変位の正弦関数項をもつ非線形系に 対する新しい位相平面法

三 浦 五 郎・佐 藤 和 雄

静岡大学工学部 浜松市城北 3-5-1

(昭和45年1月5日 受付)

New Phase-Plane Method for the Nonlinear Control System Containing Terms of Sinusoidal Function with Displacement

Goro MIURA and Kazuo SATO

(Faculty of Engineering, Shizuoka University, Hamamatsu)

(Received January 5, 1970)

This paper deals with the second-order nonlinear control system of which the restoring force and the damping factor contain sinusoidal functions of the displacement. A control system taken up in this paper is the following oscillator with an automatic phase control.

$$x_2 = \dot{x}_1$$

$$(1 + \alpha) \dot{x}_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha \sqrt{\beta} \cos x_1 \right) x_2 + \sin x_1 = \tau$$

The parameters α, β, τ are all positive, but their magnitudes are not restricted. Therefore, there may be cases in which the damping factor changes alternatively between positive and negative.

First, a phase plane $z = x_1 + jx_2$ is transferred into a new w plane by the conformal representation with $w = \exp(jz) = y_1 + jy_2$. The stable and unstable singular points in the w plane are, respectively, $(\sqrt{1-\tau^2}, \tau)$ and $(-\sqrt{1-\tau^2}, \tau)$ locating on the unit circle.

A limit cycle, if exists, is a closed curve enclosing an origin of the w plane, and is the stable second-kind limit cycle. In order to obtain the region of its existence, the Liapunov's function is taken as

$$V(y_1, y_2) = R^2 \exp \left(-\frac{2\alpha\sqrt{\beta}}{1+\alpha} \cdot \frac{y_2}{R} \right) > 0$$

where $R^2 = y_1^2 + y_2^2$. The closed curve $V(y_1, y_2) = C$ is determined corresponding to $\frac{dV}{dt} > 0$ as follows:

$$C = \exp [-2\sqrt{\beta}(1+\tau)]$$

The second-kind limit cycle may exist in the region lying between this closed curve and the unit circle $R=1$. A first-kind limit cycle does not exist.

Next, the region of initial values converging to the stable singular point is obtained constructing the Liapunov's function by the method of Infante.

1. ま え が き

復元力が位置変位に関する正弦関数である場合の2次非線形制御系については、位相面は 2π [rad] の変位を円周とする無限長の円筒位相面であることがわかっている^{1), 2)}。トラゼクトリには、円筒位相面の特異

点を取りまくように進行する第1種のトラゼクトリのほか、円筒表面を巻きつくように進む第2種のトラゼクトリが存在する。パラメータの値によっては、普通は第2種の安定リミットサイクルが存在するが、第2種の不安定リミットサイクルや第1種のリミットサイクルも発生することがある。

本論文は2次おくれフィルタを有する位相制御発振器 (automatic phase controlled oscillator) の系をとりあげた。この系では復元力のみならず制動係数にも正弦関数を含むため、問題はいっそう複雑になる。特に興味深いのは、制動係数が常に正でなく、正負に変化するようなパラメータの場合もありうることである。まず、円筒位相面では投影図的描写となって数学上取り扱いが困難であるし、普通の位相面では第2種のリミットサイクルが閉軌道にならない。このため、等角写像の手法に基づく新しい位相平面を採用した。これにより、すべてのリミットサイクルは閉軌道として表わされ、Liapunov の第2定理を適用することができる。次に、第2種リミットサイクルが存在する領域を明らかにした。存在領域については特に制動項の各パラメータによって大きく影響される。次に、系が安定特異点に落ちつくには、限られた初期値領域から出発させなければならないが、その領域の決定について述べ、Liapunov の定理からも検討した。

2. 基本方程式と特異点

本論文で扱うのは、次式で示される2階制御系である。

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \dot{x}_1 \\ (1+\alpha)\dot{x}_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta}\cos x_1\right)x_2 + \sin x_1 = r \end{cases} \quad (1)$$

パラメータ α, β, r はいずれも正值であるが、その大小関係は問わない。ステップ入力 r が、 $r > 1$ の場合は特異点は存在せず系は必ず第2種の安定リミットサイクルへ収束する。

$r \leq 1$ の場合は、安定特異点 x_{10} と不安定特異点 x_{1c} が存在し、 x_{10} と x_{1c} は 2π 周期間に1個ずつ現われる。

$$x_{10} = \sin^{-1} r, \quad x_{1c} = \pi - \sin^{-1} r \quad (2)$$

各特異点に原点を移し、Poincaré の判別を適用すると、 x_{10} は、

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta}(1-r^2) \right\}^2 \geq 4\sqrt{1-r^2} \quad (3)$$

のときは安定結節点であり、不等記号 $\geq$ のかわりに $<$ であるときは安定うず状点である。また、 x_{1c} は常にくら形点であることがわかる。

3. 安定リミットサイクル

(2)式を満足する安定特異点 x_{10} が存在しても、パラメータおよび初期値 (x_{1i}, x_{2i}) のいかんによっては、以下述べるように系はその x_{10} に収束せず、安定な第2種リミットサイクルにそって x_1 が無限に増加していく。このリミットサイクルは Fig. 1 のように

