低次プロセスの直交関数による同定†

樋口 清 伯・田 中 幸 吉

大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山町 1
(昭和 45 年 1 月 12 日 受付)

Low Order Process Identification Using Orthonormal Function

Seihaku HIGUCHI and Kokichi TANAKA

(Faculty of Engineering Science, University of Osaka, Toyonaka)
(Received January 12, 1970)

Many methods have been developed in consideration of the importance of identification. In the recent years the high accuracy devices such as the operational amplifier and the multiplier have been developed. Though the identification methods using analog computation have been long reported, in this paper the identification method of the low order process is treated re-evaluating the merits of analog computation.

First, the impulse response function of the process is expanded by means of orthonormal function filter, and the order of this process is decided from the discriminant which is expressed by the relation among the above expanded coefficients. For example, the form of this process is designated as the second-order lag system. At the same time, the computation rules which determine the values of the unknown parameters are also given. Finally, the approximate deviations from the true values of expansion coefficients are estimated.

1. は し が き

制御プロセスの同定に関する論文はこれまでに数多く発表されているが^{1)~3)}、最近ではデジタル計算機の高速度性と精度の良さを生かす方向にあるといえる。また最適制御を行なうためにプロセスの各種の知識が要求されるようになり、1つの大きなシステムとして取り扱い、その解析が行なわなければならない。いっぽう、ここ数年来演算増幅器、乗算器などのアナログ素子の精度もよくなってきている。これらの素子をもちいた同定あるいは推定計算法もよく研究され²⁾、発表されている。

本論文では従来取り扱われてきた方法を生かし、低次プロセスに含まれる未知のパラメータとその形を定めることを考察している。従来、直交関数をもちいて伝達関数を展開する方法は北森・古田氏らによって発表されている²⁾が、これらは主として伝達関数を直交関数系で近似するという立場であり、本論文の方法は、これをさらに進めプロセスの形状決定について述べた

ものである。いま対象とするプロセスを直交関数系により展開し、この展開係数をもちいてプロセスが1次遅れ系であるか2次遅れ系であるかなどの形を決定し、そのプロセスの未知パラメータを計算しようとするものである。さらに展開係数がどのような値に収束するかについても明らかにした。

2. プロセスの直交展開

プロセスのインパルス応答関数を $h(t)$ とすれば、それは正規直交関数系 $\{\varphi_i(t)\}$ をもちいてつぎのように展開される。ただし時間軸を伸縮させるパラメータ λ を導入しておく。

$$h(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(\lambda t) \quad (1)$$

$$\lambda \int_0^{\infty} \varphi_i(\lambda t) \varphi_j(\lambda t) dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \text{ に対して} \\ 1 & i = j \text{ に対して} \end{cases} \quad (2)$$

(2)式によって展開係数 a_i は、

$$a_i = \int_0^{\infty} h(t) \varphi_i(\lambda t) dt \quad (3)$$

となる。

直交関数系をどのような基準で選択するか、さらに

† 第8回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭 44・8)

は式の展開はとうぜん有限項で打ち切らなければならないが、その項数の定め方などは重要であるが、ひじょうにむずかしい問題である。これについては 5. で再びふれる。いちおう従来の結果から回路実現の容易さを考慮してラグエル直交関数系⁴⁾をえらび、展開項数は L とする。ラグエル直交関数系およびそのラプラス変換はそれぞれつぎようになる。

$$\varphi_i(\lambda t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{i!} e^{\lambda t/2} \frac{d^i}{d(\lambda t)^2} \{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}\} \quad (4)$$

$$\Phi_i(s) = \mathcal{L}[\varphi_i(\lambda t)] = \frac{\sqrt{\lambda}}{s + \lambda/2} \left(\frac{s - \lambda/2}{s + \lambda/2} \right)^i \quad (5)$$

ここで、 $\mathcal{L}[\]$ はラプラス変換を意味する。

(3) 式の展開係数 a_i を実際のプロセスに対して求める方法を考える。以下では (1) 式の右辺で表わされているように直交関数系 $\{\varphi_i(t)\}$ の 1 次結合で表わされるものを直交フィルタとよぶことにし、これを Fig. 1

