むだ時間を含む線形系の2次形式 評価関数に対する最適制御†

示村悦二郎・森 欣 司

早稲田大学理工学部 東京都新宿区西大久保 4-170

(昭和 45 年 4 月 3 日 受付)

Optimal Control of a Linear System with Time-Delay for a Quadratic Performance Index

Etsujiro SHIMEMURA and Kinji MORI

(School of Science and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo)

(Received April 3, 1970)

The optimal control problem of a linear system with time-delay for a quadratic performance index is discussed.

The problem is formulated as that of a coupled system of a lumped parameter subsystem and a distributed parameter subsystem which corresponds to a group of time-delay elements.

The optimal control is derived by applying the principle of optimality, and is given in a form of a linear combination of states of the both subsystems.

In other words, the optimal control is realized by a linear feedback of a present value $x(t)$ and a history $x(\tau)$, $t-\theta(t) \leq \tau < t$, of the state of the lumped parameter subsystem. Furthermore, it is shown that the optimal feedback gains are the solutions of the Riccati type ordinary and partial differential equations.

1. ま え が き

集中定数線形系の2次形式評価関数に対する最適制御は、状態の線形結合によって実現され、線形フィードバック系の形になることが示されている。このことは、たまたま2次形式を評価関数として選んでみたという以上に、古典的なフィードバック制御論と、近代の考え方に基づく最適制御理論との橋渡しとしての重要な意味をもっている¹⁾。むだ時間を含む系の最適制御問題は、従来、集中定数系の最適制御問題の形式的な拡張として扱われてきたが、その必然の結果として状態の概念が不明確となり最適制御、特に最適フィードバック制御では、その構成についてはっきりとした議論をすることができなかつたばかりでなく、時には根本的な誤りをおかす原因にもなった²⁾。この問題はむだ時間を含む系を構造的に集中定数系と、ある種の分布定数系との結合系としてはあくすることによ

てはじめて厳密な議論をすることができる^{3), 4)}。本研究においては、古典的なフィードバック制御論においても安定な閉ループの構成という点で未解決の点の多かったむだ時間を含む系のフィードバック制御問題⁵⁾へのひとつの接近を目論んで、むだ時間を含む線形系の2次形式評価関数に対する最適制御問題を考察する。

2. 問題の提起

いま、Fig. 1 に示すむだ時間を含む線形系を考えると、状態方程式は次のように表わされる。

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)\xi(t, 1) + C(t)u(t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \xi(t, s)}{\partial t} + N(t, s) \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial s} = 0 \quad (2)$$

$$0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq s \leq 1$$

境界条件,

$$\xi(t, 0) = x(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

初期条件,

† 第 12 回自動制御連合講演会で発表 (昭 44-11)

Fig. 1 System with time-delay

$$\xi(0, s) = \xi_0(s), \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (4)$$

$$x(0) = x_0 \quad (5)$$

ここで、 $x(t)$ は集中定数サブシステムの n 次元状態ベクトル、 $\xi(t, s)$ 、 $(0 \leq s \leq 1)$ は分布定数サブシステムの n 次元状態ベクトル値関数、 u は r 次元制御ベクトルであり、 $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 $C(t)$ はそれぞれ、 $n \times n$ 、 $n \times n$ 、 $n \times r$ 行列で、 t の連続関数とする。 $N(t, s)$ は、 $n \times n$ の対角行列で、各要素 $\nu_i(t, s)$ 、 $i=1, 2, \dots, n$ は、 t, s に関する連続関数で正の値をとる。いま、むだ時間 $\theta_i(t)$ 、 $(i=1, 2, \dots, n)$ を正で連続微分可能、かつ $d\theta_i(t)/dt < 1$ 、 $(i=1, 2, \dots, n)$ とするとき、係数 $\nu_i(t, s)$ を、

