ある非正規性非定常不規則入力をうける 非線形フィルタの最適構成†

田 上 重 美

徳島大学工学部 徳島市南常三島町 2-1

(昭和 45 年 3 月 6 日 受付)

On the Optimum Construction of the Nonlinear Filter with Nongaussian Nonstationary Random Input

Shigemi TAGAMI

(Faculty of Engineering Tokushima University, Tokushima)

(Received March 6, 1970)

This paper shows the practical procedure how to construct the nonlinear filter with nongaussian nonstationary random input by using the orthogonal function weighted by the probability distribution.

As for the optimizing criterion, the mean squared value of the difference between the actual and the desired output signals of the filter is taken for the convenience of mathematics. And the mean squared value of the error is evaluated quantitatively.

The technique described here is a means for circumventing difficulties in the mathematical treatment, and in the actual design of the optimum nonlinear filter, it becomes considerably simplified to decide which design is physically realizable.

1. 緒 言

Wiener の理論¹⁾に基づく最適フィルタについてはいままでに多くの理論的研究がおこなわれ、いちおう体系づけられた感がある。しかしながら、これらの研究で取り扱われた信号は定常不規則過程に属する場合であった。このような見地から筆者らは飛しょう体がエンジンの振動などのような内部雑音によって乱されながらある軌道にそって上昇をつづけているとき、突風のような非定常不規則外乱をうけた場合に、目標値に追従するためには制御装置をどのように設計すればよいかということについてじゃっかんの考察をおこなった^{2), 3)}。

一般に rms 誤差規範を用いるかぎり、入力为正規過程であれば最適系は線形でなければならない⁴⁾。

しかし、入力が非正規過程であれば最適系は非線形特性をもつようになることは認められているにもかかわらず、実際の設計には数学的手法の困難さなどもあ

ってその研究は少ないのが現状である。

しかし、将来の自動制御の動向を考察するならば、正規性不規則信号のみを考察するにとどまらず、非正規性非定常過程に属する信号を対象とした制御理論を確立する必要のあることはいうまでもないことである。

非線形ろ波理論に関する研究は Zadeh の理論⁵⁾以来いくつか試みられている^{6)~8)}。これを大別するとラゲールろ波器とエルミート関数発生器を用いた Wiener 理論、ボルテラ級数を用いた理論、および確率分布を荷重とする直交関数を用いた理論に分けられる。

しかしながら、いずれも数学的取り扱いが困難となり、実際的にはろ波器の物理的構成が困難である。

本研究は開回路理論の立場にたって、非正規性の非定常不規則入力をうける非線形フィルタの最適構成について、より実際的な見地から上述の難点を除去し有用な非線形フィルタの設計手法について考察したものである。

本研究では信号が非正規確率過程である場合を取り扱っているが、特にこのような場合には設計規範についても種々の検討を要するが、ここではもっとも実

† 第 11 回自動制御連合講演会で発表 (昭 43・10)

用的な観点から従来の制御理論にしたがって、rms 誤差規範を用いることにする。

おもな記号の説明

- t, τ : 時間変数
 $i(t)$: 非線形フィルタに対する入力信号
 $x(t)$: 非線形フィルタの出力信号
 $s(t)$: 非正規性非定常不規則信号
 $n(t)$: 正規性非定常不規則外乱
 $z(t)$: zero memory 形非線形要素に対する入力信号
 $\varepsilon(t)$: 推定誤差信号
 $g(t, \tau)$: 線形要素の荷重関数
 $f(z)$: zero memory 形非線形要素の伝達特性
 $F(j\omega)$: 非線形関数 $f(z)$ のフーリエ変換
 $p(z)$: 信号 $z(t)$ の 1 次元確率密度関数
 $p(s)$: 信号 $s(t)$ の 1 次元確率密度関数
 $p(z, s)$: 信号 $z(t)$ および信号 $s(t)$ の同時確率密度関数
 $p(s|z)$: 信号 $s(t)$ の条件付確率密度関数
 $\langle \varepsilon(t)^2 \rangle$: 誤差信号 $\varepsilon(t)$ の 2 乗平均値
 $\varphi_{ss}(t, \tau)$: 信号 $s(t)$ の時刻 t および時刻 τ における自己相関関数
 $\varphi_{nn}(t, \tau)$: 外乱 $n(t)$ の時刻 t および時刻 τ における自己相関関数
 α : random constant
 γ_z : 信号 $z(t)$ の分布の尖鋭度
 γ_s : 信号 $s(t)$ の分布の尖鋭度
 $\sigma_z(t)$: 信号 $z(t)$ の標準偏差
 $\sigma_s(t)$: 信号 $s(t)$ の標準偏差
 $\sigma_z(t)^2$: 信号 $z(t)$ の分散
 $\sigma_s(t)^2$: 信号 $s(t)$ の分散
 $P_n(s)$: 変数 s に関する直交多項式
 $Q_n(z)$: 変数 z に関する直交多項式
 $\langle \rangle$: 集合平均を表わす記号