Fig. 1 Limit cycle of the system in the cylindrical coordinate

(x_1, x_2) 位相面で、ある平均値 x_{2av} を中心とする曲線であって、 x_1 に関して 2π の周期を持って無限に続く。

$$\begin{cases} x_2 = p(x_1) \\ p(x_1) = p(x_1 \pm 2n\pi), \quad n=0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4)$$

曲線 $p(x_1)$ の波形を解析的に求めることはできないが、 x_{2av} の値については次のように考察できる。

(1)式を、リミットサイクル上のある任意の点 (x_{1p}, x_{2p}) より $(x_{1p} + 2\pi, x_{2p})$ まで1サイクル間、 x_1 についてエネルギー積分を行なうと、

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta}\cos x_1 \right) x_2 dx_1 = 2\pi r \quad (5)$$

が得られる。

$1 > \alpha\beta > 0$ の場合は $\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta}\cos x_1 \geq 0$ である。

すなわち、正弦波的に変化する制動係数の大きさが常に正值の場合は、

$$x_{2av} = r\sqrt{\beta} > 0 \quad (6)$$

となる。すなわち $p(x_1)$ の平均値は制動項の β により大きく影響されるが、常に正值である。

$\alpha\beta > 1$ のとき、すなわち x_1 の値によっては制動係数 $\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta}\cos x_1$ が負値をとりうる場合については、平均値の定理は適用不能であって、 $x_{2av} > 0$ を証明できない。しかし5.に示すように、 $p(x_1)$ を閉軌道にするような新位相面に変換してLiapunov 第2定理を適用すれば、第2種リミットサイクルの存在可能な上限値を求めることができ、制動係数の平均値、

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta}\cos x_1 \right) dx_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta}} > 0$$

が正である限り、上限値は必ず $x_2 > 0$ の有限領域にあって $x_2 < 0$ には存在しない。かくして $p(x_1)$ は Fig. 1 のように、時間進行につれ x_1 の増加方向に進む。

また、もし $p(x_1)$ が $x_2 > 0$ の領域から x_1 軸をよぎって $x_2 < 0$ の領域にはいるとすれば、 $\dot{x}_1 < 0$ のため時間進行につれて x_1 の減少方向に進むため、 (x_1, x_2) 平面上の閉軌道である第1種リミットサイクルとなってしまう。かくして第2種リミットサイクルの上限は

$x_2 > 0$ にあり、下限は x_1 軸である。

4. 等角写像的手法による位相面変換

リミットサイクルの存在と系のパラメータおよび初期値との関係を詳細に調べるため、次のようにして (x_1, x_2) 平面を (y_1, y_2) 平面に変換する。位相平面 z と、これを、

$$w = \exp(jz) \quad (7)$$

の関係で等角写像した w 平面を考える。

$$\left. \begin{aligned} z &= x_1 + jx_2 \\ w &= y_1 + jy_2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(7), (8) 両式から、

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \exp(-x_2) \cos x_1 \\ y_2 &= \exp(-x_2) \sin x_1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

または、

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \tan^{-1}(y_2/y_1) \\ x_2 &= -\ln \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

の関係が得られる。

Fig. 2 w plane

Fig. 2 に示すように、 x_1 はベクトル y の偏角に、また $\exp(-x_2)$ は y の絶対値にそれぞれ対応する。 z 平面の横軸 $x_2 = 0$ は、 w 平面で原点を中心とする半径 1 の単位円に対応する。 z 平面の原点は w 平面の $(1, 0)$ 点に対応する。 $x_2 > 0$ は単位円内部に、 $x_2 < 0$ は外部にそれぞれ対応する。

すなわち、通常の位相平面で x_1 が正に増加することは、 x_1 が周期 2π だけ増すごとに、 w 平面では原点の周りを 1 回ずつ正方向に回わることに対応している。したがって、 w 平面では第 2 種リミットサイクルは、原点をとり囲む閉曲線となり、その半径方向の大きさが限られた範囲にあることを、Liapunov 関数の選定によってはいえるはずである (次章)。また、このような位相面ではトラセクトリは、すべて原点を回りながら安定特異点かあるいはリミットサイクルに収束するから、安定・不安定の領域図示が直観的でありやすい。第 1 種リミットサイクルについては、 w

平面では原点を囲まない閉曲線となる。

なお、 $\sin x_1$, $\cos x_1$ については次の関係を持つ。

$$\sin x_1 = \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, \quad \cos x_1 = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \quad (11)$$

(10) 式を時間で微分する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{d}{dt} \left(\tan^{-1} \frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{y_1 \dot{y}_2 - y_2 \dot{y}_1}{y_1^2 + y_2^2} \\ \dot{x}_2 &= -\frac{d}{dt} \left(\ln \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \right) = -\frac{y_1 \dot{y}_1 + y_2 \dot{y}_2}{y_1^2 + y_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(10), (12) 両式が、 z 平面の位相面方程式を w 平面に表わすための変換式である。