$$\nu_i(t, s) = \frac{1 - s \frac{d\theta_i(t)}{dt}}{\theta_i(t)}$$

$$0 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq 1, i=1, 2, \dots, n$$

のように定義すれば⁶⁾、系 (2) の境界条件 (3) 式に対する解は、

$$\xi_i(t, s) = x_i(t - s\theta_i(t)) \quad (6)$$

$$0 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq 1, i=1, 2, \dots, n$$

となることが容易に確かめられる。ただし、 $t - s\theta_i(t) \leq 0$ に対しては、初期条件 (4) 式より、

$$x_i(t - s\theta_i(t)) \equiv \xi_{0i}\left(-\frac{t - s\theta_i(t)}{\theta_i(0)}\right) \quad (7)$$

とする。また、(7) 式から、初期条件 (4) のかわりに、

$$x_i(-s\theta_i(0)) = \xi_{0i}(s)$$

$$0 \leq s \leq 1, i=1, 2, \dots, n$$

によって定義された $x_i(\tau)$ 、 $-\theta_i(0) \leq \tau < 0$ 、 $i=1, 2, \dots, n$ を考えることもできる。このようにすれば、

(6) 式から、

$$\xi_i(0, s) = x_i(-s\theta_i(0))$$

$$0 \leq s \leq 1, i=1, 2, \dots, n$$

となる。このように、系 (2) の解 $\xi_i(t, \cdot)$ 、 $i=1, 2, \dots, n$ は、 x_i の履歴 $x_i(\tau)$ 、 $t - \theta_i(t) \leq \tau \leq t$ に対応する。

(1)~(5) 式で表わされるむだ時間を含む系の状態は、 $\pi(t) = \{x(t), \xi(t, \cdot)\}$ で規定される。ただし、 $\xi(t, \cdot) = \{\xi(t, s) | 0 \leq s \leq 1\}$ である*。以下の計算を明確にするため $x(t)$ 、および $\xi(t, \cdot)$ をそれぞれ E^n 、および $L_2^n[0, 1]$ の要素としよう。すなわち、(1)~(5) 式の系の状態空間を Π とすると、各時刻 $t \in [0, T]$ で、 $\Pi \subseteq E^n \times L_2^n[0, 1]$ である。

このとき、(1)~(5) 式であらわされる系において、

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \{x^T(t)P(t)x(t) + u^T(t)Q(t)u(t)\} dt \quad (8)$$

を最小にする制御 $u(t)$ 、 $0 \leq t \leq T$ を見つける問題を考える。ただし、ここでは制御に拘束がないものとする。 P, Q はそれぞれ $n \times n$ 、 $r \times r$ の対称行列であり、 t に関して連続である。また、 P は半正定値、 Q は正定値であるとする。 x^T, u^T は、それぞれ x, u の転置をあらわす。

3. 最適制御

前章で定式化された最適制御問題を、D. P. 法を用いて解き、最適制御を決定する。まず、はん関数 V を次のように定義する。

$$V(x(t), \xi(t, \cdot), t) = \min_{\substack{u(\tau) \\ t \leq \tau \leq T}} \left[\frac{1}{2} \int_t^T \{x^T(\tau)P(\tau)x(\tau) + u^T(\tau)Q(\tau)u(\tau)\} d\tau \right] \quad (9)$$

以下、簡単のため、 $V(x(t), \xi(t, \cdot), t)$ を $V(x, \xi, t)$ とあらわすことにする。

$t = T$ では、

$$V(x, \xi, T) = 0 \quad (10)$$

となる。ここで、 $V(x, \xi, t)$ の定義式 (9) から、

$$\frac{1}{2} \int_t^T \{x^T(\tau)P(\tau)x(\tau) + u^T(\tau)Q(\tau)u(\tau)\} d\tau - V(x, \xi, t) \geq 0 \quad (11)$$

