むだ時間を含む系の2乗偏差積分の算定

西村 正太郎・北村 新三

大阪大学工学部 吹田市字山田上

(昭和45年4月3日 受付)

Calculation of the Integrated Squared Error for Systems with Time Lag

Masataro NISHIMURA and Shinzo KITAMURA

(Faculty of Engineering, Osaka University, Suita)

(Received April 3, 1970)

Calculation of the integrated squared error (ISE) for linear systems with time lag is studied by using the Lyapunov functional method of Repin, and an error in his method is corrected. The method described here makes it possible to obtain the exact values of the ISE through the solutions of certain linear differential equations and algebraic equations.

The analytical forms of the ISE for the first-order system

$$K_c \frac{Ke^{-Ls}}{1+sT}$$

and the second-order system

$$K_c \left(1 + \frac{1}{T_{Is}} \right) \frac{Ke^{-Ls}}{1+sT}$$

are obtained. In numerical examples, the relationship between the ISE and the system parameters is given, which is, for reference, compared with the parameter setting proposed by Ziegler and Nichols.

It is also shown that the instability condition for the first-order system, which can be obtained from this Lyapunov functional, is identical with the necessary and sufficient condition for the stability of the system.

1. ま え が き

制御系の設計にさいし、目標値と系の出力の応答との差の2乗積分値に注目する方法は従来しばしば用いられており、とくに最適レギュレータ系は2乗偏差積分(以下 ISE と略する)を最小とする系をいっている。系が線形常微分方程式により記述される場合には、系のリアプノフ関数と ISE は密接な関係をもっている。

たとえば、

$$\dot{x} = Ax, \quad \bullet = d/dt, \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

$$J = \int_0^\infty x^T Q x dt \quad (2)$$

において A は安定な行列、 Q は正値または準正値(以下 $Q > 0$ または $Q \geq 0$ と略する)、サフィックス T は転置を示すとする。このとき、リアプノフ関数、

$$V = x^T P x, \quad P = P^T \quad (3)$$

を考えると J の値は次のように与えられる。

$$J = x_0^T P x_0 \quad (4)$$

ここで P は、

$$A^T P + P A = -Q \quad (5)$$

を満足する行列であって $Q > 0$ ならば $P > 0$ である。

$Q \geq 0$ の場合には、(1) 式が位相変数表示されている
なら、すなわち、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

ならば、(5) 式を満たす $P > 0$ が存在する^{1), 2)}。このように J の値を定めることは周波数領域でパーセバルの関係を用いても可能である³⁾。

むだ時間を含む系では、系が安定でしかも非振動の応答をする場合には、

$$J = \int_0^\infty y(t) dt, \quad y(t) : \text{出力変数} \quad (6)$$

の値は、周波数領域において計算できる⁴⁾。しかし ISE を計算するためには、 S の超越関数となる特性式を解かねばならず、一般には無限個の根が存在するので近似となる。

他方レービンはむだ時間を含む系に対するリアプノフはん関数を定めることにより、ISE の算定を試みている⁵⁾。これによれば本稿で示すように、解くべき式は微分方程式および代数方程式の形で与えられ、原理上 ISE の真値を計算することが可能である。ここでは、むだ時間を含む系に対するリアプノフはん関数と ISE の関係を示すとともに、1次および2次系の例として、“むだ時間と1次遅れが直列に結合された”系に対して P および PI 調節計を用いる場合の ISE について、問題を解いている。

2. むだ時間を含む系に対する1つのはん関数と ISE の関係

むだ時間を含む線形定常系として次式を考える。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-L) \quad (7)$$

ここに、 $x(t)$ 、 $x(t-L)$ は n 次ベクトル、 A 、 B はそれぞれ $n \times n$ の定数ベクトル、 L は正定数とする。

(7) 式に対して次の初期値および初期関数が与えられるとする。

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(\theta) &= x_i(\theta), \quad -L \leq \theta \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ただし、 $x_i(\theta)$ は θ に関して連続な関数とする。

このとき、次の ISE を求めることが問題である。

$$J = \int_0^\infty x^T(t) Q x(t) dt, \quad Q \geq 0 \quad (9)$$

むだ時間系の状態空間は、 $-L \leq \theta \leq 0$ で定義される関数 $x(\theta)$ の集合と考えることができる。この空間における2次形式として、レービンは、(9) 式の J を求めるために、次のはん関数を定義している⁵⁾。

$$V(t) = (Px(t), x(t))$$

$$+ \int_{-L}^0 (R(\theta)x(t+\theta), x(t)) d\theta \quad (10)$$

$$+ \int_{-L}^0 \int_{\theta}^0 (S(\theta, \sigma)x(t+\sigma), x(t+\theta)) d\sigma d\theta$$

