こう配関数を用いたバング-バング制御問題の計算法

田 村 捷 利・市 川 邦 彦

上智大学理工学部 東京都千代田区紀尾井町 7

(昭和 45 年 1 月 8 日 受付)

New Method Based on Gradient Function for Solving Bang-Bang Control Problems

Katsutoshi TAMURA and Kunihiko ICHIKAWA

(Faculty of Science and Technology, Sophia University, Chiyoda-ku, Tokyo)

(Received January 8, 1970)

A new iterative method based on gradient function is proposed for solving bang-bang control problems. The proposed algorithm is outlined as follows. Assume any bang-bang function as an initial guess and calculate the gradient function for the control. The control function is improved successively via the gradient function also in this method, but unlike the conventional gradient method, the time interval in which the control is improved is small and control is varied as large as admissible during that interval. Thus the improved control is again a bang-bann control.

The control after improvement is shown to give surely a less value of cost functional than before improvement. The convergent control obtained from this algorithm satisfies the local optimal condition. It is examined whether the characteristics of the gradient function with continuous control function will still hold for this case. With regard to this point, the derivation and calculation of the gradient function are also mentioned.

The usefulness of the proposed algorithm is illustrated by numerical examples. It should be remarked that the algorithm needs no assumption of switching times of optimal control function.

1. ま え が き

最適制御関数^{*1}がバング-バング形になる代表的なものは最短時間制御であり、この最適制御関数を求める計算法に関する研究は古くから行なわれており、線形系の最短時間問題に関しては随伴微分方程式の初期値を求めて最適制御関数を求めるという方法^{1),2)}など、いくつかの研究がなされている。また、固定線形系に対して軌道が目標点に近づくように切換え時間を変化させてゆく³⁾という研究も行なわれた。これらの研究は系が線形であるという条件を用いた最短時間制御の計算法である。一般的なバング-バング制御問題に対する計算法は Differential Dynamic Programming⁴⁾を応用した研究が行なわれ、制御関数は局所的に最適条件を満足するとともに、局所的に最適な切換

え時間を求めてゆくという研究が行なわれている。

こう配法は^{5),6)}、収束の速さという点でやや問題があるとされている⁷⁾が、最適制御問題を解く立場からみると理論的にも基本的なものであるだけでなく、制御対象が線形、非線形にかかわらず、一般的な最適制御問題を解くための有力な手法である。この手法を最適制御関数がバング-バング制御となるような問題に適用した場合には、バング-バング関数に収束するのにかなり多くの繰り返し計算を必要とすることがわかった⁸⁾。そこで本論では、最適なバング-バング制御関数をこう配関数に基づいて最適な切換え時間を探索して求めるという計算法を提案する。2. の問題の記述につづいて、本論で述べるアルゴリズムの考え方と具体的な方法を 3. で述べ、4. ではこのアルゴリズムの数学的なうらづけを行なった。最後に例題によってこのアルゴリズムの有効性を確かめた。

*1 制御関数ということばは、制御が時間関数であることを表わすために用いた。

2. 問題の記述^{*2}

制御対象の運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ &= f^1(x) + f^2(x)u \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

で表わされる問題を考える。ここに x は n 次元状態ベクトル, u は r 次元ベクトル, f^1 は n 次元ベクトル関数, f^2 は $n \times r$ マトリクスとする。 u には、

$$u \in \Omega \quad (2)$$

なる制限があり、指定された初期条件 $x(t_0)$ から出発し、終端条件は終端時刻を t_f として、

$$t_f: \text{指定}, x(t_f): \text{自由} \quad (3)$$

とする。評価関数は、

$$J = F[x(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x) dt \quad (4)$$

とする。ここに $F[x(t_f)] \geq 0$, $f_0(x) \geq 0$ であり, f , f_0 , F は各変数に関して 2 回連続微分可能とする。