さて (1) 式を w 平面上に変換するには、(1) 式中の $\sin x_1$, $\cos x_1$, x_2 , $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ に (10)~(12) 式の関係を入力すればよい。いま、 $R = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ とおけば、

$$\begin{aligned} \frac{y_1 \dot{y}_2 - y_2 \dot{y}_1}{R^2} &= -\ln R \\ -\frac{y_1 \dot{y}_1 + y_2 \dot{y}_2}{R^2} &= \frac{\gamma}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha \sqrt{\beta} \cdot \frac{y_1}{R} \right) \ln R \\ &\quad - \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{y_2}{R} \end{aligned}$$

上式を $\dot{y}_1, \dot{y}_2$ について解けば、次の位相面方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\frac{\gamma y_1}{1+\alpha} + \left\{ y_2 - \frac{y_1}{1+\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha \sqrt{\beta} \cdot \frac{y_1}{R} \right) \right\} \ln R \\ &\quad + \frac{y_1 y_2}{1+\alpha} \cdot \frac{1}{R} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= -\frac{\gamma y_2}{1+\alpha} - \left\{ y_1 + \frac{y_2}{1+\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha \sqrt{\beta} \cdot \frac{y_1}{R} \right) \right\} \ln R \\ &\quad + \frac{y_2^2}{1+\alpha} \cdot \frac{1}{R} \end{aligned} \quad (14)$$

w 平面の特異点は、(13), (14) 両式で $\dot{y}_1 = 0$, $\dot{y}_2 = 0$ を満足する y_1, y_2 である。すなわち、 $\dot{y}_1 = 0$ の両辺に y_2 を乗じたものから、 $\dot{y}_2 = 0$ の両辺に y_1 を乗じたものを差し引けば、

$$R^2 \ln R = 0$$

を得る。 $R \neq 0$ であれば $\ln R = 0$, したがって $R = 1$ となり半径 1 の単位円上に存在する。このとき、 $R = 1$ および (13), (14) 各式から、

$$y_1^2 + y_2^2 = 0, \quad \gamma y_1 - y_1 y_2 = 0, \quad -\gamma y_2 + y_2^2 = 0$$

となって、これらを満たす特異点座標は、 $y_1 \neq 0$ であるから $y_2 = \gamma$, $y_1 = \pm \sqrt{1 - \gamma^2}$ となる。

かくして、単位円上第 1 象限の $(\sqrt{1 - \gamma^2}, \gamma)$ および第 2 象限の $(-\sqrt{1 - \gamma^2}, \gamma)$ が特異点である。Poincaré の判別を行なうと、前者は安定な点または安定結節点であり、後者はくら形点であることがわかる。ここでも、(3) 式に示す条件が成立する。

$R = 0$ であれば、 $y_1 = y_2 = 0$ なる w 平面の原点であって、(9) 式の定義から $x_2 = +\infty$ に対応する一種の

不安定特異点（わき出し点）である。また、 $R=\infty$ の無限遠点 ($y_1=y_2=\infty$) は、(9) 式より $x_2=-\infty$ に対応する同様なわき出し点となる。このことは (x_1, x_2) 平面の第2種リミットサイクルにおいて、そのリミットサイクルの上側 ($x_2=+\infty$) から発生したトラゼクトリも、下側 ($x_2=-\infty$) から発生したトラゼクトリも、ともに x_1 の無限増加に伴って、 x_2 に関し有限領域内のリミットサイクルに収束することに対応する。

5. Liapunov 第2定理による w 位相平面のリミットサイクルの存在領域

本章では w 平面の第2種リミットサイクルの存在領域を調べる。3. に述べたように z 平面上の $p(x_1)$ は、下限が x_1 軸、上限が $x_2>0$ のどこかにあって、その間にはさまれた領域内に存在しうる。 w 平面上ではこのことは、単位円と単位円内部の原点を囲む閉曲線とにはさまれた領域に対応する。

このような閉曲線を求めるには、適当な Liapunov 関数 $V(y_1, y_2)$ を用い、 $\frac{dV}{dt} \geq 0$ であってかつ $V(y_1, y_2) \leq C$ なる境界線を作ればよく、リミットサイクルが存在するとすれば、必ず境界 C の外側である。Fig. 3 は w 平面の第2種リミットサイクルが、単位円 U の内側で C の外側にあることを示している。

Fig. 3 Closed curve C and unit circle U

w 平面上の Liapunov 関数 $V(y_1, y_2)$ として次式を選ぶ。

$$V(y_1, y_2) = \exp \left[2 \left(\ln R - \frac{\alpha \sqrt{\beta}}{1+\alpha} \cdot \frac{y_2}{R} \right) \right] \\ = R^2 \exp \left(-\frac{2\alpha \sqrt{\beta}}{1+\alpha} \cdot \frac{y_2}{R} \right) > 0 \quad (15)$$

$V(y_1, y_2)$ の時間微分項を計算するため、まず V の y_1 および y_2 に関する偏微分を求める。

$$\frac{\partial}{\partial y_1} V(y_1, y_2) \\ = 2 \left(y_1 + \frac{\alpha \sqrt{\beta}}{1+\alpha} \cdot \frac{y_1 y_2}{R} \right) \exp \left(-\frac{2\alpha \sqrt{\beta}}{1+\alpha} \cdot \frac{y_2}{R} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y_2} V(y_1, y_2) \\ = 2 \left(y_2 - \frac{\alpha \sqrt{\beta}}{1+\alpha} \cdot \frac{y_1^2}{R} \right) \exp \left(-\frac{2\alpha \sqrt{\beta}}{1+\alpha} \cdot \frac{y_2}{R} \right)$$