ここに、 $P = P^T$ 、 $R(\theta)$ 、 $S(\theta, \sigma)$ はそれぞれ $n \times n$ の行列であって、また、 (x, y) は内積を示す。

微分公式、

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$$

$$+ f(b(t), t) \frac{db}{dt} - f(a(t), t) \frac{da}{dt}$$

に従って (10) 式を (7) 式の軌道に沿って時間微分し、 $x(t) = x$ と略記して整理すると次式を得る^{*1)}。

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= x^T \left[PA + A^T P + \frac{1}{2} (R(0) + R^T(0)) \right] x \\ &+ x^T (t-L) [2PB - R(-L)]^T x \\ &+ \int_{-L}^0 \left\{ x^T(t+\theta) \left[-\frac{dR(\theta)}{d\theta} + A^T R(\theta) \right. \right. \\ &\left. \left. + S^T(\theta, 0) \right]^T x \right. \\ &\left. + x^T(t+\theta) [B^T R(\theta) - S(-L, \theta)]^T x(t-L) \right\} d\theta \\ &- \int_{-L}^0 \int_{\theta}^0 x^T(t+\sigma) \left[\frac{\partial S(\theta, \sigma)}{\partial \theta} + \frac{\partial S(\theta, \sigma)}{\partial \sigma} \right]^T x \\ &\quad (t+\theta) d\sigma d\theta \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、

$$\dot{V} + x^T Q x = 0 \quad (12)$$

とおくことにより、おのおのの2次形式がゼロとなるための条件として次式を得る。

$$PA + A^T P + \frac{1}{2} (R(0) + R^T(0)) = -Q \quad (13)$$

$$2PB - R(-L) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{dR(\theta)}{d\theta} = A^T R(\theta) + S^T(\theta, 0) \quad (15)$$

$$B^T R(\theta) - S(-L, \theta) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial S(\theta, \sigma)}{\partial \theta} + \frac{\partial S(\theta, \sigma)}{\partial \sigma} = 0 \quad (17)$$

さて (12) 式から、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^T(t) Q x(t) dt &= J \\ &= \int_0^\infty [-\dot{V}] dt = V(0) - V(\infty) \end{aligned}$$

を得るが、(7) 式の系が漸近安定なら $V(\infty) = 0$ である。ゆえに (13)~(17) 式の解 P 、 $R(\theta)$ 、 $S(\theta, \sigma)$ を用いて、ISE は次式により考えられる。

*1 文献 5) では、(11) 式に誤りがあり、その結果 (15) 式の右辺第2項は $S(\theta, 0)$ となっているが、ここで訂正した。ゆえに (19) 式以下で得られる結果は文献 5) とは異なる。

$$J = V(0) = x_0^T P x_0 + \int_{-L}^0 x_i^T(\theta) R^T(\theta) x_0 d\theta \\ + \int_{-L}^0 \int_{\theta}^0 x_i^T(\sigma) S^T(\theta, \sigma) x_i(\sigma) d\sigma d\theta \quad (18)$$

ゆえに問題は、与えられた A, B, Q に対して未定行列 $P, R(\theta), S(\theta, \sigma)$ の $n(n+1)/2 + 2n^2$ 個の要素を求めることになるが、(13)~(17) 式は以下に示すように、定係数の連立常微分方程式および連立 1 次方程式を解くことに帰着される。(17) 式において $\sigma = \tau, \theta = y + \tau$ (y : 変数) の変換を行なうと (17) 式は、

$$\partial S(y + \tau, \tau) / \partial \tau = 0$$

となりこれより、

$$S(y + \tau, \tau) = \varphi(y)$$

を得る。ここに $\varphi(y)$ は y の任意関数を要素とする行列である。ゆえに、

$$S(\theta, \sigma) = \varphi(\theta - \sigma) \quad (19)$$

となり、これと (16) 式より次式を得る。

$$\varphi(\theta) = B^T R(-L - \theta) \quad (20)$$

(20) 式と (15) 式により次式を得る。

$$\frac{dR(\theta)}{d\theta} = A^T R(\theta) + R^T(-L - \theta) B = A^T R(\theta) \\ + R_1(\theta) B \quad (21)$$