2. 問題の記述

ここで考察する非線形フィルタは、Fig. 1 に示されるように線形要素と非線形要素の直列結合で構成されるものとする。図において $g(t, \tau)$ は線形要素の荷重

Fig. 1 Block diagram of the optimum filter

関数を、 $f(z)$ は zero memory 形非線形要素の伝達特性を示すものとする。系の入力信号 $i(t)$ は、

$$i(t) = s(t) + n(t) \quad (1)$$

のように信号 $s(t)$ と外乱 $n(t)$ の和で示され、 $\varepsilon(t)$ は推定誤差とする。

ここで、信号 $s(t)$ と外乱 $n(t)$ の統計的性質が、それぞれつぎのようにあたえられるものとしよう。

(1) 信号 $s(t)$ は、Fig. 2 で示されるように非正

Fig. 2 Nonstationary random signal, $s(t)$

規性非定常不規則過程に属するものとし、

$$s(t) = \frac{\alpha}{2} \cdot t \quad (2)$$

の形であたえられるものとする。ただし、 α は random constant* である。

いま、 α の 2 乗平均値を $\overline{\alpha^2}$ とすれば、信号 $s(t)$ の時刻 t と時刻 τ における自己相関関数、 $\varphi_{ss}(t, \tau)$ は、

$$\varphi_{ss}(t, \tau) = \langle s(t)s(\tau) \rangle_{av.} = \frac{\overline{\alpha^2}}{2} t\tau \quad (3)$$

によってあたえられる。

(2) 不規則外乱 $n(t)$ は Fig. 3 に示すような非定常不規則過程に属するものとするれば、外乱 $n(t)$ の時刻 t と時刻 τ における自己相関関数 $\varphi_{nn}(t, \tau)$ は、

Fig. 3 Nonstationary random disturbance, $n(t)$

$$\varphi_{nn}(t, \tau) = \langle n(t)n(\tau) \rangle_{av.} = \psi t e^{-\beta t} \delta(t - \tau) \quad (4)$$

によってあたえられる⁹⁾。

ただし、 $\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数であり、 ψ および β は正の定数である。

以上のような統計的性質を有する非正規性非定常入力をうける非線形フィルタの最適構成について考察する。

* パラメータはある値をとるが、その値はある確率法則に支配される確率変数であるような係数をいう^{2), 3)}。

3. 線形要素のシンセシス

線形要素の出力信号を $z(t)$ とすれば $\langle [s(t)-z(t)]^2 \rangle_{av}$ が最小となるような条件のもとに、線形要素の荷重関数 $g(t, \tau)$ を決定しよう。

系の入力 $i(t)$ の時刻 t と時刻 τ における自己相関関数 $\varphi_{ii}(t, \tau)$ はつぎのようにあらわすことができる。

$$\begin{aligned} \varphi_{ii}(t, \tau) &= \langle i(t)i(\tau) \rangle_{av} = \varphi_{ss}(t, \tau) + \varphi_{nn}(t, \tau) \\ &= \frac{\alpha^2}{4} t\tau + \phi t e^{-\beta t} \delta(t-\tau) \end{aligned} \quad (5)$$

$\langle [s(t)-z(t)]^2 \rangle_{av}$ を最小とする荷重関数 $g(t, \tau)$ は、次式に示すような Booton の積分方程式¹⁰⁾を解いてもとめればよい。

$$\varphi_{si}(t, \tau) = \int_0^t g(t, \sigma) \varphi_{ii}(\tau, \sigma) d\sigma \quad (6)$$