Fig. 1 Block diagram of orthonormal filter

に示す。係数 a_i はプロセスと直交フィルタとの出力差の自乗（平均値）を最小にするように最急降下法あるいはその変形した方法によって定める。プロセスへの入力を、 $x(t)$ 、出力を $y(t)$ 、直交フィルタの各要素の出力を $\eta_i(t)$ とすれば係数計算式はつぎのようになる。

$$\frac{da_i(t)}{dt} = -k\eta_i(t)\varepsilon(t) \quad (\text{最急降下法}) \quad (6)$$

$$(i=0, 1, \dots, (L-1))$$

$$\frac{da_i(t)}{dt} = -k\eta_i(t)\text{sgn}(\varepsilon(t)) \quad ((6) \text{ 式の変形})$$

$$(i=0, 1, \dots, (L-1))$$

ここで、

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^{L-1} a_i \eta_i(t) - y(t) \quad (8)$$

$$\eta_i(t) = \int_0^\infty \varphi_i(\lambda \tau) x(t-\tau) d\tau \quad (9)$$

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (10)$$

$$\text{sgn}(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \varepsilon \geq 0 \text{ のとき} \\ -1 & \varepsilon < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

k は収束の速さに関係する任意の正の定数である。

(6), (7) 式で与えられる計算式をもちいた係数測定回路を Fig. 2 に示す。スイッチ $sw1, sw2, \dots$ を A

Fig. 2 Block diagram of measurement circuit

側に倒したときには (6) 式の最急降下法の計算を行ない、B 側にしたときには (7) 式に相当する。なお $sw1, sw2, \dots$ は $\text{sgn}(\varepsilon(t))$ によってオンオフする。これら 2 つの計算法は後述するが、本質的には同じである。しかし (7) 式の計算式に従ったほうが乗算器が半分と少なくそれだけ収束における誤差も小さくなる利点がある。

3. 展開係数とプロセスのパラメータの決定

種々のプロセスのインパルス応答関数に対する展開係数 a_i は (3) 式によって計算することができ、その結果が Table 1 にまとめてある。さらに 2. で測定された展開係数 a_i をもちいてプロセスがたとえば 1 次遅れ系であるのか、2 次遅れ系なのかという形を定めるためには判定式が必要となるが、1 つの計算例を示すつぎのようにして求められる。

1 次遅れ系 $\frac{1}{s+\alpha}$ のとき

Table 1 Some examples of expansion coefficients

trans. fun.	imp. resp.	expansion coefficient
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$	$a_i = \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha + \lambda/2} \left(\frac{\alpha - \lambda/2}{\alpha + \lambda/2} \right)^i$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$	$a_i = \sqrt{\lambda} \frac{(\alpha - \lambda/2)^{i-1}}{(\alpha + \lambda/2)^{i+2}} \times \{\alpha - (2i+1)\lambda\}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^3}$	$\frac{1}{2}t^2e^{-\alpha t}$	$a_i = \sqrt{\lambda} \frac{(\alpha - \lambda/2)^{i-3}}{(\alpha + \lambda/2)^{i+3}} \times \{\alpha^2 - 2(2i+1)\alpha + (2i^2 + 2i + 1)\lambda^2\}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$a_i = \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega} \frac{\sin^{i+1} \theta_1}{\sin^i \theta_2} \times \sin \{(i+1)\theta_1 - i\theta_2\}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$	$a_i = \frac{1}{\beta - \alpha} \left\{ \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha + \lambda/2} \times \left(\frac{\alpha - \lambda/2}{\alpha + \lambda/2} \right)^i - \frac{\sqrt{\lambda}}{\beta + \lambda/2} \times \left(\frac{\beta - \lambda/2}{\beta + \lambda/2} \right)^i \right\}$

where $\theta_1 = \tan^{-1} \omega / (\alpha + \lambda/2)$, $\theta_2 = \tan^{-1} \omega / (\alpha - \lambda/2)$

Table 1 から

$$a_i = \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha + \lambda/2} \left(\frac{\alpha - \lambda/2}{\alpha + \lambda/2} \right)^i \quad (11)$$

これから,

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \left(\frac{\alpha - \lambda/2}{\alpha + \lambda/2} \right) \quad (12)$$

$$\frac{a_{i+2}}{a_{i+1}} = \left(\frac{\alpha - \lambda/2}{\alpha + \lambda/2} \right) \quad (13)$$

となり, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}}$ において $a_{i+1}^2 - a_i a_{i+2} = 0$