ただし、

$$R_1(\theta) = R^T(-L - \theta) \quad (22)$$

である。(21) 式において、 $\theta \rightarrow -L - \theta$ の変換を行ない、また (22) 式を考慮すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR_1^T(\theta)}{d\theta} &= -A^T R_1^T(\theta) - R^T(\theta) B \\ R^T\left(-\frac{L}{2}\right) &= R_1\left(-\frac{L}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

さらに (21), (23) 式は、

$$\left. \begin{aligned} R(\theta) + R_1^T(\theta) &= Z(\theta) \\ R(\theta) - R_1^T(\theta) &= Y(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

の変換により次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ(\theta)}{d\theta} &= A^T Y(\theta) - Y^T(\theta) B \\ \frac{dY(\theta)}{d\theta} &= A^T Z(\theta) + Z^T(\theta) B, Y\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

(25) 式は n^2 個の条件をもつ $2n^2$ 個の線形連立微分方程式となり、これより定まる $R(\theta)$ は n^2 個の未定定数を含む。この $R(\theta)$ を (13), (14) 式に代入すれば、 P の要素 $n(n+1)/2$ 個と $R(\theta)$ の未定定数 n^2 個に関する連立 1 次方程式となり、これを解いて $P, R(\theta)$ が定まる。さらに (19), (20) 式により $S(\theta, \sigma)$ が定まる。

3. 1 次および 2 次の系の ISE

従来プロセス制御などにおいて、高次遅れ系をむだ

時間と低次遅れ系で近似することが行なわれ、このような系に対する PID 調節計のパラメータ設定に関して研究がなされている。ここでは Fig. 1 に示す系で、

Fig. 1 Control system with time lag

制御器 ($G_c(s)$) が P および PI 調節計の場合の、ステップ入力に対する ISE を求める。

3.1 1 次系の場合 (P 調節計)

$G_c(s) = K_c$ (定数) であるから、偏差 $y(t)$ に関する方程式は次式となる。

$$T\dot{y}(t) + y(t) + K_1 y(t-L) = T\dot{r} + r, K_1 = K_c K \quad (26)$$

ステップ入力を考えるとき、 $\dot{r} = 0$ であり、さらに、この系では Fig. 2 に示すように定常偏差 y_s が生じ

Fig. 2 Response for step input (origin is shifted by L)

るので、新しい変数、

$$x(t) = y(t) - y_s, y_s = \frac{r}{1 + K_1} \quad (27)$$

を定義する。線形系であるので、 $r=1$ としても一般性を失わない。このとき次式を得る。

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{T} x(t) - \frac{K_1}{T} x(t-L) \quad (28)$$

さらに、初期値、初期関数は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 1 - y_s \\ x_i(\theta) &= 1 - y_s, -L \leq \theta \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ISE,

$$J = \int_0^\infty x^2(t) dt \quad (30)$$

を算定しよう。

$$A = -a = -\frac{1}{T}, B = -b = -\frac{K_1}{T} \quad (31)$$

であるから (25) 式および (13), (14) 式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ(\theta)}{d\theta} &= (b-a)Y(\theta), \quad \frac{dY(\theta)}{d\theta} \\ &= -(b+a)Z(\theta), \quad Y\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 \\ -2Pa + R(0) &= -1, \\ -2Pb - R(-L) &= 0 \\ R(\theta) &= \frac{1}{2}(Z(\theta) + Y(\theta)) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

(32) 式の解は次の3つの場合にわかれる。ただし (28) 式の系は漸近安定とする。

(i) $b^2 - a^2 > 0$ のとき (32) 式の第1, 第2式から,

$$\left. \begin{aligned} Y(\theta) &= C_1 \sin k_1 \left(\theta + \frac{L}{2} \right), \quad Z(\theta) \\ &= -\frac{C_1 k_1}{a+b} \cos k_1 \left(\theta + \frac{L}{2} \right) \\ k_1 &= \sqrt{b^2 - a^2}, \quad C_1: \text{未定定数} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

となり, これを (32) 式第3, 第4式に代入して P, C_1 を求めると次式を得る。

$$P = \frac{1}{2} \frac{U_2}{aU_2 + bU_1}, \quad C_1 = -\frac{2b}{aU_2 + bU_1} \quad (34)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \sin \frac{k_1 L}{2} - \frac{k_1}{a+b} \cos \frac{k_1 L}{2} \\ U_2 &= -\sin \frac{k_1 L}{2} - \frac{k_1}{a+b} \cos \frac{k_1 L}{2} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