ただし、 $\varphi_{si}(t, \tau)$ は信号 $s(t)$ と系の入力 $i(\tau)$ の相互相関関数である。また不規則外乱 $n(t)$ は (4) 式から明らかなように散射雑音 (非定常白色雑音) であるから、信号 $s(t)$ と外乱 $n(\tau)$ は無相関であると仮定すれば、

$$\varphi_{si}(t, \tau) = \varphi_{ss}(t, \tau) \quad (7)$$

という関係式を得る。したがって (5) 式を (6) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \varphi_{ss}(t, \tau) = \varphi_{si}(t, \tau) &= \frac{\alpha^2}{4} \tau \int_0^t g(t, \sigma) \sigma d\sigma + \phi \tau e^{-\beta t} g(t, \tau) \\ &\quad (0 \leq \tau \leq t) \end{aligned} \quad (8)$$

となるから、線形要素の荷重関数 $g(t, \tau)$ は次式に示すような積分方程式を満足するように定めればよい。

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{4} t\tau &= \frac{\alpha^2}{4} \tau \int_0^t g(t, \sigma) \sigma d\sigma + \phi \tau e^{-\beta t} g(t, \tau) \\ &\quad (0 \leq \tau \leq t) \end{aligned} \quad (9)$$

いま、(9) 式に示す積分方程式を解くため、

$$j(t) = \int_0^t g(t, \sigma) \sigma d\sigma \quad (10)$$

と置換すれば、(9) 式は、

$$\frac{\alpha^2}{4} t\tau = \frac{\alpha^2}{4} \tau j(t) + \phi \tau e^{-\beta t} g(t, \tau) \quad (11)$$

となる。この式の両辺に $e^{\beta \tau}$ をかけて、 τ について 0 から t まで積分すれば、 $j(t)$ は次式のようにもとめられる (付録 1 参照)。

$$\begin{aligned} j(t) &= \frac{\frac{\alpha^2}{4} t \left\{ \frac{e^{\beta t}}{\beta} \left(t - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \right\}}{\frac{\alpha^2}{4} \left\{ \frac{e^{\beta t}}{\beta} \left(t - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \right\} + \phi} \end{aligned} \quad (12)$$

したがって、所要の荷重関数 $g(t, \tau)$ は、(11) 式から導かれる式、

$$g(t, \tau) = \frac{\alpha^2}{4\phi} e^{\beta \tau} [t - j(t)] \quad (13)$$

へ、(12) 式を代入することによってもとめることができる。

また、線形要素の出力 $z(t)$ の 2 乗平均値 $\sigma_z(t)^2$ は、

$$\sigma_z(t)^2 = \frac{\left(\frac{\alpha^2}{4} t \right)^2 \left\{ \frac{e^{\beta t}}{\beta} \left(t - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \right\}}{\frac{\alpha^2}{4} \left\{ \frac{e^{\beta t}}{\beta} \left(t - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \right\} + \phi} \quad (14)$$

によってあたえられる。

4. 非線形要素のシンセシス

Zero-memory 形非線形伝達特性を、

$$x(t) = f[z(t)] \quad (15)$$

と表わせば、この関係は積分表示により、

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_c F(jw) e^{jwz} dw \quad (16)$$

と示すことができる¹¹⁾。ただし、非線形関数 $f(z)$ のフーリエ変換 $F(jw)$ 、および積分路 c は $f(z)$ に対応して定められるからここでは未知である。

ここで、非線形伝達特性 $f(z)$ は、

$$\langle \varepsilon(t)^2 \rangle_{av} = \langle [s(t) - x(t)]^2 \rangle_{av} \quad (17)$$

を最小にするよう決定されるものとする。

(16) 式の積分表示を用いれば、(17) 式は、

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(t)^2 \rangle_{av} &= \sigma_s(t)^2 - \frac{2}{4\pi^2} \int_c \int_{c'} F(jw_1) L(jw_2) \varphi_{zs}(w_1, w_2) \\ &\quad \times dw_1 dw_2 \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2} \int_c \int_{c'} F(jw_1) F(jw_2) \varphi_{zz}(w_1, w_2) dw_1 dw_2 \end{aligned} \quad (18)$$

となる。ただし、 $\sigma_s(t)^2$ は $s(t)$ の 2 乗平均値を表わす。

また、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{zs}(w_1, w_2) &= \langle \exp(jw_1 z + jw_2 s) \rangle_{av} \\ \varphi_{zz}(w_1, w_2) &= \langle \exp(jw_1 z + jw_2 z) \rangle_{av} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