となるが、評価関数 (8) 式を最小にする $u(t)$ に対しては等号が成立つから、(9) 式は次のように書き直される。

* ここでは、たまたま $\xi(t, 0) = x(t)$ であるが、一般に $s=0$ における $\xi(t, \cdot)$ の境界としては $\xi(t, 0) = h(x(t), u(t), t)$ のような場合が考えられるので、系全体の状態は $\pi(t) = \{x(t), \xi(t, \cdot)\}$ によって規定される。ここで扱う問題においては、上に述べたように $\xi_i(t, s)$ 、 $0 \leq s \leq 1$ 、 $i=1, 2, \dots, n$ は $x_i(\tau)$ 、 $t - \theta_i(t) \leq \tau \leq t$ に対応している。

$$\min_{\substack{u(\tau) \\ t \leq \tau \leq T}} \left[\frac{1}{2} \int_t^T \{x^T(\tau)P(\tau)x(\tau) + u^T(\tau)Q(\tau)u(\tau)\} d\tau - V(x, \xi, t) \right] = 0 \quad (12)$$

いま、区間 $[t, T]$ を、 $\tau = t + \Delta t$ で二分して、最適性の原理を用いると、

$$\begin{aligned} & \min_{\substack{u(\tau) \\ t \leq \tau \leq t + \Delta t}} \left[\frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} \{x^T(\tau)P(\tau)x(\tau) + u^T(\tau)Q(\tau)u(\tau)\} \right. \\ & \quad \times d\tau + \frac{1}{2} \int_{t+\Delta t}^T \{x^T(\tau)P(\tau)x(\tau) \\ & \quad \left. + u^T(\tau)Q(\tau)u(\tau)\} d\tau - V(x, \xi, t) \right] \\ & = \min_{\substack{u(\tau) \\ t \leq \tau \leq t + \Delta t}} \left[\frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} \{x^T(\tau)P(\tau)x(\tau) + u^T(\tau)Q(\tau)u(\tau)\} \right. \\ & \quad \left. \times d\tau + V(x, \xi, t + \Delta t) - V(x, \xi, t) = 0 \right] \quad (13) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $V(x, \xi, t + \Delta t) \equiv V(x, (t + \Delta t), \xi(t + \Delta t, \cdot), t + \Delta t)$ である。ここで、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を考えると、

$$\min_{\substack{u(t) \\ 0 \leq t \leq T}} \left[\frac{1}{2} \{x^T(t)P(t)x(t) + u^T(t)Q(t)u(t)\} + \frac{dV(x, \xi, t)}{dt} \right] = 0 \quad (14)$$

なるはん関数方程式を得る。

ここで、(14) 式のはん関数方程式から最適制御を決定するために、はん関数 $V(x, \xi, t)$ を次のような 2 次形式と仮定する。

$$\begin{aligned} V(x, \xi, t) &= \frac{1}{2} (x(t), R_1(t)x(t))_{E^n} + (x(t), \\ & \quad \int_0^1 R_2(t, s)\xi(t, s)ds)_{E^n} + \frac{1}{2} (\xi(t, s'), \\ & \quad \int_0^1 R_3(t, s, s')\xi(t, s)ds)_{L_2^n[0, 1]} \\ &= \frac{1}{2} x^T(t)R_1(t)x(t) + x^T(t) \int_0^1 R_2(t, s) \\ & \quad \times \xi(t, s)ds + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \xi^T(t, s')R_3(t, s, s') \\ & \quad \times \xi(t, s)dsds' \quad (15) \end{aligned}$$

ただし、 $(\cdot)_{E^n}$ 、および $(\cdot)_{L_2^n[0, 1]}$ は、それぞれ空間 E^n 、 $L_2^n[0, 1]$ における内積を表わす。

はん関数 $V(x, \xi, t)$ は、任意の $(x(t), \xi(t, \cdot)) \neq (0, 0)$ 、 $t \neq T$ に対して正でなくてはならないが、そのための 1 つの十分条件は以下になる。

(i) $R_1(t)$ は、 $t \in [0, T]$ に関して連続微分可能な $n \times n$ の対称行列で、かつ $t \neq T$ で正定値。