上式と (13), (14) 各式を用い、

$$\frac{d}{dt} V(y_1, y_2) = \frac{\partial V}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial V}{\partial y_2} \dot{y}_2$$

を計算すれば次のようになる。

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2R^2}{1+\alpha} \left(r + \frac{\ln R}{\sqrt{\beta}} - \frac{y_2}{R} \right) \cdot \exp \left(-\frac{2\alpha \sqrt{\beta}}{1+\alpha} \cdot \frac{y_2}{R} \right) \quad (16)$$

さて、閉領域を決める境界線 C は、たとえば次のようにして求まる。(16) 式において、

$$r + \frac{\ln R}{\sqrt{\beta}} - \frac{y_2}{R} \leq 0 \quad (17)$$

であれば、常に $\frac{dV}{dt} \geq 0$ である。(17) 式の両辺から、

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{y_2}{R} \geq 0 \text{ を差し引けば、}$$

$$\frac{\ln R}{\sqrt{\beta}} - \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{y_2}{R} \leq -r + \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{y_2}{R}$$

$\frac{y_2}{R} = \sin x_1$ がとりうる最小値は -1 であり、また $\frac{1}{1+\alpha} \leq 1$ である。したがって、上式の不等号が常に成立する

ためには、右辺末項の $\frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{y_2}{R}$ が最小値である -1

にしておけばよい。このとき右辺は最小値に固定され、左辺は常に右辺より小さいかまたは等しいからである。すなわち、

$$\ln R \leq \frac{\alpha \sqrt{\beta}}{1+\alpha} \cdot \frac{y_2}{R} - \sqrt{\beta} (1+r) \quad (18)$$

が成立すれば、必ず (17) 式は満足する。上式の右辺は α, β, r がすべて正である限り必ず負であって $\ln R \leq 0$ 、すなわち $R < 1$ である。このことは z 平面上で、境界線は常に $x_2 > 0$ 領域に存在することを表わす。

かくして (15) 式の V は、(18) 式の条件から、

$$V = \exp \left[2 \left(\ln R - \frac{\alpha \sqrt{\beta}}{1+\alpha} \cdot \frac{y_2}{R} \right) \right] \leq \exp [-2\sqrt{\beta} (1+r)]$$

であるから、 C として、

$$C = \exp [-2\sqrt{\beta} (1+r)] \quad (19)$$

の値を採用すれば、常に $V \leq C$ となる。したがって、 w 平面に閉曲線 C をプロットするには、

$$\ln R - \frac{\alpha \sqrt{\beta}}{1+\alpha} \cdot \frac{y_2}{R} = \ln \sqrt{C} \quad (20)$$

を y_1, y_2 について計算して描けばよい。 $\alpha=0$ の場合

Fig. 4 w plane with $\alpha=0$, $\beta=4$ and $\gamma=0.5$
(hatched area is a stable region)

Fig. 6 w plane with $\alpha=0$, $\beta=4$ and $\gamma=0.7$
(hatched area is a stable region)

Fig. 5 w plane with $\alpha=0$, $\beta=4$ and $\gamma=0.59=r_c$
(hatched area is a stable region)

Fig. 7 w plane with $\alpha=0$, $\beta=4$ $\gamma=2$

は、 $R^2=C$ で真円となる。

Fig. 4, Fig. 5, Fig. 6, Fig. 7 は $\alpha=0$, $\beta=4$ の場合において、それぞれ $\gamma < r_c$, $\gamma = r_c$, $1 > \gamma > r_c$, $\gamma > 1$ の w 平面を示す。ここに、 r_c は次章に述べる臨界入力値である。Fig. 8 は $\alpha=0.2$, $\beta=20$ について $\gamma > r_c$ の場合の位相面を示している。表示は便宜上、座標点 (w_1, w_2) の半径 R に関する対数目盛方眼紙にプロットした。 S_0 は安定特異点、 S_c はくら形点、 C は上記によって求めた閉曲線である。 U は単位円、 L_0 はリミットサイクルである。

6. 臨界入力 r_c と位相面性質

ステップ入力 r にはある臨界値 r_c が存在し、系の動作はパラメータの値によって、次の4つのいずれかにわかれる。

6.1 $\gamma > 1$ のとき

(2)式を満足する x_{10}, x_{1c} は存在せず、 w 平面上にもそれらに対応する特異点はない。したがって w 平面では、わき出し点の原点を囲む閉軌道の第2種リミットサイクルは存在しうが、 (x_1, x_2) 平面上の閉軌道に相当する第1種リミットサイクルは存在しない。第2種リミットサイクルの存在領域は、前章で述べたよ

Fig. 8 w plane with $\alpha=0.2$, $\beta=20$ and $\gamma=0.7$ (hatched area by dotted lines is a stable region)