である。さらに (19), (20) 式から $S(\theta, \sigma)$ は次式となる。

$$S(\theta, \sigma) = \frac{bC_1}{2} \left[\sin k_1 \left(\theta - \sigma + \frac{L}{2} \right) + \frac{k_1}{a+b} \cos k_1 \left(\theta - \sigma + \frac{L}{2} \right) \right] \quad (36)$$

(33)~(36) 式を用いて, (18), (29) 式から ISE を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} J &= (I_1 + I_2 + I_3)(1 - y_s)^2 \\ I_1 &= P = \frac{1}{2} \frac{U_2}{aU_2 + bU_1} \\ I_2 &= \int_{-L}^0 R(\theta) d\theta = -\frac{C_1}{a+b} \sin \frac{k_1 L}{2} \\ I_3 &= \int_{-L}^0 \int_{\theta} S(\theta, \sigma) d\sigma d\theta \\ &= -\frac{bC_1}{2k_1} \left[L \cos \frac{k_1 L}{2} - \left(\frac{k_1 L}{a+b} + \frac{2}{k_1} \right) \sin \frac{k_1 L}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

(ii) $b^2 - a^2 < 0$ のとき (i) と同じようにして次の諸式を得る。

$$\left. \begin{aligned} Y(\theta) &= C_2 \sinh k_2 \left(\theta + \frac{1}{2} L \right), \quad Z(\theta) \\ &= -\frac{C_2 k_2}{a+b} \cosh k_2 \left(\theta + \frac{L}{2} \right) \\ k_2 &= \sqrt{a^2 - b^2}, \quad C_2: \text{未定定数} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \frac{U_2'}{aU_2' + bU_1'}, \quad C_2 = -\frac{2b}{aU_2' + bU_1'} \\ S(\theta, \sigma) &= \frac{bC_2}{2} \left[\sinh k_2 \left(\theta - \sigma + \frac{L}{2} \right) + \frac{k_2}{a+b} \cosh k_2 \left(\theta - \sigma + \frac{L}{2} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

ただし, U_1', U_2' は (35) 式において, k_1 を k_2 に, $\sin$ を $\sinh$ に, $\cos$ を $\cosh$ におきかえて得られる。

$$\left. \begin{aligned} J &= (I_1 + I_2 + I_3)(1 - y_s)^2 \\ I_1 &= P \\ I_2 &= -\frac{C_2}{a+b} \sinh \frac{k_2 L}{2} \\ I_3 &= -\frac{bC_2}{2k_2} \left[-L \cosh \frac{k_2 L}{2} + \left(\frac{2}{k_2} - \frac{k_2 L}{a+b} \right) \sinh \frac{k_2 L}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

(iii) $b = a$ のとき 同様にして次の諸式を得る。

$$Y(\theta) = C_3 \left(\theta + \frac{L}{2} \right), \quad Z(\theta) = -\frac{C_3}{2a}, \quad C_3: \text{未定定数} \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + L \right), \quad C_3 = 2a \\ S(\theta, \sigma) &= \frac{aC_3}{2} \left(\frac{L}{2} + \theta - \sigma + \frac{1}{2a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} J &= (I_1 + I_2 + I_3)(1 - y_s)^2 \\ I_1 &= P \\ I_2 &= -\frac{C_3 L}{4a} \\ I_3 &= \frac{aC_3}{8} \left[\frac{1}{a} + \frac{L}{3} \right] L^2 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

上で求めた ISE を $L=1$ の場合について計算した結果を Fig. 3 に実線で示している。Fig. 3 の破線は系

Fig. 3 ISE and steady state error for first order system

に生じる定常偏差を示している。また図中の丸印は、確認のために、 $L=T=1$ の場合に、ルンゲ・クッタ・ギル法を用いて (28) 式の系を解くことにより ISE を求めたもので、本稿の方法によるものとよく一致している。ISE はゲイン K_1 が大きくなるとともに単調増大し、安定限界で無限大となる。この間の関係については、3.3 で考察する。Fig. 3 の三角印は、この系に対する P 調節計のパラメータ設定値として、(44) 式に示すジグザ・ニコルスによる方法⁶⁾を採用するときの、ISE を示している。

$$\left. \begin{aligned} K_c &= T/KL \quad (\text{P 調節計}) \\ K_c &= 0.9 T/KL, \quad T_I = 3.3 L \quad (\text{PI 調節計}) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