(ii) $R_2(t, s)$ は、 $t \in [0, T]$ 、 $s \in [0, 1]$ に関して連続微分可能な $n \times n$ の行列で線形オペレータ $L_2^n[0, 1] \rightarrow E^n$ ： $\int_0^1 R_2(t, s)\xi(t, s)ds$ を定義し、任意の $x(t) \neq 0$ 、 $\xi(t, \cdot) \neq 0$ 、 $t \neq T$ に対して、

$$x^T(t) \int_0^1 R_2(t, s)\xi(t, s)ds > 0 \quad (16)$$

(iii) $R_3(t, s, s')$ は、 $t \in [0, T]$ 、 $s, s' \in [0, 1]$ に関して連続微分可能な $n \times n$ の行列で、 $[s, s']$ に関して対称で、線形オペレータ $L_2^n[0, 1] \rightarrow L_2^n[0, 1]$ ： $\int_0^1 R_3(t, s, s')\xi(t, s)ds$ を定義し、任意の $\xi(t, \cdot) \neq 0$ 、 $t \neq T$ に対して、

$$\int_0^1 \int_0^1 \xi^T(t, s')R_3(t, s, s')\xi(t, s)dsds' > 0 \quad (17)$$

でなくてはならない。さらに、 R_1 、 R_2 および R_3 に関して、(10)、(15) 式から、 $t = T$ で、

$$R_1(T) = 0, R_2(T, s) = 0, R_3(T, s, s') = 0 \quad (18)$$

$$s, s' \in [0, 1]$$

でなくてはならない。

ここで、仮定したはん関数 (15) を (14) 式に代入するために、まず $V(x, \xi, t)$ の t に関する全微分を計算しなくてはならない。これは、

$$\begin{aligned} \frac{dV(x, \xi, t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [V(x(t + \Delta t), \xi(t + \Delta t, \cdot), \\ & \quad t + \Delta t) - V(x(t), \xi(t, \cdot), t)] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[V(x(t) + \frac{dx(t)}{dt}\Delta t + o_1(\Delta t), \right. \\ & \quad \xi(t, \cdot) + \frac{\partial \xi(t, \cdot)}{\partial t}\Delta t + o_2(\Delta t), t + \Delta t) \\ & \quad \left. - V(x(t), \xi(t, \cdot), t) \right] \quad (19) \end{aligned}$$

と定義される⁷⁾。ただし、 $\Delta t \rightarrow 0$ に対し、 $\frac{o_1(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0$ 、

$\frac{o_2(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0$ である。(19) 式は、はん関数 V の x, ξ に

関する弱微分にほかならない⁷⁾ から、

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\nabla_x V, \frac{dx}{dt} \right)_{E^n} + \left(\nabla_\xi V, \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{L_2^n[0, 1]} \quad (20)$$

となる。ここで、 $\nabla_x V$ 、 $\nabla_\xi V$ は、それぞれ V の x, ξ に関する (x, ξ, t) での weak gradient であり、第 2 項および第 3 項は、それぞれ E^n 、 $L_2^n[0, 1]$ 空間における内積である。これを、さらに (15) 式、(1) 式を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{2} \left(x, \frac{dR_1}{dt} x \right)_{E^n} + \left(x, \int_0^1 \frac{\partial R_2}{\partial t} \xi ds \right)_{E^n} \\ & \quad + \frac{1}{2} \left(\xi, \int_0^1 \frac{\partial R_3}{\partial t} \xi ds \right)_{L_2^n[0, 1]} + \left(R_1 x, \frac{dx}{dt} \right)_{E^n} \\ & \quad + \left(\int_0^1 R_2 \xi ds, \frac{dx}{dt} \right)_{E^n} + \left(R_2^T x, \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{L_2^n[0, 1]} \\ & \quad + \left(\int_0^1 R_3 \xi ds, \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{L_2^n[0, 1]} \\ &= \frac{1}{2} x^T(t) \frac{dR_1(t)}{dt} x(t) + x^T(t) \int_0^1 \frac{\partial R_2(t, s)}{\partial t} \xi(t, s)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \xi(t, s) ds + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \xi^T(t, s') \frac{\partial R_3(t, s, s')}{\partial t} \\
 & \times \xi(t, s) ds ds' + x^T(t) R_1(t) \{A(t)x(t) \\
 & + B(t)\xi(t, 1) + C(t)u(t)\} + \int_0^1 \xi^T(t, s) \\
 & \times R_2^T(t, s) ds \cdot \{A(t)x(t) + B(t)\xi(t, 1) \\
 & + C(t)u(t)\} + x^T(t) \int_0^1 R_2(t, s) \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial t} ds \\
 & + \int_0^1 \int_0^1 \xi^T(t, s') R_3(t, s, s') \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial t} ds ds' \\
 & \quad (21)
 \end{aligned}$$