したがって, 判定式,

$$D = a_{i+1}^2 - a_i a_{i+2} \quad (14)$$

が求まる. 展開係数の間で(14)式で示す判定式 D が 0 になるときは 1 次遅れ系と決定する. 同様な計算を他の例について求めてまとめたものが **Table 2** である. この **Table 2** で 1 次遅れ系と同じ判定式をもつものが 1 つあり, それの伝達関数は $1/s$ である. もちろんこの場合にはすべての展開係数 a_i の絶対値が等しいという別の特徴をもっている. つぎに(14)式の判定式によってどのようなプロセスであるかが定まったときにはそのプロセスに含まれる未知のパラメータを測定値から計算しなければならない. このパラメータ計算式をまとめたものが **Table 3** である. 以上の結果をもちいと低次の主要なプロセスについて実験を行なうことができ, その結果をまとめると **Table 4** となる.

Table 2 Some examples of discriminant

trans. fun.	discriminant D
$\frac{K}{s+\alpha}$	$D_1 = a_i a_{i+2} - a_{i+1}^2 \quad i \geq 0$
$\frac{K}{(s+\alpha)^2}$	$D_{11} = 4a_0 a_2 - (a_0 + a_1)(3a_1 - a_0)$
$\frac{K}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$D_{22} = a_1(a_0 a_3 + a_1 a_2) - (a_0 + a_1)(a_0 a_2 - a_1^2)$
$\frac{K}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$D_{23} = (a_0 + a_1)(a_0 a_2 - a_1^2) - a_0(a_0 a_3 - a_1 a_2)$

Table 3 Computation rules of process parameter

trans. fun.	parameters
$\frac{K}{s+\alpha}$	$\alpha = \frac{\lambda}{2} \frac{a_0 + a_1}{a_0 - a_1} \quad K = \frac{a_0^2}{a_0 - a_1}$
$\frac{K}{(s+\alpha)^2}$	$\alpha = \frac{\lambda}{2} \frac{3a_0 + a_1}{a_0 - a_1} \quad K = -\frac{4\lambda^2 a_0^3}{(a_0 - a_1)^2}$
$\frac{K}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$\alpha = \frac{\lambda}{2} \frac{a_0 a_1 - a_0 a_2 + a_1^2 - a_0^2}{a_0 a_2 - a_1^2} \quad \beta = \frac{\lambda}{2} \frac{a_0 P_1}{a_1^2 - a_0 a_2} \quad K = \frac{2\lambda a_0^2}{P_1}$
$\frac{K}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\alpha = \frac{\lambda}{2} \frac{3a_0 + a_1 - P_2}{a_0 - a_1 + P_2} \quad \beta = \frac{\lambda}{2} \frac{3a_0 + a_1 + P_2}{a_0 - a_1 - P_2} \quad K = \frac{\lambda a_0^2}{P_2}$

where $P_1 = (3a_1^2 + 2a_0 a_1 - a_0^2 - 4a_0 a_2)^{1/2}$
 $P_2 = (a_0^2 + 4a_0 a_2 - 2a_0 a_1 - 3a_1^2)^{1/2}$

Table 4 Some examples of identified process

trans. fun.	calculated examples	
$\frac{1}{s+1}$	$\frac{0.96}{s+0.97} \quad (\lambda=0.3)$	$\frac{1.00}{s+1.06} \quad (\lambda=1.0)$
$\frac{0.7}{s+0.5}$	$\frac{0.68}{s+0.48} \quad (\lambda=0.6)$	$\frac{0.7}{s+0.49} \quad (\lambda=0.8)$
$\frac{1}{s^2+3s+2}$	$\frac{1.19}{s^2+3.16s+2.13} \quad (\lambda=0.8)$	$\frac{1.09}{s^2+3.05s+1.9} \quad (\lambda=1)$
$\frac{1}{(s+1)^2}$	$\frac{0.95}{(s+0.92)^2} \quad (\lambda=0.8)$	$\frac{0.97}{(s+1.08)^2} \quad (\lambda=1)$

この実験においては入力 $x(t)$ として白色雑音 (クロック周波数を 150 Hz にとった 20 段のシフトレジスタによる発生される M 系列雑音) を低域ろ波器 (その伝達関数 $1/(s+0.5)$) に通したものを利用した. 本論文で提案すると同定方法は以上のものであるが, 以下これらの定量的検討を行なう.