および、

$$L(jw) = \frac{1}{(jw)^2} \quad (20)$$

であり¹²⁾、かつ積分路 c' は w 平面上で力点 $w=0$ を中心とする円周上を正方向に一周する。

さて、 $\langle \varepsilon(t)^2 \rangle_{av}$ を最小ならしめる関数 $F(jw)$ は変分法から、

$$\frac{1}{2\pi} \int_c F(jw_2) \varphi_{zs}(w_1 w_2) dw_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{c'} L(jw_2) \varphi_{zs}(w_1 w_2) dw_2 \quad (21)$$

を満足しなければならない (付録 2 参照)。

(21) 式は、(19) 式を用いてかきかえると、

$$f(z) = \frac{1}{p(z)} \int_{-\infty}^{\infty} sp(z, s) ds \quad (22)_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s p(s|z) ds \quad (22)_2$$

となる。ただし、 $p(z)$ は信号 $z(t)$ の 1 次元確率密度関数、 $p(z, s)$ は信号 $z(t)$ および $s(t)$ の同時確率密度関数として、 $p(s|z)$ は信号 $s(t)$ の条件付確率密度関数を示すものとする。

一般に非線形伝達特性の決定は、(22)₁ 式あるいは (22)₂ 式に基づいておこなうのが容易であるが、そのためには確率密度関数 $p(s|z)$ 、あるいは $p(z), p(z, s)$ が定められなければならない。

さて、Barrett Lampard 展開を用いて、信号 $z(t)$ および $s(t)$ の同時確率密度関数、 $p(z, s)$ は次式に示すような二重直交級数に展開できる¹²⁾、

$$p(z, s) = p(z)p(s) \sum_m \sum_n \mu_{mn}(t) Q_m(z) P_n(s) \quad (23)$$

ここに、 $P_n(s)$ および $Q_m(z)$ は次式で示されるような規格化直交多項式である。

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} Q_m(z) Q_n(z) p(z) dz &= \delta_{mn} \\ \int_{-\infty}^{\infty} P_m(s) P_n(s) p(s) ds &= \delta_{mn} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ただし、 δ_{mn} は Kronecker のデルタ関数である。↗

↗ また、係数 $\mu_{mn}(t)$ は直交条件からただちに、

$$\mu_{mn}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_m(z) P_n(s) p(z, s) dz ds \quad (25)$$

によってもとめることができる。

さて、(23) 式を (22)₁ 式へ代入すれば、

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{mn}(t) Q_m(z) \int_{-\infty}^{\infty} s P_n(s) p(s) ds \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mu_{m1}(t) \sigma_s(t) Q_m(z) \end{aligned} \quad (26)$$

となり非線形伝達特性を決定することができる。

いま信号 $z(t)$ および $s(t)$ の 1 次元確率密度関数が、その非正規性を考慮して Gram-Charlier 級数の 4 次の項まで近似できるとすれば、それぞれ次式のようにあたえられる^{13,14)}。

$$\begin{aligned} p(s, t) &= \left[1 + \frac{\gamma_s}{24} H_4 \left(\frac{s}{\sigma_s(t)} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_s(t)} \exp \left(-\frac{s^2}{2\sigma_s(t)^2} \right) \\ p(z, t) &= \left[1 + \frac{\gamma_z}{24} H_4 \left(\frac{z}{\sigma_z(t)} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_z(t)} \exp \left(-\frac{z^2}{2\sigma_z(t)^2} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

ここに、 γ_s および γ_z はそれぞれ信号 $s(t)$ および $z(t)$ の分布の尖鋭度を示し、両者の間には次のような関係式が成立する。

$$\gamma_z = \frac{\left\{ \frac{\alpha^2}{4} \left[\frac{e^{\beta t}}{\beta} \left(t - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \right] \right\}^2 (3 + \gamma_s) + \frac{3\alpha^2 \psi}{2} \left[\frac{e^{\beta t}}{\beta} \left(t - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \right] + 3\psi^2}{\left\{ \frac{\alpha^2}{4} \left[\frac{e^{\beta t}}{\beta} \left(t - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \right] + \psi \right\}^2} - 3 \quad (28)$$