となる。(21)式を(14)式に代入し、 u に依存しない $\partial V/\partial t$ を $\min_u$ の外に出すと、

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial V}{\partial t} = \min_{u(\tau)} & \left[\frac{1}{2} \{x^T(t)P(t)x(t) + u^T(t)Q(t)u(t)\} \right. \\
 & + \{R_1(t)x(t) + \int_0^1 R_2(t, s)\xi(t, s)ds\}^T \\
 & \times \{A(t)x(t) + B(t)\xi(t, 1) + C(t)u(t)\} \\
 & + \int_0^1 x^T(t)R_2(t, s) \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial t} ds \\
 & \left. + \int_0^1 \int_0^1 \xi^T(t, s') R_3(t, s, s') \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial t} ds ds' \right] \\
 & \quad (22)
 \end{aligned}$$

となる。

ここで、(22)式の右辺の u に関する二階偏微分係数 $Q(t)$ は正定値であるから、(22)式の右辺を最小にする u は、一階偏微分係数をゼロにする⁷⁾。したがって、

$$\begin{aligned}
 & Q(t)u(t) + C^T(t)\{R_1(t)x(t) \\
 & + \int_0^1 R_2(t, s)\xi(t, s)ds\} = 0 \\
 & \quad (23)
 \end{aligned}$$

が導かれ、最適制御 $u(t)$ は、

$$\begin{aligned}
 & u(t) = -Q^{-1}(t)C^T(t)\{R_1(t)x(t) \\
 & + \int_0^1 R_2(t, s)\xi(t, s)ds\} \\
 & \quad (24)
 \end{aligned}$$

で与えられる。(24)式からわかるように、最適制御 $u(t)$ は、集中定数サブシステムの状態 $x(t)$ と、むだ時間要素の状態 $\xi(t, \cdot)$ の線形結合として表わされるフィードバック制御の形となっている。すなわち、最適フィードバック制御が集中定数サブシステムの状態 $x(t)$ のみによって決まるのではなく、過去の履歴 $x(\tau)$ 、 $t-\theta(t) \leq \tau < t$ にも関係するということを示している (Fig. 2 参照)。

ただし、係数行列 $R_1(t)$ 、 $R_2(t, s)$ および $R_3(t, s, s')$ は、次の Riccati 形方程式、

$$\begin{aligned}
 & \frac{dR_1(t)}{dt} + R_1(t)A(t) + A^T(t)R_1(t) \\
 & - R_1(t)C(t)Q^{-1}(t)C^T(t)R_1(t) + P(t)
 \end{aligned}$$

Fig. 2 Optimal feedback control of the system with time-delay

$$+ R_2(t, 0)N(t, 0) + N(t, 0)R_2^T(t, 0) = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial R_2(t, s)}{\partial t} + \frac{\partial R_2(t, s)N(t, s)}{\partial s} + A^T(t)R_2(t, s) \\
 & - R_1(t)C(t)Q^{-1}(t)C^T(t)R_2(t, s) \\
 & + N(t, 0)R_3(t, s, 0) = 0 \\
 & \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial R_3(t, s, s')}{\partial t} + \frac{\partial R_3(t, s, s')N(t, s)}{\partial s} \\
 & + \frac{\partial N(t, s')R_3(t, s, s')}{\partial s'} - R_2^T(t, s')C(t)Q^{-1}(t) \\
 & \times C^T(t)R_2(t, s) = 0 \\
 & \quad (27)
 \end{aligned}$$

