導いただいた高尾吉郎教授，高尾ぶじ江講師の皆様に心から感謝します。

参 考 文 献

- 1) 市川・金井：ポントリアギン最大原理の分布定数系最適制御への適用，電気学会誌，89-973，1949/1958 (1969-10)
- 2) 市川・金井：分布定数系の最適制御シンセシス，日本機械学会論文集，36-284，565/577 (1970-4)
- 3) 金井：ある分布定数系の最適フィードバック制御とリカッチ形偏微分方程式の近似解法，計測自動制御学会論文集，6-1，45/53 (1970-2)
- 4) E. H. Beckenbach : Modern Mathematics for the Engineer, McGraw-Hill (1961)
- 5) 市川・田村：こう配法による最適制御問題の解法，計測と制御，8-11，761/771 (1969-11)