3.2 2 次系の場合 (PI 調節計) Fig. 1 において、

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (45)$$

の場合を考える。このときには定常偏差は生じないから $y(t) = x_1(t)$ として次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b_1 & -b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-L) \\ x_2(t-L) \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$a = 1/T, \quad b_1 = K_c K/T_I T, \quad b_2 = K_c K/T \quad (47)$$

初期値および初期関数は、

$$\left. \begin{aligned} x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = 0 \\ x_1(\theta) &= 1, \quad x_2(\theta) = 0, \quad -L \leq \theta \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

である。

$$J = \int_0^\infty x_1^2(t) dt \quad (49)$$

としてこれを求めよう。(25) 式を解くために、

$$Z(\theta) = \begin{bmatrix} z_{11}(\theta) & z_{12}(\theta) \\ z_{21}(\theta) & z_{22}(\theta) \end{bmatrix}, \quad Y(\theta) = \begin{bmatrix} y_{11}(\theta) & y_{12}(\theta) \\ y_{21}(\theta) & y_{22}(\theta) \end{bmatrix} \quad (50)$$

とおく。(46) 式の A, B 行列を用いて (25) 式を分解すると次の関係が存在することがわかる。

$$z_{11}(\theta) = b_1 z_{12}(\theta)/b_2, \quad y_{11}(\theta) = b_1 y_{12}(\theta)/b_2 \quad (51)$$

ゆえに独立な変数に関する微分方程式として次式を得る。

$$\frac{d\bar{z}}{d\theta} = A_1 \bar{y}, \quad \frac{d\bar{y}}{d\theta} = A_2 \bar{z}, \quad y\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 \quad (52)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}(\theta) &= \text{col}(z_1(\theta), z_2(\theta), z_3(\theta)) \\ \bar{y}(\theta) &= \text{col}(y_1(\theta), y_2(\theta), y_3(\theta)) \\ z_1(\theta) &= z_{11}(\theta), \quad z_2(\theta) = z_{21}(\theta), \quad z_3(\theta) = z_{22}(\theta) \\ y_1(\theta) &= y_{11}(\theta), \quad y_2(\theta) = y_{21}(\theta), \quad y_3(\theta) = y_{22}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ 1 & -a & b_1 \\ b_2/b_1 & 0 & b_2-a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -b_1 & 0 \\ 1 & -a & -b_1 \\ b_2/b_1 & 0 & -b_2-a \end{bmatrix} \quad (54)$$

である。(52) 式は $\bar{y}$ に関する 1 つの式となり、行列、 $A_2 A_1$ の固有値 $\lambda_i, i=1, 2, 3$ が異なるときには、次のような変換行列 T が存在する。

$$\bar{y}(\theta) = T v(\theta), \quad v(\theta) = \text{col}(v_1(\theta), v_2(\theta), v_3(\theta)) \quad (55)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v}{d\theta^2} &= T^{-1} A_2 A_1 T v, \quad v\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 \\ T^{-1} A_2 A_1 T &= \text{diag.}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

いま λ_i が実数とするなら (56) 式から $v(\theta)$ の各要素に対して次の解を得る。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i < 0 \text{ のとき } v_i(\theta) &= C_i \sin \sqrt{-\lambda_i} \left(\theta + \frac{L}{2} \right) \\ \lambda_i > 0 \text{ のとき } v_i(\theta) &= C_i \sinh \sqrt{\lambda_i} \left(\theta + \frac{L}{2} \right) \\ \lambda_i = 0 \text{ のとき } v_i(\theta) &= C_i \left(\theta + \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

ただし、 C_i は未定定数である。 $v(\theta)$ が決まれば (55) 式より $\bar{y}(\theta)$ が、さらに (52) 式から、

$$\bar{z}(\theta) = A_2^{-1} \frac{d\bar{y}}{d\theta}, \quad a b_1 \neq 0 \quad (58)$$

を得る。(24) 式から $R(\theta)$ は 3 個の未定定数 C_i を含んだ形で決まり、これを (13), (14) 式に代入して得られる連立 1 次方程式を解けば P の要素と C_i が定められる。

以下 $L=T=1$ の場合を考える。このとき行列 $A_2 A_1$ の固有方程式は次式となる。

$$\det(A_2 A_1 - \lambda I) = -(\lambda-1)(\lambda^2 - (1-b_2^2)\lambda - b_1^2) = 0 \quad (59)$$