4. 推定計算の収束値の検討

展開係数を求める方法として(6), (7)式の計算式を用いたが, これらの計算式は本質的に安定であり, その収束値がどのような値になるかを検討しておけばよい. この章ではプロセスのインパルス応答関数はつぎの(1')式で記述されるものとする.

$$h(t) = \sum_{i=0}^{L-1} a_{di} \varphi_i(\lambda t) + \sigma(t) \quad (1')$$

ここで, $\sigma(t)$ は L 個の展開係数をもちいて記述されなかった成分を表わす. まず(6)式で $x(t)$ が平均値 0 の白色雑音であるとし ε^2 を最小にする. 以後の議論では $x(t)$ の定常性を仮定する. (6), (7)式の微分方程式は非定常で厳密には確率微分方程式の形をとるが, これを避けてつぎのような方法で収束値を評価する. (6)式の微分方程式に正規性見本過程 $x(t)$ の要素を加え時刻 t で観測することによって $a_i(t)$ を求める実験を同一初期値について繰り返す. このようにして得られる $a_i(t)$ の集合を想定し, この平均値を調べる. 記述を簡単にするため $a_i(\bar{t})$ ($\bar{}$ は平均操作を表わす) を $a_i(t)$ とかき, $\lambda=1$ とすると(6)式から,

$$\begin{aligned} \frac{da_i(t)}{dt} = & -k \left[\sum_{j=0}^{L-1} a_j(t) \int_0^\infty \int_0^\infty \right. \\ & \times \varphi_i(\tau) \varphi_j(\omega) x(t-\tau) x(t-\omega) d\tau d\omega \\ & \left. - \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_i(\omega) h(\tau) x(t-\tau) x(t-\omega) d\tau d\omega \right] \quad (15)^{*1} \end{aligned}$$

(15)式を導くには各変数は正規性確率変数であるとし, $\overline{x(t)} = 0$ としてある.

*1 正規性確率変数 x, y, z に関する平均操作についてつぎの関係式をもちいた.

$$\overline{xyz} = \overline{xy} \cdot \bar{z} + \overline{xy} \cdot \bar{y} + \overline{yz} \cdot \bar{x} - 2 \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$$

ここで $a_i(t)$ が正規性確率変数としているが、これは(6)式をつぎのように変形し、近似したものである。

まず、 $h(\tau) = \sum_{j=0}^{L-1} a_{dj} \varphi_j(\tau)$ とおき、 $a_i(t) - a_{di} = b_i(t)$ と変数変換すると、

$$\frac{db_i(t)}{dt} = -k \sum_{j=0}^{L-1} b_j(t) \eta_i(t) \eta_j(t)$$

さらに時刻 t を固定して、

$$b_i(t + \Delta t) = b_i(t) - k \Delta t \sum_{j=0}^{L-1} b_j(t) \eta_i(t) \eta_j(t)$$

とする。 $\eta_i(t)$ ($i=0, 1, \dots, (L-1)$) は正規性確率変数であるが必ずしもこれら相互間の相関は0でない。いま $\phi_{ij}(t) = \eta_i(t) \eta_j(t)$ とすると確率密度関数 $P(\phi_{ij})$ はつぎのように与えられる⁸⁾。

$$P(\phi_{ij}) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{\rho |\phi_{ij}|}{1-\rho^2}\right) K_0\left(\frac{|\phi_{ij}|}{1-\rho^2}\right)$$

ρ は正規化された相関係数、 $K_0(\cdot)$ は変形ベッセル関数である。時間を t に固定しているので省略した。

この $P(\phi_{ij})$ は $|\phi_{ij}|$ が大きいところで少しはずれるが、正規分布で近似することができる。 $\eta_i(t)$ ($i=0, 1, \dots$) 相互間の相関係数が小さいときには $b_i(t)$ を固定して考えると $b_i(t + \Delta t)$ は正規性確率変数と近似できる。特に相関がなければひょうじょうによい近似であることが知られている⁸⁾。このことから $a_i(t)$ を正規性確率変数とみなしている。(15)式に $\overline{x(t-\tau)x(t-\omega)} = \delta(\tau-\omega)$ の関係をもちい $h(t)$ の第 i 番目の展開係数 a_{di} を使って書き直すと、

$$\frac{da_i(t)}{dt} = -ka_i(t) + ka_{di} \quad (i=0, 1, \dots, L-1) \quad (16)$$