また、直交多項式 $Q_n(z)$ は、(24) 式を用いて次のように定めることができる。

$$\left. \begin{aligned} Q_0(z) &= 1 \\ Q_1(z) &= \frac{z(t)}{\sigma_z(t)} \\ Q_2(z) &= \frac{1}{\sqrt{2 + \gamma_z}} \left\{ \left(\frac{z(t)}{\sigma_z(t)} \right)^2 - 1 \right\} \\ Q_3(z) &= \frac{1}{\sqrt{6 + 9\gamma_z - \gamma_z^2}} \left\{ \left(\frac{z(t)}{\sigma_z(t)} \right)^3 - (3 + \gamma_z) \left(\frac{z(t)}{\sigma_z(t)} \right) \right\} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

これらの値を用いて、(25) 式から係数 $\mu_{m1}(t)$ を計算すればそれぞれ次式のようになる。

$$\begin{aligned} \mu_{11}(t) &= \frac{\langle s(t) z(t) \rangle_{\text{av.}}}{\sigma_s(t) \sigma_z(t)} = \left[\frac{\frac{\alpha^2}{4} \left\{ \frac{e^{\beta t}}{\beta} \left(t - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \right\}}{\frac{\alpha^2}{4} \left\{ \frac{e^{\beta t}}{\beta} \left(t - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \right\} + \phi} \right]^{1/2} = \frac{\sigma_z(t)}{\sigma_s(t)} \\ \mu_{31}(t) &= \frac{\{ \langle s(t) z(t)^3 \rangle_{\text{av.}} - \sigma_z(t)^2 (3 + \gamma_z) \langle s(t) z(t) \rangle_{\text{av.}} \}}{\sigma_s(t) \sigma_z(t)^3 \sqrt{6 + 9\gamma_z - \gamma_z^2}} \\ &= \frac{\mu_{11}(t)}{\sqrt{6 + 9\gamma_z - \gamma_z^2}} \left\{ \frac{\frac{\alpha^2}{4} (3 + \gamma_s) \left[\frac{e^{\beta t}}{\beta} \left(t - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \right] + 3\psi}{\frac{\alpha^2}{4} \left[\frac{e^{\beta t}}{\beta} \left(t - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \right] + \psi} - (3 + \gamma_z) \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

および、

$$\mu_{01}(t) = \mu_{21}(t) = \dots = 0$$

したがって、非線形伝達特性 $f(z)$ は (26) 式から次式のようにあたえられる。

$$f(z) = z + \frac{1}{6 + 9\tau_z - \tau_z^2} \times \left\{ \frac{\alpha^2}{4} (3 + \tau_s) \left[\frac{e^{\beta t}}{\beta} \left(t - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \right] + 3\psi \right. \\ \times \left. \left\{ \frac{\alpha^2}{4} \left[\frac{e^{\beta t}}{\beta} \left(t - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \right] + \psi \right\} - (3 + \tau_z) \right\} \\ \cdot \left\{ \frac{z(t)^3}{\sigma_s(t)^2} - (3 + \tau_z)z \right\} \quad (31)$$

このようにして、zero memory 形非線形要素の伝達特性を決定することができる。

したがって、(12) 式 (13) 式および (31) 式を考慮することによって非線形最適フィルタのブロック線図を Fig. 4 に示すようにもとめることができる。た

Fig. 4 Block diagram of the optimum nonlinear filter

だし、図において $\int$ は積分記号を示すものとする。

(31) 式において、もし $\tau_s = 0$ とすれば、 $\tau_z = 0$ となり正規性非定常不規則入力をうける場合の結果と一致する [文献 2) 参照]。すなわちこのときの最適フィルタは線形系となる。

5. 誤差の 2 乗平均値

Fig. 1 から、推定誤差 $\varepsilon(t)$ の 2 乗平均値 $\langle \varepsilon(t)^2 \rangle_{av}$ は次式によってあたえられる³⁾、

$$\langle \varepsilon(t)^2 \rangle_{av, \min} = \langle s(t)^2 \rangle_{av} - \langle x(t)^2 \rangle_{av} \quad (32)$$

ここで、非線形要素の出力 $x(t)$ の 2 乗平均値をもとめるため、(26) 式を考慮すれば、

$$\langle x(t)^2 \rangle_{av} = \sigma_s(t)^2 \sum_{m=0}^{\infty} [\mu_{m1}(t)]^2 \int_{-\infty}^{\infty} [Q_m(z)]^2 p(z) dz \quad (33)$$