(59) 式中の 2 次方程式は、 $b_1 \neq 0$ かつ $b_2 \neq 1$ のとき異符号の実根をもつから、固有値を $1, -\lambda_2, \lambda_3 (-\lambda_2, \lambda_3 > 0)$ として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} v_1(\theta) &= C_1 \phi_1(\theta) = C_1 \sin \left(\theta + \frac{L}{2} \right) \\ v_2(\theta) &= C_2 \phi_2(\theta) = C_2 \sin \sqrt{-\lambda_2} \left(\theta + \frac{L}{2} \right) \\ v_3(\theta) &= C_3 \phi_3(\theta) = C_3 \sinh \sqrt{\lambda_3} \left(\theta + \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

これより、(55), (58) 式によって $\bar{z}(\theta), \bar{y}(\theta)$ の各要素は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} y_i(\theta) &= \sum_{j=1}^3 t_{ij} C_j \phi_j(\theta) \\ z_i(\theta) &= \sum_{j=1}^3 a_{ij}^{-1} \sum_{k=1}^3 t_{jk} C_k \frac{d}{d\theta} \phi_k(\theta) \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

ただし、ここに、

$$A_2^{-1} = (a_{ij}^{-1}), \quad T = (t_{ij})$$

であって、行列 T は (59) 式の固有値に対する固有ベクトルを列とする行列をとる⁶⁾。

(61), (53), (24) 式の関係から $R(\theta)$ が定まり、これを (13), (14) 式に代入し、(51) 式の関係を用い、

$$\begin{bmatrix} d_{11}(0) & d_{12}(0) & d_{13}(0) & 0 & 0 & 0 \\ d_{11}(-L) & d_{12}(-L) & d_{13}(-L) & 0 & 2b_1 & 0 \\ d_{21}(-L) & d_{22}(-L) & d_{23}(-L) & 0 & 0 & 2b_1 \\ d_{21}(0) & d_{22}(0) & d_{23}(0) & & & \\ +\frac{b_2}{b_1}d_{11}(0) & +\frac{b_2}{b_1}d_{12}(0) & +\frac{b_2}{b_1}d_{13}(0) & 2 & -2 & 0 \\ d_{31}(-L) & d_{32}(-L) & d_{33}(-L)b_2 & 0 & 0 & 2b_2 \\ d_{31}(0) & d_{32}(0) & d_{33}(0) & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

ここに、 p_{ij} は P の要素を示し、また、

$$d_{ki}(\theta) = \frac{1}{2} \left[t_{ki} \phi_i(\theta) + \sum_{j=1}^3 a_{kj}^{-1} t_{ji} \frac{d}{d\theta} \phi_j(\theta) \right] \quad (63)$$

$k, i = 1, 2, 3$

である。(62) 式から求まる p_{ij} , C_i を用いて、ISE (49) 式は、(48) 式を考慮して次のように与えられる。

$$\begin{aligned} J &= I_1 + I_2 + I_3 \\ I_1 &= p_{11} \\ I_2 &= \int_{-L}^0 r_{11}(\theta) d\theta = \sum_{i=1}^3 C_i \int_{-L}^0 d_{1i}(\theta) d\theta \\ I_3 &= \int_{-L}^0 \int_{\theta}^0 s_{11}(\theta, \sigma) d\sigma d\theta = -b_1 \int_{-L}^0 \int_{\theta}^0 r_{21}(\sigma - \theta - L) d\sigma d\theta \\ &= -b_1 \sum_{i=1}^3 C_i \int_{-L}^0 \int_{\theta}^0 d_{2i}(\sigma - \theta - L) d\sigma d\theta \end{aligned} \quad (64)$$

ただし、 $r_{ij}(\theta)$, $s_{ij}(\theta, \sigma)$ は、それぞれ $R(\theta)$, $S(\theta, \sigma)$ の要素を示す。

上で示したように原理的には代数演算により、ISE を求めることが可能であるが、実際は計算機の利用が必要である。Fig. 4 (a), (b) は $L=T=1$ の場合の ISE の計算結果を示している。Fig. 4 の丸印は $T_f=0.6, 2.0, 3.3$ に対する、ルンゲ・クッタ・ギル法による ISE を示している。また三角印は、(44) 式により系のパラメータを設定したときの ISE を示している。3・1 の場合と異なり、Fig. 4 では、ISE を最小とする最適なパラメータが存在することがわかる。なお、ISE を求めるのに要する時間は、ルンゲ・クッタ・ギル法による時間の 1/5 程度であった。