これから、

$$a_i(t) = a_{di}(1 - e^{-kt}) \quad (i=0, 1, \dots, L-1) \quad (17)$$

となり(1')式のように $\sigma(t)$ があるときでも $t \rightarrow \infty$ となれば展開係数の個数 L に相当する係数だけは正しく a_{di} と求まることがわかる。つぎに有色雑音の場合について考察する。(15)式を求めたと同じ考え方から、

$$\begin{aligned} \frac{da_i(t)}{dt} = & -k \left[\sum_{j=0}^{L-1} a_j(t) \int_0^\infty \int_0^\infty \right. \\ & \times \varphi_i(\tau) \varphi_j(\omega) \overline{x(t-\tau)x(t-\omega)} d\tau d\omega \\ & \left. - \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_i(\omega) h(\tau) \overline{x(t-\tau)x(t-\omega)} d\tau d\omega \right] \end{aligned}$$

となり、(1')式をもちいると、

$$\begin{aligned} \frac{da_i(t)}{dt} = & -k \left[\sum_{j=0}^{L-1} (a_j(t) - a_{dj}) \int_0^\infty \int_0^\infty \right. \\ & \times \varphi_i(\omega) \varphi_j(\tau) \overline{x(t-\omega)x(t-\tau)} d\tau d\omega \\ & \left. - \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma(\tau) \varphi_i(\omega) \overline{x(t-\tau)x(t-\omega)} d\tau d\omega \right] \end{aligned} \quad (18)$$

(18)式を行列で表示すれば、

$$\frac{da(t)}{dt} = -kQ(a(t) - a_d) + k\delta \quad (19)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= [a_0(t), a_1(t), \dots, a_{L-1}(t)]^T, \\ a_d &= [a_{d0}, a_{d1}, \dots, a_{dL-1}]^T \\ \delta &= [\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{L-1}]^T \\ \sigma_i &= \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma(\tau) \varphi_i(\omega) \overline{x(t-\tau)x(t-\omega)} d\tau d\omega \\ Q &= \{q_{ij} = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_i(\omega) \varphi_j(\tau) \overline{x(t-\tau)x(t-\omega)} d\tau d\omega\} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(19)式に $w = a - a_d$ $w(0) = -a_d$ なる変数変換を行ない、 $\delta = 0$ とすれば、

$$\frac{dw(t)}{dt} = -kQw(t) \quad w(0) = -a_d \quad (21)$$

となり Q は正定 (positive definite) であるからつぎの不等式⁹⁾ をもちいることができる。通常、 Q は非負であるが正定値としてもその適用範囲はあまり制限されるものでない。以下では Q を正定値と仮定する。 Q の最大および最小の固有値を A_e, A_s とすれば、

$$\|w(t)\| \leq \|w(0)\| \exp\left[-\int_0^t A_s dt'\right]$$

ここで、 $\|w\| = (w, w)^{1/2}$

であり $\lim_{t \rightarrow \infty} \|w(t)\| = 0$ となる。いっぽう、 $\sigma(t) \neq 0$ のときには解析は困難であるが、(7)式をもちいたときの解析の結果から調べてみる。

(7)式を解くため、近似として(15)式を求めたと同じ議論をすることにより初期値0から出発したとき時刻 t における $a_i(t)$ の集合を想定し、その平均値を求める方法⁵⁾による。(7)式から、

$$\frac{da_i(t)}{dt} = -k \overline{\eta_i \text{sgn}(\varepsilon)} \quad (22)$$

k が十分小さいときには $a_i(t)$ は定常過程とみなすことができ、 $x(t)$ が正規性であるから η_i, ε は正規性確率変数である。また $a_i(t)$ についてはすでに述べた相関のある場合と同じようにして近似的に正規性確率変数とみなすことにする。このときには、

$$\begin{aligned} \overline{\eta_i \text{sgn}(\varepsilon)} &= 2 \int_{-\infty}^\infty d\eta_i \int_0^\infty \varepsilon p(\eta_i, \varepsilon) d\varepsilon \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、

$$\rho = \frac{\overline{\varepsilon(t) \eta_i(t)}}{[\overline{\varepsilon^2(t)}]^{1/2}}$$