なる関係式が成立する。ここで $Q_m(z)$ が直交多項式であることを考慮して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} [Q_m(z)]^2 p(z) dz = 1 \quad (34)$$

という関係が得られるから、(33) 式は次のように書き表わすことができる。すなわち、

Fig. 5 Mean squared value of the error

$$\langle x(t)^2 \rangle_{av} = \sigma_s(t)^2 \sum_{m=0}^{\infty} [\mu_{m1}(t)]^2 \quad (35)$$

したがって、偏差の 2 乗平均値 $\langle \varepsilon(t)^2 \rangle_{av}$ は、(35) 式を (32) 式に代入して、

$$\langle \varepsilon(t)^2 \rangle_{av, \min} = \sigma_s(t)^2 \{ 1 - [\mu_{11}(t)^2 + \mu_{31}(t)^2 + \dots] \} \quad (36)$$

のようにもとめることができる。

この式を用いた数値計算結果を示せば Fig. 5 および Fig. 6 のようになる。

Fig. 5 は推定誤差の 2 乗平均値の時間に対する変動を β をパラメータとして示したものであり、また、Fig. 6 は同じく推定誤差の 2 乗平均値の時間に対する変動を信号 $s(t)$ の分布の尖鋭度 τ_s をパラメータとして示

Fig. 6 Mean squared value of the error

したものである。

もし、 $\tau_s = 0$ とすれば、この場合は正規性の非定常不規則入力をうけるときの推定誤差の 2 乗平均値に一致することがわかる [文献 2) 参照]。

6. 結 言

本研究は、非正規性非定常不規則入力をうける非線形フィルタの最適構成を目的として、rms 規範のもとに設計された最適フィルタが、Fig. 1 に示すように線要素と zero memory 形非線形要素の直列結合で構

成されるものとして、きわめて実用的に設計手法を確立した。

この手法の特徴は確率分布の変化に注目して構成されることであり、従来の設計手法にみられるような積分方程式の解をもとめる複雑な手続が回避でき、今後の非線形制御系の解析ならびに計画の分野に対してきわめて有効なものであると思われる。

終わりに、本研究をおこなうにあたり終始御指導と有益な御助言をいただいた京都大学工学部榎木義一教授ならびに徳島大学工学部添田 喬教授に深甚の謝意を表する。

また、本研究に関する文献につき御教示をいただき、御懇切なる御討議をいただいた防衛大学校、中溝高好助教授にあわせて感謝する。

参考文献

- 1) N. Wiener: Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications, John Wiley & Sons (1949)
- 2) 榎木義一・添田 喬・田上重美: ある非定常不規則入力をうける制御系の最適構成に対する一考察 (開ループ系の場合), 日本機械学会論文集, 33-252, 1210/1214 (昭 42-8)
- 3) 榎木義一・添田 喬・田上重美: ある非定常不規則入力をうける制御系の最適構成に対する一考察 (閉ループ系の場合), 日本機械学会論文集, 34-261, 870/875 (昭 43-5)
- 4) H. W. Bode & C. E. Shannon: A Simplified Derivation of Linear Least Squares Smoothing and Prediction Theory, Proceeding IRE, Vol. 88, 417/425 (1950)
- 5) L. A. Zadeh: Optimum Nonlinear Filter, Journal of Applied Physics, Vol. 24, 396/404 (1953)
- 6) N. Wiener: Nonlinear Prediction Probability and Statistics, Edited by J. Grender, John Wiley and Sons, Inc., New York (1959)
- 7) R. Drenick: A Nonlinear Prediction Theory, IRE, Trans., on Information Theory Vol. IT-4, 146/162 (1954)
- 8) A. V. Balakrishnan and R. F. Drenick: On Optimum Nonlinear Extraction and Coding Filters, IRE Trans. on Information Theory, Vol. IT-2, 166/177 (1956)
- 9) Y. K. Lin: Application of Nonstationary Shot Noise in the Study of System Response to a class of Nonstationary Excitations, Trans. of the ASME, Vol. 30, Ser. E, No. 4, 555/558 (1963)
- 10) R. C. Booton: An Optimization Theory for Time Varying Linear Systems with Nonstationary Statistical Input, Proceeding IRE, Vol. 40, 977/981 (1952)
- 11) S. O. Rice: Mathematical Analysis of Random Noise, Bell System Tech. Journal, Sec. 3 and 4, 117/120 (1945)
- 12) J. F. Barrett & D. G. Lampard: On Expansions for Some Second Order Probability Distribution and Its Application to Noise Problems, IRE Trans. on Information Theory, IT-1, 10/15 (1955)
- 13) H. Cramér: Mathematical Method of Statistics, Princeton University Press (1946)
- 14) 榎木義一・砂原善文・中溝高好: 非正規性定常不規則入力をうける最適非線形制御系の構成, 日本機械学会論文集, 29-203, 1247/1254 (昭 38-7)