なお、行列 $A_2 A_1$ の固有値 λ_i が複素数となるときには、変換行列 T は複素行列となる。このとき (57) 式の右辺は指数関数を含む形となり、また未定定数 C_i も複素数であるが、(61) 式の y_i , z_i は実数である。この場合にも、これらのことを考慮すれば、本稿の方法により、ISE を算定できる。さらに $A_2 A_1$ の固有値に重複のあるとき (たとえば、2 次系の例で $K_c K = T_f$ のとき)、(56) 式は一般には、ヨルダン標準

で整理すると次式を得る。

Fig. 4 ISE for second order system

形となり、別の考察が必要であるが、ここでは省略した。

3.3 安定条件との関連

3・1 の 1 次系の場合について、はん関数 (10) 式と、系の安定性との関連についてのべる。3・1 で求めた $P, R(\theta), S(\theta, \sigma)$ を (10) 式に代入したとき、これが (28) 式の系に対するリアプノフはん関数となるためには、 $V>0$, $\dot{V}\leq 0$ が成立しなければならない。後者は (12) 式により常に成立するので、 $V>0$ が成立すれば系は漸近安定である。

以下 (28) 式において、 $L=1$ の場合を考える。このとき系が漸近安定となるための必要十分条件は、ポントリアギンの安定定理により⁷⁾, $a, b>0$ のとき、

$$b < \sqrt{a^2 + \omega_1^2} \quad (65)$$

と得られる。ここに ω_1 は次式の根のうち $[0, \pi]$ 間のものである。

$$-a/\omega = \tan \omega \quad (66)$$

(10) 式の形のはん関数が正值となるための必要十分条件は筆者にはわからない。しかし次の考察が可能である。3.1 において、はん関数 V が正值となるためには、

$$P > 0 \quad (67)$$

が必要である。これより得られる条件は、

$$0 < k_1 < \omega_1 \quad (68)$$

となり (付録参照), これは (65) 式と等しい。ゆえに $k_1 > \omega_1$ なるときには、 $V < 0$ となる状態 $x(t)$ が存在するから、リアプノフの不安定定理により系は不安定となる。すなわち不安定条件は、(65) 式の安定のための必要十分条件と一致している。他方 (37) 式で与えられる ISE は、(29) 式の初期状態に対するものであり、これが正となる条件も、系が漸近安定となるための必要条件である。実際に、系が漸近安定となるパラメータの領域では ISE は正に、不安定な領域では負となることを示すことができる (付録 参照, U_1 , U_2 は周期関数であるので, ISE, P などが正負となる領域は無数にあると思われるが, ここでは, (68) 式で与えられる領域と, そのすぐ外側の領域を考えている)。

なお, 3.2 の 2 次系の場合には, 数値計算の結果では, ISE の符号と安定領域間には, 上のような関係は認められない。

4. あ と が き

レーピンの方法を用いることにより, むだ時間を含む系の ISE の算定について論じた。この方法では, 代数演算で ISE を求めることが可能である。さらに 1 次および 2 次の系の問題を解くとともに, P および PI 調節計のパラメータ設定について考察した。PID 調節計の場合にも, 系を (7) 式の形に記述するなら,

3.2 と同じ手順で, ISE を計算できる¹⁰⁾。

系が常微分方程式で記述される場合には, 系のリアプノフ関数 ((3) 式) と, 最適レギュレータ問題の解は, リカッチ方程式で結びついた関係をもっている。制御にむだ時間を含む場合の最適レギュレータ問題も, これに帰着する⁹⁾。しかし状態変数にむだ時間を含む場合の最適レギュレータ系については, クラソフスキー⁹⁾により, リアプノフはん関数を用いて解析されているが, 解析解を得ることは困難と思われる。