(8), (10) 式をもちいて、 $\sigma(t) \neq 0$ から $\overline{\varepsilon^2(t)} \neq 0$ であるから、

$$\rho = \frac{1}{[\overline{\varepsilon^2(t)}]^{1/2}} \left(\sum_{j=0}^{L-1} a_j(t) \overline{\eta_i(t) \eta_j(t)} - \overline{\eta_i(t) y(t)} \right)$$

これから(23)式は,

$$\frac{da_i(t)}{dt} = -k'(t) \left(\sum_{j=0}^{L-1} a_j(t) \overline{\eta_i(t) \eta_j(t)} - \overline{\eta_i(t) y(t)} \right) \quad (24)$$

$$\text{ここで, } k'(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(\epsilon^2(t))^{1/2}}$$

(24)式に(1')式をもちい行列表示すれば,

$$\frac{da(t)}{dt} = -k'(t) Q(a(t) - a_d) + k'(t) \delta, \quad a(0) = 0 \quad (25)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= [a_0(t), a_1(t), \dots, a_{L-1}(t)]^T, \\ a_d &= [a_{d0}, a_{d1}, \dots, a_{dL-1}]^T, \quad \delta = [\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{L-1}]^T \\ \sigma_i &= \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma(\tau) \varphi_i(\omega) \overline{x(t-\tau) x(t-\omega)} d\tau d\omega \\ Q &= \{q_{ij} = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_i(\omega) \varphi_j(\tau) \overline{x(t-\tau) x(t-\omega)} d\tau d\omega\} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

(25)式において $a(t) - a_d = w(t)$ と変数変換を行なうと,

$$\frac{dw(t)}{dt} = -k'(t) Qw(t) + k'(t) \delta, \quad w(0) = a_d \quad (27)$$

$UQU^T = A$ となる対角化変換 U を(27)式に作用させて $Uw(t) = u(t)$ $U\delta = \rho$ とおけば,

$$\frac{du(t)}{dt} = -k'(t) Au(t) + k'(t) \rho, \quad u(0) = Ua_d \quad (28)$$

Q は雑音を直交フィルタに加えたときの出力の共分散行列であり, 行列 A は正の固有値をもつ対角行列である。(28)式の平衡点での値 $u(\infty)$ はつぎのようになる。

$$u_i(\infty) = \rho_i / \lambda_i \quad (29)$$

ここで, $u_i(\infty)$ はベクトル $u(\infty)$ の第 i 成分であり, λ_i は対角行列 A の第 (i, i) 成分である。ここで $u_i - \frac{\rho_i}{\lambda_i} = v_i$ とおけば(28)式から,

$$\frac{dv(t)}{dt} = -k'(t) v$$

いま正值対称行列 P をもちいて $V = v^T(t) P v(t)$ を作ると, これは平衡点 0 から $u(t)$ までの距離に相当している。これから,

$$\frac{dV}{dt} = 2 \left(\frac{dv(t)}{dt} \right)^T P v(t) = -2k'(t) v(t)^T P v(t) \leq 0$$

となりつねに平衡点 0 に収束する。等号が成分するのは $v(t) = 0$ のときのみである。(29)式を逆変換すると,

$$U^T u(\infty) = U^T A^{-1} \rho$$

となり, けっきょくつぎのようになる。

$$w(\infty) = Q^{-1} \delta \quad (30)$$

ここで肩の (-1) は逆行列を表わす。

(25)式の微分方程式が正しい解に収束するためには変数変換した(27)式において $w(t) \rightarrow 0$ となることである。ところが(30)式は有限の値をもつためかたよった収束になっている。このかたよりは L が大きくなれば $\sigma(\tau) \rightarrow 0$ となり(30)式において $(w)t \rightarrow 0$ となる。あるいは直交関数系 $\{\varphi_i(\lambda)\}$ の時間パラメータ λ を適当にえらぶことにより L 個でも $\sigma(\tau)$ を小さくすることが可能である。実際にオフラインで同定するときには 3. でプロセスの未知パラメータの計算に使用する展開係数が数個であるなら, 行列 Q を直接測定しその逆行列を評価することにより(30)式から, 近似的に補正することも可能である。