(1)~(4)式で定義される問題は最大原理⁹⁾を適用することによって、最適な制御はバングーバング形になることがわかる。

3. こう配関数に基づく切換え時間探索法

このアルゴリズムはバングーバング制御の最適な切換え時間をこう配関数に基づいて見つけ出そうとするものである。このアルゴリズムの具体的な流れを説明することによって、アルゴリズムの考え方を明らかにしよう。

I. ある仮定したバングーバング制御関数 $u_i(t)$ を与え、それに対してこう配関数 $g_i(t)$ を求める。

II. 切換え時間の修正区間をつぎのように与える。

$$\left. \begin{aligned} u_i(t) &= h \quad \text{かつ} \quad -g_i(t) < 0 \\ u_i(t) &= l \quad \text{かつ} \quad -g_i(t) > 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を満足する区間を修正区間とする。Fig. 1 では ㉑ と ㉒ の和が修正区間である。

III. 修正区間の中で $|g(t)|$ の最大なる時刻 t_1 を取

interval for which $u(t)$ may be improved

Fig. 1 $u_i(t)$, $-g_i(t)$ and $u_{i+1}(t)$

り出し、区間 $[t_1 - \frac{1}{2}\Delta t, t_1 + \frac{1}{2}\Delta t]$ において、 $u_i(t)$

を、 $u_i(t)$ が h ならば l に、 l ならば h に修正する。この修正された制御を $u_{i+1}(t)$ とする (Fig. 1)。

IV. $J(u_i) > J(u_{i+1})$ のとき、 $g_i(t)$ は固定しておく。 $u_{i+1}(t)$ と $g_i(t)$ について II, III と同じ操作を行ない $u_{i+2}(t)$ をつくる。以下、 $J(u_{i,j-1}) > J(u_{i,j})$ が満足されるかぎりつづける。 $J(u_{i,j-1}) < J(u_{i,j})$ のときは $u_{i,j-1}(t)$ を $u_{i+1}(t)$ として I にもどる (Fig. 2)。

Fig. 2 $u_i(t)$ and $u_{i+1}(t)$

以上より、このアルゴリズムの考え方はつぎのようであることがわかる。一般のこう配法では仮定した $u(t)$ を修正こう配関数⁹⁾に比例した微小量だけ、全区間 $[t_0, t_f]$ において修正するのに対して、本手法では修正こう配関数の絶対値の最大値をとる時刻を中心として微小時間 Δt だけ $|h-l|$ の修正を行なうのである。

このアルゴリズムを合理的なものとするために、1) 不連続な (断片的に連続) 関数 $u(t)$ に対してこう配関数 $g(t)$ が計算されること、2) $J(u_{i+1}) < J(u_i)$ であること、3) この計算が収束したときには局所的最適条件が満足されていること、を明らかにしよう。

4. こう配関数とアルゴリズムの収束

(1)式に $u(t)$ を与えたときの解を $x(t)$, $u(t) + \delta u(t)$ を与えたときの解を $x(t) + \delta x(t)$ とする。このとき $\delta u(t)$ が小さいとすれば $\delta x(t)$ も小さく、 $\delta x(t)$ は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta x &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta u \\ \delta x(t_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

なる微分方程式の解である。ただし、 $(\partial/\partial \cdot)$ は、 $x=x(t)$, $u=u(t)$ で計算される時間関数である。このとき J の 1 次増分 δJ は、

$$\delta J = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}(\tau) \right) \delta x(\tau) d\tau \quad (7)$$

と表わされる。(7)式を、

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} g'(t) \delta u(t) dt \quad (8)$$

なる形に表わしたとき $g(t)$ を $u(t)$ に対するこう配

^{*2} 制御対象と評価関数は必ずしもここに述べた形のものでなくてもよく、最適解がバングーバング形になるものならなんでもよい。

関数と定義する⁹⁾。ここに ' はマトリクスの転置を表わす。

本論では $u(t)$ をバング-バング形にとっているから $(\partial f/\partial x)$ は不連続関数になるが、これは断片的に連続でかつ有界であるから、(6)式の線形微分方程式の遷移行列は連続となる¹¹⁾。したがって、こう配関数は周知のとおり^{6), 12)}に求めることができて、

$$g'(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) \quad (9)$$

となる。ここで、 H は、

$$H = p'f - f_0 \quad (10)$$

で定義される。また p は共状態ベクトルで、

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)' p + \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)' \\ p(t_f) &= -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)' \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