本研究の数値計算には, 京都大学大形計算センターの FACOM 230-60 を使用した。日ごろご指導いただく大阪大学工学部藤井克彦教授, 神戸大学工学部平井一正助教授にお礼申し上げるとともに, ご協力いただいた田辺製菓 (株), 上場正司氏にお礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) N.N. Puri, C.N. Weygandt : Calculation of Quadratic Moments of High-Order Linear Systems via Routh Canonical Transformation, IEEE Trans. Appl. and Ind., 83-75, 428/432 (1964)
- 2) E. F. Infante : Stability Criteria for n -th Order Homogeneous Linear Differential Equations, in "Differential Equations and Dynamical Systems", ed. J. K. Hale, J. P. LaSalle, 309/321, Academic Press (1967)
- 3) G. C. Newton, L. A. Gould, J. F. Kaiser : Analytical Design of Linear Feedback Controls, John Wiley & Sons (1957)
- 4) R. オルデンブルグ, H. サルトリウス (高橋・伊沢訳) : 自動制御の力学, p. 59, (昭 37-誠文堂新光社)
- 5) Iu. M. Repin : Quadratic Liapunov Functionals for Systems with Delay, Prikl. Mate. Meka., 29, 3, 564/566 (1965)
- 6) 高橋 : システムと制御, (1968-岩波)
- 7) N.H. Choksy : Time Lag Systems, in "Progress in Control Engineering", ed. R. H. MacMillan, T. J. Higgins, P. Naslin, 1, 19/38, Heywood (1962)
- 8) 示村ほか : 操作に遅れを含む線形系最適フィードバック制御, 自連大予稿 No. 115 (1965)
- 9) N. N. Krasovskii : On the Analytic Construction of an Optimal Control in a System with Time Lags, Prikl. Mate. Meka., 26-1, 39/51 (1962)
- 10) 西村・北村・上場 : むだ時間を含む系の 2 乗偏差面積の算定, 自連大予稿 (1970)

□ 付

録 □

【 $P>0$ の条件】 $L=1$, $k_1>0$, $b>a$ の場合には, 本文 (34) 式から次の条件を得る (安定限界は $b>a$ の領域にある).

$$U_2(aU_2+bU_1)>0 \quad (\text{A} \cdot 1)$$

k_1 に関して (A・1) 式が成立する最小の領域を求めると次式となる.

$$-\frac{k_1}{a+b} < \tan \frac{k_1}{2} < \frac{k_1}{b-a} \quad (\text{A} \cdot 2)$$

2倍角の公式,

$$\tan k_1 = \frac{2 \tan \frac{k_1}{2}}{1 - \tan^2 \frac{k_1}{2}}$$

を用いて (A・2) 式を変形すると, 本文 (68) 式を得る.

【ISE の符号と安定領域の関係】 $b>a$ のとき ISE は本文 (37) 式で与えられる. これより, $L=1$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{J}{(1-y_s)^2} = & -\frac{C_1}{4bk_1^2} \left[(-2b^3-b^2 \right. \\ & + 2ab^2-4ab+a^2) \sin \frac{k_1}{2} \\ & \left. + k_1(2b^2-b+a) \cos \frac{k_1}{2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 3)$$

となる. (A・2) 式により, C_1 は安定領域,

$$0 < k_1 < \omega_1, \quad \frac{\pi}{2} \leq \omega_1 \leq \pi \quad (\text{A} \cdot 4)$$

では正, そのすぐ外側では負となる. ゆえに (A・3) 式の [] 内, すなわち,

$$\begin{aligned} X_1 = & (-2b^3-b^2+2ab^2-4ab+a^2) \sin \frac{k_1}{2} \\ & + k_1(2b^2-b+a) \cos \frac{k_1}{2} \\ = & (2b^2-b+a) \left[\left(a-b - \frac{2b(b+a)}{2b^2-b+a} \right) \sin \frac{k_1}{2} \right. \\ & \left. + k_1 \cos \frac{k_1}{2} \right] \end{aligned}$$

が (A・4) 式から広い領域で負であるならば, ISE は安定領域で正, その外で負となる. これは次のように証明される.

(i) $2b^2-b+a < 0$ のとき, $C_1 > 0$ から,

$$(a-b) \sin \frac{k_1}{2} + k_1 \cos \frac{k_1}{2} > 0$$

であるから,

$$f(k_1) = \left(a-b - \frac{2b(b+a)}{2b^2-b+a} \right) \sin \frac{k_1}{2} + k_1 \cos \frac{k_1}{2} > 0 \quad (\text{A} \cdot 6)$$

は成立する.

(ii) $2b^2-b+a > 0$ のとき

$$X_2 = a-b - \frac{2b(b+a)}{2b^2-b+a}$$

とおくとき,

$$f(0) = 0, \quad f(\pi) = X_2 < 0 \quad (\text{A} \cdot 7)$$

$$\frac{df(k_1)}{dk_1} = \frac{1}{2} \left(X_2 \cos \frac{k_1}{2} - k_1 \sin \frac{k_1}{2} \right) < 0, \quad 0 < k_1 < \omega_1 \quad (\text{A} \cdot 8)$$

が成立する. (A・7), (A・8) 式から,

$$f(k_1) < 0, \quad 0 < k_1 < \omega_1$$

が成立する.