うに,

$$\left. \begin{aligned} \ln R - \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{1+\alpha} \cdot \frac{y_2}{R} &\leq \ln \sqrt{C} \\ R = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} &> 1 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

である。

Fig. 7 に示すように、いかなる初期値から出たトラゼクトリも、このリミットサイクルに向かい収束する。この第2種リミットサイクルが安定であることは、Gauss の特性指数³⁾ λ が負であることを確かめればよい。

$$\lambda = \frac{1}{T} \int_0^T I(y_1, y_2) dt < 0 \quad (22)$$

ただし、 T はリミットサイクルの周期、 $I(y_1, y_2)$ はトラゼクトリの速度ベクトル $\dot{\mathbf{y}}$ の発散である。

$$\begin{aligned} I(y_1, y_2) &= \text{div}[\dot{\mathbf{y}}] \\ &= \frac{\partial P(y_1, y_2)}{\partial y_1} + \frac{\partial Q(y_1, y_2)}{\partial y_2} \end{aligned} \quad (23)$$

ここに $P(y_1, y_2)$, $Q(y_1, y_2)$ は (13), (14) 各式の右辺であって、 $\dot{y}_1 = P(y_1, y_2)$, $\dot{y}_2 = Q(y_1, y_2)$ である。Fig. 7 における λ は -0.79 である。

6.2 $1 > r > r_c$ のとき

特異点 $S_0(\sqrt{1-r^2}, r)$, $S_c(-\sqrt{1-r^2}, r)$ が存在し、ある限られた安定領域から出るトラゼクトリは S_0 に向かうが、大部分は不安定領域でそこから出たものはすべて第2種リミットサイクル L_0 に収束する。この L_0 の存在領域は $r > 1$ のときと同様、(21) 式から定められる閉領域である。ただし、単位円の周上 $R=1$ は $S_0(\sqrt{1-r^2}, r)$ および $S_c(-\sqrt{1-r^2}, r)$ の両特異点を含むので、存在領域に含めない。

Fig. 9 Limit cycles in w plane for $1 > r > r_c$

Fig. 9 は w 平面上のリミットサイクルを示す。U と C との内部に存在する L_0 の他に、図のような原点 O を囲まない第1種リミットサイクル L_1, L_2, L_3 および第2種リミットサイクル L_4 の存在が考えられる。閉軌道と特異点に関する Poincaré の指数³⁾ について考えると、O と S_0 の指数はともに $+1$ であり、 S_0 は -1 である。リミットサイクルの内部に含まれる特異点指数の和は $+1$ でなければならないから L_2, L_3 は存在しない。また、 L_4 は単位円外部 ($x_2 < 0$) を通過するため、存在しない。

$1 > r > r_c$ のときは、次章に述べるように常に安定特異点へ収束するような初期値領域を Liapunov 定理により決めることができ、しかもこの安定領域は必ず S_0 および S_c をその内部に含ませることができる。したがって、特異点 S_0 のみ囲むリミットサイクル L_1 は必ず安定領域をよぎることになるので、第1種リミットサイクル L_1 は存在しない。

w 位相平面内にリミットサイクルが存在しない条件を与える Bendixson の定理³⁾ によれば、(23) 式の $I(y_1, y_2)$ が定符号となる領域にはリミットサイクルは存在しない。(13), (14), (23) の各式を用いて計算した定符号領域境界線を Fig. 6, Fig. 8 の $\times \times$ 印にてプロットした曲線 BB で示した。唯一のリミットサイクル L_0 はいずれも曲線 BB と交差しており、定符号領域内に存在していない。

Fig. 6, Fig. 8 のように、 S_0 を通る4本のセパトリクスのうち2本は、位相面を安定および不安定領域に2分割し、前者は S_0 を含み後者は原点を含む。そして、 S_0 は領域境界線上にある。特性指数 λ の値は、Fig. 6 で -2.64 , Fig. 8 で -0.33 である。

6.3 $r < r_c$ のとき

Fig. 4 に示すように、 S_0 を通過する4本のセパ

トリクスがうず状に位相平面を占めるが、いかなる初期値から出たトラゼクトリも必ず S_0 に落ちつく。リミットサイクルは存在しない。

6.4 $r=r_c$ のとき

Fig. 5 の例に示すように、セパトリクスは S_0 をその周上を持つ閉曲線となり、位相面を 2 分する。その内側から出るトラゼクトリは、この閉曲線に収束するが、外側から出たものは必ず S_0 に向かい進行していく。閉曲線の外側にも、 S_0 を通る 2 本のセパトリクスがあるが、外側の初期値から出発するトラゼクトリが S_0 に進むのをさまたげない。

この場合、セパトリクスが作る閉曲線は不安定な第 2 種リミットサイクルを形成するのであって、その内側が安定、外側が不安定（リミットサイクル自体の安定、不安定という意味）となる。物理的にいえば、内側から出たトラゼクトリも無限回の周期後に S_0 を経て S_0 に進行することを表す。

以上のように、くら形点を出発したトラゼクトリが元のくら形点に戻る時が臨界値 r_c を与える。この性質から r_c の値をデジタル計算機で求めることができる。 r_c を算出するためのフローチャートを Fig. 10 に示しておく。

7. Infante の手法による安定領域の決定

本章では、必ず安定特異点に進行するための初期値

Fig. 10 Flow chart for obtaining r_c .