によって計算される。本論では f_0 が u を陽に含まないから、こう配関数⁹⁾は、

$$g'(t) = -p'\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) \quad (12)$$

となる。

アルゴリズムの収束を考える。まず $J(u_i) \geq J(u_{i+1})$ を証明する。そのためには $J(u_{i,j}) \geq J(u_{i,j+1})$ を満足するような十分小さな Δt が存在することをいえばよい。いいかえれば Δt を十分小さくとれば $J(u_{i,j}) \geq J(u_{i,j+1})$ が必ず満足されることを示せばよいことになる。簡単のために $u_i(t)$ と $g_i(t)$ は Fig. 1 のようであるとす。このとき $J(u_i) \geq J(u_{i,1})$ ならしめる Δt の存在を証明しよう。 $\delta u(t)$ を、

$$\delta u(t) = u_{i,1}(t) - u_i(t) \quad (13)$$

によって定義する。すなわち、

$$\delta u(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t < t_1 - \frac{1}{2}\Delta t \\ h-l, & t_1 - \frac{1}{2}\Delta t \leq t < t_1 + \frac{1}{2}\Delta t \\ 0, & t_1 + \frac{1}{2}\Delta t \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (14)$$

$u_i(t)$ を与えたときの(1)式の解を $x_i(t)$, $u_{i,1}(t)$ を与えたときのそれを $x_{i,1}(t)$ とし、 $\delta x(t)$ を、

$$\delta x(t) = x_{i,1}(t) - x_i(t) \quad (15)$$

と定義する。 $t_0 \leq t \leq t_1 - \frac{1}{2}\Delta t$ では $x_{i,1}(t) = x_i(t)$ であるから $\delta x(t) = 0$ である。また、

$$\delta x\left(t_1 + \frac{1}{2}\Delta t\right) = f^2\left(x_i(t_1 - \Delta t)\right)(h-l)\Delta t + 0(\Delta t) \quad (16)$$

が成立するように Δt をとると、 $\delta x\left(t_1 + \frac{1}{2}\Delta t\right)$ は Δt に比例する 1 次の微小量となる。 $t_1 + \frac{1}{2}\Delta t \leq t \leq t_f$ において $x_i(t)$ と $x_{i,1}(t)$ は初期値が $\delta x\left(t_1 + \frac{1}{2}\Delta t\right) + 0(\Delta t)$ だけちがっており、同じ微分方程式に支配されている。また、 $\partial f/\partial x$ はこの間で連続であるから $x_{i,1}(t)$ と $x_i(t)$ との差 $\delta x(t)$ は 1 次の微小量となる¹⁰⁾。よって、

$$\frac{d}{dt}(x_i + \delta x) = f^1(x_i + \delta x) + f^2(x_i + \delta x)(u_i + \delta u) \quad (17)$$

を x 関して展開して、

$$\frac{d}{dt}\delta x = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left[f^2(x_i) + \left(\frac{\partial f^2}{\partial x}\right)\delta x\right]\delta u + 0(\Delta t) \quad (18)$$

を得る。(18)式の右辺第 2 項は δx が 1 次の微小量ゆえ、 $(\partial f^2/\partial x)\delta x$ は $f^2(x_i)$ に比べて小さいので、さらに、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta x &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + f^2(x_i)\delta u + 0(\Delta t) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\delta u + 0(\Delta t) \end{aligned} \quad (19)$$

と変形される。したがって $\delta u(t)$ を(14)式のように与えても δx は(19)式の線形微分方程式にしたがうことがいえた。よって前章までの議論が適用できて、

$$\begin{aligned} J(u_{i,1}) - J(u_i) &= \int_{t_0}^{t_f} g'(t)\delta u(t)dt \\ &= \text{sgn}(-g(t_1))(h-l)g(t_1)\Delta t + 0(\Delta t) \\ &= -|g(t_1)|(h-l)\Delta t + 0(\Delta t) \end{aligned} \quad (20)$$