□ 付 録 1—(12) 式 の 誘 導 □

(11) 式の両辺に $e^{\beta\tau}$ をかけて、 τ について 0 から t まで積分すれば、

$$\frac{\alpha^2}{4} t \int_0^t \tau e^{\beta\tau} d\tau = \frac{\alpha^2}{4} j(t) \int_0^t \tau e^{\beta\tau} d\tau + \phi \int_0^t \tau g(t, \tau) d\tau \quad (\text{付} \cdot 1)$$

となる。

しかるに、(10) 式で示されるような関係式を考慮すれば、上式は次のようにかきかえることができる。

$$\frac{\alpha^2}{4} t \int_0^t \tau e^{\beta\tau} d\tau = \frac{\alpha^2}{4} j(t) \int_0^t \tau e^{\beta\tau} d\tau + \phi \cdot j(t) \quad (\text{付} \cdot 2)$$

したがって、(付・2) 式から、

$$\frac{\alpha^2}{4} t \cdot \frac{\beta t e^{\beta t} - e^{\beta t} + 1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{4} j(t) \cdot \frac{\beta t e^{\beta t} - e^{\beta t} + 1}{\beta^2} + \phi \cdot j(t) \quad (\text{付} \cdot 3)$$

の関係式が得られるから、この式から $j(t)$ をもとめれば、

$$j(t) = \frac{\frac{\alpha^2}{4} t \left\{ \frac{e^{\beta t}}{\beta} \left(t - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \right\}}{\frac{\alpha^2}{4} \left\{ \frac{e^{\beta t}}{\beta} \left(t - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \right\} + \phi} \quad (\text{付} \cdot 4)$$

となって (12) 式を導くことができる。

□ 付 録 2—(21) 式 の 誘 導 □

$\langle \varepsilon(t)^2 \rangle_{av.}$ は $F(jw)$ の関数であるから、 $\langle \varepsilon(t)^2 \rangle_{av.}$ を最小にする $F(jw)$ を定めることになり、これははん関数の極値問題であるから簡単な変分法を用いて解くことができる。

さて、 $F(jw)$ のかわりに $F(jw) + \Delta N(jw)$ を考えれば、 $F(jw)$ における変化分 $\Delta N(jw)$ に対する $\langle \varepsilon(t)^2 \rangle_{av.}$ の変化分を $\delta \langle \varepsilon(t)^2 \rangle_{av.}$ とすると、(18) 式で示される $\langle \varepsilon(t)^2 \rangle_{av.}$ を最小にするためには、

$$\begin{aligned} \delta \langle \varepsilon(t)^2 \rangle_{av.} = & -2\Delta \cdot \frac{1}{2\pi} \int_c N(jw_1) \left[\frac{1}{2\pi} \int_c F(jw_2) \varphi_{zz}(w_1, w_2) \right. \\ & dw_2 - \frac{1}{2\pi} \int_{c'} L(jw_2) \varphi_{zz}(w_1, w_2) dw_2 \Big] dw_1 \\ & + \Delta^2 \cdot \frac{1}{4\pi^2} \int_c \int_c N(jw_1) N(jw_2) \varphi_{zz}(w_1, w_2) dw_1 dw_2 \end{aligned} \quad (\text{付} \cdot 5)$$

において Δ の係数 0 はでなければならぬ。

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_c F(jw_2) \varphi_{zz}(w_1, w_2) dw_2 = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{c'} L(jw_2) \varphi_{zz}(w_1, w_2) dw_2 \end{aligned} \quad (\text{付} \cdot 6)$$

で示されるように (21) 式を導くことができる。