5. 展開係数の個数と直交関数系の選択

4. で述べたように展開係数の個数は推定精度と重要な関係をもつ, L が大きくなり $\sigma(t) = 0$ とみなしうるときには測定される係数値は正しいとできるが, 実際に L を大きくすると, それぞれの係数は有意でない値をもつことになる。それは有限時間で測定すれば, すなわちデータ長が一定であるとしたとき展開係数が増すと各係数の分散が増し, 本来 0 であるべき係数も 0 とは測定されない。この結果, 係数が 0 でないということが有意であると結論できないことが起こるためあまり展開係数の個数を多くすると全体の分散が大きくなり好ましくない。これを避ける方法としては L を固定して $\sum_{i=0}^{L-1} a_i^2$ が大きくなるように直交関数系のパラメータ λ をえらぶことである。ラグール直交関数系はポテンシオメータを可変にすることにより容易に λ を変えることができる。これを Fig. 3 に示す。この Fig. 3 には 1 つのブロックのみを示したが連動ポテンシオメータによりきわめて簡単に, また装置としてもサーボモータにより自動化することも可能である。

Fig. 3 Orthonormal filter with variable parameter

直交関数系としては他に多くのものがあるが, 区間 $(0, \infty)$ で直交するものとしてはラグール直交関数系と比較して特にすぐれたものはいまのところ見当たらない。少し異なったものとして有限区間 $(0, T)$ で直交す

る関数系としてアダマール行列から作られる Walsh 関数列があり、これを利用した同定問題については現在検討中である。つぎに問題になるのは各展開関数がプロセスの変化に対してどのように変化するか、いわゆる感度の問題である。簡単な例についての実験結果を示すと Fig. 4 となる。この実験はラゲル直交関数系についてのみ行なったのであるが、 λ が比較的大きいときには係数値の変化も顕著になっているが、実際にはどのような λ をもちいれればよいかは個々の対象に応じて決められる必要があり一概には論じられない。

Fig. 4 Sensitivity for process parameter variation

つぎにプロセスの伝達関数に含まれるパラメータを変化させたとき判定式の値がどのように変化するかを調べてみよう。一例としてつぎのような簡単な遅れ系を採り上げる^{*2}。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \mu \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

ここで、 u は制御入力、 μ がパラメータで、 x, z は状態変数である。 $\mu=0$ のときには 1 次遅れ系、 $\mu \neq 0$ のときは 2 次である。いま $\mu=0$ の近傍における D_{11} 、 D_{22} および D_{23} の値を Fig. 5 に示す。 D_{21} についてはこのスケールでははずれるため記入していない。この Fig. 5 からみても感度はかなり良いと思われる。

6. 本方法の適用条件の検討

ラゲル直交関数系は(5)式からも明かなように位相推移器とみられる。したがって、ある周波数の正弦波が入力 $x(t)$ として加えられるとプロセスの位相推移と同程度の位相推移をもった $\eta_j(t)$ があると、この

Fig. 5 Sensitivity of discriminants D_{11} , D_{23} & D_{22} for process parameter μ

係数だけが大きくなり、いわゆる特定周波数に対する定常応答の解析になってしまう。このようなときには、その正弦波成分を抑えるようにプロセスの後と直交フィルタの前に適当なフィルタを入れ、雑音成分についてのみ同定計算を行なうようにしなければならない。このことは直流成分がある場合にも考慮しなければならない。つぎに判定式 D について考慮すると、これは $D \equiv 0$ となるものをプロセスの形として決定しているのである。さきに述べた実験においては余裕があったが、 $D \equiv 0$ となるものが 2 つ以上生じた場合には統計的な判定を行わなければならない。本文では判定式がひじょうに複雑なため統計的決定については議論していないが今後の重要な問題⁷⁾である。

7. む す び

以上、本論文では低次プロセスの同定とその形の決定をオンラインで行なう方法を提案し、その誤差補正について近似的な解析した。またパラメータの推定計算は最急降下法によっているから収束を早くするためには定数を可変にすることも考えられるが、これについては触れなかった。また、この方法は与えられたプロセスをあらかじめ定めた低次数の伝達関数で近似するときのパラメータ決定にも、すでに求められた計算式をもちいて適用することができる。すでに述べたように統計的決定の問題、他の直交関数系を用いたときの解析などいくつかの解決しなければならない問題が残った。最後に日ごろ御討論いただく田中研究室の諸氏、特に、大学院生田村進一君に感謝する。