が成立し、 Δt を十分小さくとれば $J(u_{i,1}) - J(u_i) \leq 0$ なることがいえる。

さて、このアルゴリズムが終わるのは(5)式で与えられる修正区間がなくなるとき、すなわち(5)式が完全に満足されなくなるときである。したがって、このアルゴリズムが終わるのは、

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= h \quad \text{かつ} \quad -g(t) \geq 0 \\ u(t) &= l \quad \text{かつ} \quad -g(t) \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

が満足されるときであり、最急傾斜法による局所的最適条件 $[g(t)]_{\text{mod}} = 0$ と一致している。

5. 数値計算のフローチャート

数値計算のフローチャートは Table 1 のようになる。

6. 例 題

6.1 例 題 1

このアルゴリズムの有効性を明らかにするために、

*3 本論でいうこう配関数は impulse response function ともいわれている¹²⁾。

Table 1 Flow chart of the Algorithm

まず、解析的に解くことができる問題を本手法の手順にしたがって解くことにする。制御対象は、

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u \quad (22)$$

で与えられ、制御 u には $|u| \leq 1$ なる制限があるとする。評価関数は、

$$J = 5x_1^2(t_f) + 5x_2^2(t_f) \quad (23)$$

で与えられ、終端条件を

$$t_f = 2.0, \quad x_1(t_f), \quad x_2(t_f) \text{ 自由} \quad (24)$$

とする。初期条件 $x_1(0) = 1.0, x_2(0) = 0$ から出発する最適解を求める。

こう配関数を求めるための共状態ベクトルは、

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_1 &= 0, \quad p_2 = -p_1 \\ p_1(t_f) &= -10x_1(t_f), \quad p_2(t_f) = -10x_2(t_f) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

で与えられ、解は、

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -10x_1(t_f) \\ p_2 &= 10x_1(t_f)(t-2.0) - 10x_2(t_f) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

したがって、こう配関数は、

$$g(t) = -10x_1(t_f)(t-2.0) + 10x_2(t_f) \quad (27)$$

と得られる。

制御 u の最初の推定を $u_1(t) = 1.0, 0 \leq t \leq 2.0$ と与える。このとき、

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}t^2 + 1, \quad x_2 = t \\ x_1(t_f) &= 3, \quad x_2(t_f) = 2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

を得る。よって、

$$-g_1(t) = 30t - 80 \quad (29)$$

となる。このとき $u_1(t)$ と $g_1(t)$ を Fig. 3 に示す。

Fig. 3 $u_1(t)$, $-g_1(t)$ and $u_2(t)$ (optimal) in example 1

Fig. 3 から $u_{1,j}(t)$ は Fig. 3 に点線で示したように、 $t=0$ のほうよりつぎつぎに、

$$u_{1,j}(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leq t < j\Delta t \\ 1 & j\Delta t \leq t \leq 2.0 \end{cases} \quad (30)$$

となることがわかる。このとき解は、

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq t < j\Delta t \\ x_1 &= 1 - \frac{1}{2}t^2, \quad x_2 = -t \\ j\Delta t \leq t \leq 2.0 \\ x_1 &= \frac{1}{2}t^2 - j\Delta t \cdot t - \left(1 - \frac{1}{2}(j\Delta t)^2\right) \\ x_2 &= t - j\Delta t \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

評価関数値は、

$$(u_{1,j}) = 5 \left[(j\Delta t)^4 - 8(j\Delta t)^3 + 26(j\Delta t)^2 - 32 \cdot j\Delta t + 13 \right] \quad (32)$$

よって、

$$\min J(u_{1,j}) = 0 \text{ at } j\Delta t = 1.0 \quad (33)$$

を得る。したがって $u_2(t)$ は $t=1.0$ で切換わるバングーバング制御となり、これが求める最適制御関数である。

同じ例題を計算機 (FACOM 230-60) で解いた。微分方程式はすべて RKG 法で解いた。 $0 \leq t \leq 2.0$ を 100 きざみで行なった。結果は上述したものとまったく同じ結果が得られ、計算時間は約 18 秒であった。