および、境界条件、

$$R_1(t)B(t) - R_2(t, 1)N(t, 1) = 0 \quad (28)$$

$$R_2^T(t, s)B(t) - R_3^T(t, s, 1)N(t, 1) = 0 \quad (29)$$

$$(R_2^T(t, s)B(t) - R_3(t, 1, s)N(t, 1) = 0) \quad (30)$$

さらに、(18)式から終端条件、

$$R_1(T) = 0 \quad (31)$$

$$R_2(T, s) = 0 \quad (32)$$

$$R_3(T, s, s') = 0 \quad (33)$$

を満足しなくてはならない (付録参照)。

4. 定常系の最適制御

前章では、非定常線形系の有限時間内における2次形式評価関数に対する最適制御を考えた。その結果として、最適制御は線形フィードバック制御の形として表わされ、そのフィードバックゲインは、時間の関数となった。

ここでは、系が定常線形系の場合を考える。すなわち、(1)、(2)式の係数を、

$$A(t) = A, B(t) = B, C(t) = C, N(t, s) = N \quad (34)$$

とする。 $N(t, s) = N$ の場合には、(6)式から、

$$\nu_i = \frac{1}{\theta_i} \quad i=1, 2, \dots, n$$

である。さらに、評価関数の重み係数も定数、すなわ

ち、

$$P(t)=P, Q(t)=Q \quad (35)$$

とする。これらのことより (25)~(27) 式は、定常な Riccati 形方程式になる。さらに、考えている時間区間を $[0, \infty)$ とすると、(25)~(27) 式の Riccati 形方程式の解は時間に無関係なものでなくてはならない。すなわち、

$$\begin{aligned} R_1(t) &= R_1, R_2(t, s) = R_2(s), R_3(t, s, s') \\ &= R_3(s, s') \end{aligned} \quad (36)$$

このような定常解が存在するためには、系が漸近安定でなくてはならない。これは、 $V(x, \xi, t)$ がリアプノフ関数となることより証明されるが、ここでは省略する。このとき、係数行列 $R_1, R_2(s), R_3(s, s')$ は、(25)~(30) 式から、

$$\begin{aligned} R_1 A + A^T R_1 - R_1 C Q^{-1} C^T R_1 + P + R_2(0) N \\ + N R_2^T(0) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_2(s)}{\partial s} N + A^T R_2(s) - R_1 C Q^{-1} C^T R_2(s) \\ + N R_3(s, 0) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_3(s, s')}{\partial s} N + N \frac{\partial R_3(s, s')}{\partial s'} - R_2^T(s') C Q^{-1} C^T \\ \times R_2(s) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