領域を Liapunov 第 2 定理から求める。筆者らは Infante の最近の研究⁴⁾ による手法を応用し、Liapunov 関数 V を次式のように導いた。位相面方程式は z 平面のほうが形として簡単であるため、(1) 式から導く (V の導出は付録参照)。

$$\begin{aligned}
 V(x_1'', x_2) = & \frac{1}{2}x_2'^2 + \frac{1}{2(1+\alpha)^2} \\
 & \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta}}x_1'' + \alpha\sqrt{\beta}\sin(x_1'' + x_{10}) - \alpha\sqrt{\beta}r \right\}^2 \\
 & - \frac{r}{1+\alpha}x_1'' + \frac{1}{\sqrt{\beta}(1+\alpha)}x_1''x_2 + \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{1+\alpha}x_2 \\
 & \times \sin(x_1'' + x_{10}) - \frac{\alpha\sqrt{\beta}r}{1+\alpha}x_2 - \frac{1}{1+\alpha} \\
 & \times \cos(x_1'' + x_{10}) + \frac{1}{1+\alpha}\cos x_{10} \quad (24)
 \end{aligned}$$

ただし、 x_{10} は安定特異点の x_1 座標、 $x_1'' = x_1 - x_{10}$ は安定特異点を原点に移す操作である。

$V(x_1'', x_2)$ の時間微分は、

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}V(x_1'', x_2) = & \frac{x_1''}{\sqrt{\beta}(1+\alpha)^2} \{ r - \sin(x_1'' + x_{10}) \} \\
 & - \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{(1+\alpha)^2} \{ r - \sin(x_1'' + x_{10}) \}^2 \leq 0 \quad (25)
 \end{aligned}$$

上式の負号は $-\pi - 2\sin^{-1}r < x_1'' < \pi - 2\sin^{-1}r$ 、すなわち安定特異点を挟む 2 個のくら形点の間で有用である。Fig. 4~8 の斜線部分は、(24) 式から求まる安定領域を w 位相面に変換して示したものである。

本手法は、系の制動係数が $\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta}\cos x_1$ のように、平均値は正であっても瞬時的に正・負に変動する場合 ($\alpha\beta > 1$) についても適用可能である。また、安定領域は必ず安定特異点とくら形点を含むように作ることができる。

8. 位相制御発振器の実験

Fig. 11 の回路図に示す位相制御発振器の電子回路を作り、理論との比較を行なった。中心周波数は 400 kHz である。低域フィルタは、

$$G(s) = \frac{1+sT_2}{1+sT_1}$$

の伝達関数を持つ位相おくれ回路であり、電圧制御発振器は K_2/s の伝達関数を持つ。 α, β, r の各パラメータは、それぞれ低域フィルタの時定数、時定数と開放ループゲイン、および外部同期化信号振幅により決まるパラメータを正規化したものである。

Fig. 12 は臨界入力 r_c に関するパラメータチャートで、デジタル計算機により求めた。図中の×印は括弧内の α をパラメータとするときの実験値であり、理論値ときわめてよく合致している。

Fig. 11 Connection diagram of an automatic controlled phase oscillator for the experiment

Fig. 12 Values of γ_c for a system of eq. (1)

9. む す び

制動項や復元力に変位の正弦波関数を含む系は、本文の例に用いた位相制御発振器や同期発電機の同期引入れ⁵⁾、シンクロ・サーボ系、グライダーの飛翔の問題⁶⁾などに見られる。

本文に記すとおりステップ入力の大さきによって、特異点とリミットサイクルによる位相面性質が大きく変わる。リミットサイクルは、1サイクルの周期中に制動力による消散エネルギーと、印加力による供給エネルギーが等しくなるような経路を示すもので、制御系の制動項と密接な関係を有している。

$\approx 0.01\mu$
 phase
 本論文に述べたように、等角写像の手
 法による新しい位相平面を用いれば、従
 来の第2種リミットサイクルを閉曲線に
 することができ、したがって Liapunov
 定理の適用によってリミットサイクルの
 存在範囲が定まる。しかし、本手法で扱
 いうる系は二階の系に限られる。3次以上の高階系に
 ついては、記述関数法を応用することによって、近似的な
 定量化関係を得ることができる。これについては他
 日に稿を改めたい。

参考文献

- 1) N.Minorsky : Nonlinear Oscillations, D. Van Norstrand Press (1962)
- 2) N.Minorsky : Introduction to Nonlinear Mechanics, Edwards Brothers (1947)
- 3) J.E.Gibson : Nonlinear Automatic Control, McGraw-Hill (1963)
- 4) E.F. Infante & L.G. Clark : J. A. Mech. **63**, 1/6 (1964)
- 5) 三浦・武田・袴田 : 電学誌, 89-5, 899/908 (1969)
- 6) A. A. Andronov, A. A. Vitt & S. E. Khaikin : Theory of Oscillators, Pergamon Press (1966)