6.2 例題 2 (Jacobson の例題)⁴⁾

制御対象の運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -0.5x_1 + 5x_2 \\ \dot{x}_2 &= -5x_1 - 0.5x_2 + u \\ \dot{x}_3 &= -0.6x_3 + 10x_4 \\ \dot{x}_4 &= -10x_3 - 0.6x_4 + u \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

で表わされ、 u には $|u| \leq 1$ なる制限がある。終端条件は、

$$t_f = 4.2, \quad x_i(t_f) : \text{自由} \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (35)$$

評価関数は、

$$J = x_1^2(t_f) + x_2^2(t_f) + x_3^2(t_f) + x_4^2(t_f) \quad (36)$$

で与えられる。初期条件 $x_1(0)=10.0$, $x_2(0)=10.0$, $x_3(0)=10.0$, $x_4(0)=10.0$ から出発する解を求める。

制御 u の最初の推定を $u(t)=1.0$, $0 \leq t \leq 4.2$ で与える。この計算も FACOM 230-60 で行なった。微分方程式は RKG 法を用いて解いた。区間 $0 \leq t \leq 4.2$ を 300 きざみにした。評価関数値の変化を Fig. 4 に示す。Fig. 5 に得えられた最適制御関数とそのとき

Fig. 4 Cost versus iteration in example 2

Fig. 5 Optimal control $u(t)$ and $-g(t)$ in example 2

Fig. 6 Time sequence of state point in example 2

の $-g(t)$ を示す。これより、この最適制御関数と $-g(t)$ は (21) 式の局所的最適条件を満足していることがわかる。Fig. 6 に状態点の変化を示す。なお計算時間は 174 秒であった。

7. あとがき

こう配関数を用いて最適バングーバング制御関数を求めるアルゴリズムを提案した。そのために、まず仮定した $u(t)$ がバングーバング形の関数である場合のこう配関数を導びいた。さらに共状態ベクトルを微分方程式の解として求めることによって、このこう配関数が容易に計算されることを示した。例題によってこのアルゴリズムの有効性を調べた。その結果このアルゴリズムは、かなり有効なものと思われる。今後この手法を最短時間問題に適用することを考えたい。

参考文献

- 1) L. W. Neustadter: Synthesizing Time Optimal Control System, Jr. MAAA 1, 483/493 (1960)
- 2) J. H. Eaton: A Iterative Solution to Time-Optimal Control, Jr. MAAA 5, 329/344 (1962)
- 3) 山口仁雄: パルス摂動による最短時間制御の計算, 計測自動制御学会論文集, 3-3, 181/187 (1967)
- 4) D. H. Jacobson: Differential Dynamic Programming Method for Solving Bang-Bang Control Problems, IEEE AC-13-6, 661/675 (1968)
- 5) H. J. Kelley: Method of Gradient in Optimization Technique (book) ed. by G. Leitmann, Academic Press (1962)
- 6) 市川・田村: こう配法による最適制御問題の解法, 計測と制御, 8-11, 761/777 (1969)
- 7) L. S. Lasdon, S. K. Mitter and A. D. Waren: The Conjugate Gradient Method for Optimal Control Problems, IEEE, AC-12-2, 132/138 (1967)
- 8) 市川・田村: 最適制御関数を求めるアルゴリズム (II), 第 8 回計測自動制御学会学術講演会 (1969)
- 9) Pontryagin and et al.: The Mathematical Theory of Optimal Processes, John Wiley and Sons (1962)
- 10) ポントリヤギン: 常微分方程式, 共立出版, 173/177 (1963)
- 11) E. A. Coddington and N. Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, p. 67 (1955)
- 12) A. E. Bryson and Y. C. Ho: Applied Optimal Control, Blaisdell Publishing Company, p. 104/110 (1969)