および、境界条件、

$$R_1 B - R_2(1) N = 0 \quad (40)$$

$$R_2^T(s) B - R_3^T(s, 1) N = 0 \quad (41)$$

$$(R_2^T(s) B - R_3^T(1, s) N = 0) \quad (42)$$

を満足しなければならない。

したがって、最適制御は、(24) 式から、

$$u(t) = -Q^{-1} C^T \{ R_1 x(t) + \int_0^1 R_2(s) \xi(t, s) ds \} \quad (43)$$

となり、ゲインが時間によって変化しない線形フィードバック制御となる。

5. む す び

本研究では、むだ時間を含む線形系の 2 次形式評価関数に対する最適制御問題を考えた。その結果、最適制御が、集中定数系および分布定数系で表わされる各

サブシステムの状態の線形結合、すなわち、系の状態の線形フィードバックによって表わされることが導びかれた。いい換えれば、むだ時間を含む系のフィードバック制御が、集中定数系の状態 $x(t)$ のみによって決まるのではなく、その過去の履歴 $x(\tau), t-\theta(t) \leq \tau < t$ にも関係することになる。さらに、フィードバック制御の最適ゲインが、Riccati 形の常微分および偏微分方程式を満たすことを示した。このように、むだ時間を含む線形系においても、集中定数系に対する最適制御問題と類似の結果、すなわち、線形フィードバック制御が得られるということが示された。なお、得られた Riccati 形方程式の解の存在と唯一性についての証明は別の機会にゆずる。

むだ時間要素の状態方程式 (2) は、これをやや一般化することによって、さらに広い分布定数制御系を対象として含ませることができ³⁾、ここで展開した議論を拡張してより一般的な集中定数系と一階偏微分方程式で表わされる分布定数系との結合系のフィードバック制御問題を扱うことができる。

参 考 文 献

- 1) R.E. Kalman: When is a Linear Control System Optimal?, Trans. ASME, J. Basic Engineering, Vol. 86, 51/60 (1964)
- 2) V. S. Balakirev: The Principle of the Maximum in the Theory of Second Order Optimal Systems, Automation and Remote Control, 23-8, 948/956 (1962)
- 3) E. Shimemura: Optimal Problem in System with Time-Delay, IFAC Symposium, Düsseldorf (1968)
- 4) E. Shimemura: Optimal Problem in Control System with Time-Delay, 早稲田大学理工学部紀要, No. 33, 11/20 (1969)
- 5) O. J. M. Smith: A Controller to Overcome Dead Time, ISA J., 6-2, 28/33 (1959)
- 6) S. Hiratsuka and A. Ichikawa: Optimal Control of Systems with Transportation Lags, IEEE Trans., AC-14-3, 237/247 (1969)
- 7) L. A. Lusternik and V. L. Sobolev: Elements of Functional Analysis, Hindustan Publishing Corp., (1961)

□ 付 録 □

最適フィードバック制御を与えるには、仮定したはん関数の係数 R_1, R_2, R_3 が (25)~(33) 式で表わされる Riccati 形方程式、境界条件および終端条件を満足しなくてはならない。それは次のようにして証明さ

れる。

最適制御 $u(t)$ が (24) 式で与えられたとき、最適軌道上で $-\partial V/\partial t$ は (22), (15) 式から、

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial V}{\partial t} = & \frac{1}{2} x^T(t) P(t) x(t) \\
 & + \frac{1}{2} \{R_1(t) x(t) + \int_0^1 R_2(t, s') \xi(t, s') ds'\}^T \\
 & \times C(t) Q^{-1}(t) Q(t) Q^{-1}(t) C^T(t) \cdot \{R_1(t) x(t) \\
 & + \int_0^1 R_2(t, s) \xi(t, s) ds\} + \{R_1(t) x(t) \\
 & + \int_0^1 R_2(t, s') \xi(t, s') ds'\}^T [A(t) x(t) \\
 & + B(t) \xi(t, 1) - C(t) Q^{-1}(t) C^T(t) \{R_1(t) x(t) \\
 & + \int_0^1 R_2(t, s) \xi(t, s) ds\}] + \int_0^1 x^T(t) R_2(t, s) \\
 & \times \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial t} ds + \int_0^1 \int_0^1 \xi^T(t, s') R_3(t, s, s') \\
 & \times \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial t} ds ds' = -\frac{1}{2} x^T(t) \frac{dR_1(t)}{dt} x(t) - x^T(t) \\
 & \int_0^1 \frac{\partial R_2(t, s)}{\partial t} \xi(t, s) ds - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \xi^T(t, s') \\
 & \times \frac{\partial R_3(t, s, s')}{\partial t} \xi(t, s) ds ds' \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