□ 付 録——Infante による Liapunov 関数構成法 □

安定特異点 x_{10} に原点を移動するため, (1) 式で $x_1'' = x_1 - x_{10}$ とおく.

$$\dot{x}_1'' = f_1(x_1'', x_2) = x_2 \quad (\text{付1})$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = f_2(x_1'', x_2) = & \frac{1}{1+\alpha} \left[\gamma - \sin(x_1'' + x_{10}) \right. \\ & \left. - \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha \sqrt{\beta} \cos(x_1'' + x_{10}) \right\} x_2 \right] \quad (\text{付 2}) \end{aligned}$$

Infante は Green の定理を巧みに応用して, Liapunov 関数を構成する一般的技法を与えた. すなわち,

時間と無関係な一定値 C' をとるような Liapunov 関数 $V(x_1'', x_2) = C'$ が存在するためには,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V(x_1'', x_2)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V(x_1'', x_2)}{\partial x_2} \dot{x}_2 \\ &= \frac{\partial V(x_1'', x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1'', x_2) + \frac{\partial V(x_1'', x_2)}{\partial x_2} f_2(x_1'', x_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成立することが必要で、これより $V(x_1'', x_2)$ は次式により与えられる.

$$V(x_1'', x_2) = \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1''} f(x_1'', x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_1'', x_2) \right\} \\ \times dx_1'' dx_2 = \oint_{C'} \{ f_1(x_1'', x_2) dx_2 - f_2(x_1'', x_2) dx_1'' \} \\ = C' \quad (\text{付 3})$$

(付 3) 式の被積分項は、原点をとり囲む安定領域 C' と系のトラゼクトリとの交点において、トラゼクトリ進行方向の接線速度ベクトル $\dot{\mathbf{x}}_t(x_1'', x_2)$ と、境界線 C' に対する接線速度ベクトル $\dot{\mathbf{x}}_{C'}(x_1'', x_2)$ とのベクトル積 $\mathbf{X}(x_1'', x_2)$ であって、この $\mathbf{X}(x_1'', x_2)$ が正值となるように選ぶのである。このとき $\dot{\mathbf{x}}_t$ は閉曲線 C' の内側にはいる方向に向き、 C' は Liapunov の意味での安定領域を与える。

Infante によれば (付 3) 式の被積分項、

$$f_1(x_1'', x_2) dx_2 - f_2(x_1'', x_2) dx_1''$$

における $f_1(x_1'', x_2)$ および $f_2(x_1'', x_2)$ には (付 1)、(付 2) 各式の $\dot{x}_1''$, $\dot{x}_2$ を、次のような経過で修正した $\dot{x}_1''$ および $\dot{x}_2$ ((付 6) および (付 7) 式に示す) を用いる。まず (付 2) 式の $f_2(x_1'', x_2)$ を用い $f_3(x_1'', x_2)$ を作る。

$$f_3(x_1'', x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_1'', x_2) \\ = -\frac{1}{1+\alpha} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta} \cos(x_1'' + x_{10}) \right\}$$

この関係を使って最初、(付 1) 式を次のように修正する。

$$\dot{x}_1'' = x_2 - \int_0^{x_1''} f_3(u, x_2) du \quad (\text{付 4})$$

これを計算すれば、

$$\dot{x}_1'' = x_2 + \frac{1}{1+\alpha} \int_0^{x_1''} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta} \cos(x_1'' + x_{10}) \right\} dx_1'' \\ = x_2 + \frac{1}{1+\alpha} \left\{ \frac{x_1''}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta} \sin(x_1'' + x_{10}) - \alpha\sqrt{\beta} \gamma \right\} \quad (\text{付 5})$$

続いて、さらに (付 4) 式を、また (付 2) 式をそれぞれ次のように修正する。

$$\dot{x}_1'' = x_2 - \int_0^{x_1''} f_3(u, x_2) du + f_4(x_1'', x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1'', x_2) + f_5(x_1'', x_2)$$

すなわち、

$$\dot{x}_1'' = x_2 + \frac{1}{1+\alpha} \left\{ \frac{x_1''}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta} \sin(x_1'' + x_{10}) - \alpha\sqrt{\beta} \gamma \right\} \\ + f_4(x_1'', x_2) \quad (\text{付 6})$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{1+\alpha} \left[\gamma - \sin(x_1'' + x_{10}) - \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta} \right\} \right. \\ \left. \times \cos(x_1'' + x_{10}) \right\} x_2 + f_5(x_1'', x_2) \quad (\text{付 7})$$

ここに、 $f_4(x_1'', x_2)$ と $f_5(x_1'', x_2)$ は、次式の間係を満足するよう選ぶものとする。

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_4(x_1'', x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} f_5(x_1'', x_2) = 0 \quad (\text{付 8})$$