*2 この例はつぎの論文から採用した。P. V. Kokotovic & P. Sannuti; IEEE Trans. on AC, AC-13-4 (1968)

参 考 文 献

- 1) 相良：同定問題，計測と制御，8-4，268/280 (1969)
- 2) T. Kitamori：Applications of Orthogonal Functions to the Determination of Process Dynamics Characteristics and to the Construction of Self-Optimizing Control, 1st IFAC Moscow, 613/618 (1960)
古田：可変直交関数を用いた Process Identification, 計測と制御，5-12，867/874 (1966)
- 3) 茅：プロセス動特性の統計的推定，計測と制御，6-4，266/279 (1967)
- 4) 樋口ほか：未知波形の適応同定，計測自動制御学会論文集，5-2，127/133 (1969)
- 5) 森下：未知信号を雑音から分離する適応ろ波器，計測自動制御学会論文集，1-3，199/209 (1965)
- 6) L. A. Zadeh, et al.：Linear System Theory, p. 379 McGraw Hill (1963)
- 7) 茅：伝達関数のモデルの妥当性の検定，計測自動制御学会論文集，5-4，348/357 (1969)
- 8) G. M. Roe, G. M. White：Probability Density Functions for Correlators with Noisy Reference Signals, IRE on IT, IT-7-1 (1961)

第 6 巻 第 4 号 正 誤 表

(栗林勝利・中島衆男著「機械式無段変速機を使った On-Off 制御系の持続振動」)

ページ	欄	行	誤	正
328	右	最下行	条件付安定とする。	条件付安定となる。
331	左	↓ 15	1) <u>4.</u> の仮定……	1) <u>3.</u> の仮定……
331	左	最下行	(ただし $\underline{\dot{\theta}}_i = \text{const.}$)	(ただし $\underline{\dot{\theta}}_i = \text{const.}$)
332	左	(30 b) 式中	$+ Bn_0 \{(t-\tau)^3 \underline{u} \cdot (t-\tau) \dots \dots$	$+ Bn_0 \{(t-\tau)^3 \underline{u} (t-\tau) \dots \dots$
332	左	(32 b) 式中	$\dots - \frac{Bn_0 A^2}{2\underline{B}}$	$\dots - \frac{3n_0 A^2}{2\underline{B}}$
333	右	(43 a) 式	右辺 $< \underline{1}$	右辺 < -1
333	右	(43 b) 式	分母中 $\sqrt{(\tau_0/2 - A/B + \underline{\dot{\theta}}_s/B\underline{\tau}_0)^2 - \dots}$	$\sqrt{(\tau_0/2 - A/B + \underline{\dot{\theta}}_s/B\underline{n}_0)^2 - \dots}$
334	左	(45 a) 式の第 2 式の右辺	$\{1 - (2 + 3\underline{\beta}_0/\underline{\dot{\theta}}_0) (\dots$	$\{1 - (2 + 3\underline{\beta}_0/\underline{\tau}_0) (\dots$
334	左	(45 b) 式の左辺 第 1 項の分子中	$\left\{ \underline{\dot{\theta}}_i - Bn_0 \left(\frac{A}{B} - \frac{\tau_0}{2} \right) \right\}^2$	$\left\{ \underline{\theta}_i - Bn_0 \left(\frac{A}{B} - \frac{\tau_0}{2} \right) \right\}^2$
335	左	↓ 6	$\underline{\dot{\theta}}_{id} < \underline{\dot{\theta}}_1 < \underline{\dot{\theta}}_{if}, \dots \dots$	$\underline{\dot{\theta}}_{id} < \underline{\dot{\theta}}_1 < \underline{\dot{\theta}}_{if}, \dots \dots$
〃	右	Fig. 11 (a)	$\underline{\dot{\theta}} = 0.151$ [rad/s]	$\underline{\dot{\theta}} = 0.151$ [rad/s]
〃	右	Fig. 11 (b)	$\underline{\dot{\theta}}_1 = 0.064$ [rad/s]	$\underline{\dot{\theta}}_1 = 0.064$ [rad/s]
〃	右	Fig. 11 (c)	$\underline{\dot{\theta}}_1 = 0.0955$ [rad/s]	$\underline{\dot{\theta}}_1 = 0.0955$ [rad/s]
336	左	↓ 5	巻きに <u>巻き</u> 径の……	巻きによる <u>巻き</u> 径の……