このようにして修正された (付 6) および (付 7) の各式が、考察点における C' の接線ベクトル $\dot{\mathbf{x}}_{C'}(x_1'', x_2)$ のそれぞれ $\dot{x}_1''$ および $\dot{x}_2$ 成分である。いっぽう、トラゼクトリ進行方向の接線ベクトル $\dot{\mathbf{x}}_t$ については、(付 1) および (付 2) 各式がそれぞれ $\dot{x}_1''$ および $\dot{x}_2$ 成分になる。したがって、ベクトル積 $\mathbf{X}$ は、

$$\mathbf{X}(x_1'', x_2) = \dot{\mathbf{x}}_t(x_1'', x_2) \times \dot{\mathbf{x}}_{C'}(x_1'', x_2) \\ = \{ \dot{\mathbf{x}}_t(x_1'', x_2) \text{ の } \dot{x}_1'' \} \{ \dot{\mathbf{x}}_{C'}(x_1'', x_2) \text{ の } \dot{x}_2 \} \\ - \{ \dot{\mathbf{x}}_t(x_1'', x_2) \text{ の } \dot{x}_2 \} \{ \dot{\mathbf{x}}_{C'}(x_1'', x_2) \text{ の } \dot{x}_1'' \} \\ = \{ (\text{付 1) 式} \} \{ (\text{付 7) 式} \} - \{ (\text{付 2) 式} \} \{ (\text{付 6) 式} \} \quad (\text{付 9})$$

かくして (付 3) 式の被積分項は修正され、

$$V(x_1'', x_2) = \oint_{C'} \mathbf{X} dt = C'$$

となる。(付 9) 式に示された関係を計算すれば、

$$\mathbf{X}(x_1'', x_2) = \frac{x_2}{1+\alpha} \left[\gamma - \sin(x_1'' + x_{10}) \right. \\ \left. - \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta} \cos(x_1'' + x_{10}) \right\} x_2 \right] + x_2 f_5 \\ - \frac{1}{1+\alpha} \left[\gamma - \sin(x_1'' + x_{10}) - \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta} \cos \right. \right. \\ \left. \left. \times (x_1'' + x_{10}) \right\} x_2 \right] \cdot \left[x_2 + \frac{1}{1+\alpha} \left\{ \frac{x_1''}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta} \sin \right. \right. \\ \left. \left. \times (x_1'' + x_{10}) - \alpha\sqrt{\beta} \gamma \right\} + f_4 \right] \quad (\text{付 10})$$

ここで、 $f_4(x_1'', x_2)$ および $f_5(x_1'', x_2)$ を、(付 8) 式を満足するよう次のように選ぶ。

$$f_4(x_1'', x_2) = 0 \\ f_5(x_1'', x_2) = -\frac{1}{(1+\alpha)^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta} \cos(x_1'' + x_{10}) \right\} \cdot \\ \left\{ \frac{x_1''}{\sqrt{\beta}} + \alpha\sqrt{\beta} \sin(x_1'' + x_{10}) - \alpha\sqrt{\beta} \gamma \right\} \quad (\text{付 11})$$

(付 10) 式に (付 11) 式を代入すれば、

$$\mathbf{X}(x_1'', x_2) = -\frac{1}{\sqrt{\beta} (1+\alpha)^2} \{ \gamma - \sin(x_1'' + x_{10}) \} x_1'' \\ + \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{(1+\alpha)^2} \{ \gamma - \sin(x_1'' + x_{10}) \}^2 \quad (\text{付 12})$$

上式の $\mathbf{X}(x_1'', x_2)$ が常に正であるような x_1'' の領域は、

$$\{ \gamma - \sin(x_1'' + x_{10}) \} x_1'' < 0$$

である。Fig. A において $\bar{RO} = \sin^{-1} \gamma$ であるゆえ、この領域は、

$$-\pi - 2 \sin^{-1} \gamma < x_1'' < \pi - 2 \sin^{-1} \gamma \quad (\text{付 13})$$

である。このため、安定特異点 0 に近いくら形点 $P(\pi - 2 \sin^{-1} \gamma, 0)$ を通るように、 C' の値を選ぶこと

Fig. A Region of x_1'' to satisfy $X(x_1'', x_2) > 0$

ができる。

さて Liapunov 関数は、(付6) および (付7) 式で示される式をそれぞれ $f_1(x_1'', x_2)$ および $f_2(x_1'', x_2)$ として、(付3) 式の被積分項に代入し線積分を行なえばよい。ただし、 x_1'' についての線積分は x_2 を定数とみなし、また x_2 についての積分は x_1'' を定数とみなして計算する。その結果にじゃっかんの修正を施せば、本文 (24) 式が導かれるのである。Fig. B は C' の値を変えた場合の z 平面上の安定領域を示すもので、 C' の値が小さいときは閉曲線となるが C' が大きいと閉曲線にならない。しかし、図示の C_0' のようにくら形点 $(\pi - 2 \sin^{-1} r, 0)$ を通過するものと、

Fig. B Stable region in z plane ($C_3' > C_0' > C_1' > C_2'$)

P を通る垂直線で区分される閉領域をもって、安定領域とみなしてよい。 C_0' は (27) 式において、 $x_1'' = \pi - 2 \sin^{-1} r$, $x_2 = 0$ を代入して求まる。

$$C_0' = V(\pi - 2 \sin^{-1} r, 0) \quad (\text{付14})$$

$V(x_1'', x_2)$ の時間微分 dV/dt を計算すれば、本文 (25) 式が得られ、これは (付12) 式の $X(x_1'', x_2)$ に負号をつけたものと相等しく、常に負である。