となる。また、(2), (3) 式から、

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^T(t) R_2(t, s) \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial t} ds = & -\int_0^1 x^T(t) R_2(t, s) \\
 & \times N(t, s) \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial s} ds = x^T(t) \left\{ -R_2(t, 1) N(t, 1) \right. \\
 & \times \xi(t, 1) + R_2(t, 0) N(t, 0) x(t) \\
 & \left. + \int_0^1 \frac{\partial R_2(t, s)}{\partial s} N(t, s) \xi(t, s) ds \right\} \quad (A.2) \\
 \int_0^1 \int_0^1 \xi^T(t, s') R_3(t, s, s') \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial t} ds ds' \\
 = & -\int_0^1 \int_0^1 \xi^T(t, s') R_3(t, s, s') N(t, s) \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial s} ds ds' \\
 = & -\int_0^1 \left\{ \xi^T(t, s') R_3(t, 1, s') N(t, 1) \xi(t, 1) \right. \\
 & - \xi^T(t, s') R_3(t, 0, s') N(t, 0) x(t) \\
 & \left. - \int_0^1 \xi^T(t, s') \frac{\partial R_3(t, s, s')}{\partial s} N(t, s) \xi(t, s) ds \right\} ds' \quad (A.3)
 \end{aligned}$$

が導びかれ、これらと、

$$R_3^T(t, s, s') = R_3(t, s', s)$$

の関係より、(A.1) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 x^T(t) \left\{ \frac{1}{2} \frac{dR_1(t)}{dt} + \frac{1}{2} P(t) - \frac{1}{2} R_1(t) C(t) Q^{-1}(t) \right. \\
 \left. \times C^T(t) R_1(t) + R_1(t) A(t) + R_2(t, 0) N(t, 0) \right\} x(t) \\
 + \int_0^1 \int_0^1 \xi^T(t, s') \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial R_3(t, s, s')}{\partial t} - \frac{1}{2} R_2^T(t, s') \right. \\
 \times C(t) Q^{-1}(t) C^T(t) R_2(t, s) \\
 \left. + \frac{\partial R_3(t, s, s')}{\partial s} N(t, s) \right\} \xi(t, s) ds ds'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^1 \left[x^T(t) \left\{ \frac{\partial R_2(t, s)}{\partial t} - \frac{1}{2} R_1(t) C(t) Q^{-1}(t) \right. \right. \\
 & \times C^T(t) R_2(t, s) + \left. \left. \frac{\partial R_2(t, s) N(t, s)}{\partial s} \right\} \xi(t, s) \right. \\
 & + \xi^T(t, s) \left\{ -\frac{1}{2} R_2^T(t, s) C(t) Q^{-1}(t) C^T(t) R_1(t) \right. \\
 & + R_2^T(t, s) A(t) + R_3(t, 0, s) N(t, 0) \left. \right\} x(t) \\
 & + x^T(t) \{R_1(t) B(t) - R_2(t, 1) N(t, 1)\} \xi(t, 1) \\
 & + \int_0^1 \xi^T(t, s') \{R_2^T(t, s') B(t) - R_3(t, 1, s') \\
 & \times N(t, 1)\} \xi(t, 1) ds' \\
 & = 0 \quad (A.4)
 \end{aligned}$$

ここで、 s の被積分関数のスカラー量に対して、

$$\begin{aligned}
 \xi^T(t, s) \left\{ -\frac{1}{2} R_2^T(t, s) C(t) Q^{-1}(t) C^T(t) R_1(t) \right. \\
 + R_2^T(t, s) A(t) + R_3(t, 0, s) N(t, 0) \left. \right\} x(t) \\
 = x^T(t) \left\{ -\frac{1}{2} R_1(t) C(t) Q^{-1}(t) C^T(t) R_2(t, s) \right. \\
 + A^T(t) R_2(t, s) + N(t, 0) R_3(t, s, 0) \left. \right\} \xi(t, s) \quad (A.5)
 \end{aligned}$$

の関係があるから、これを考慮し、(A.4) 式が任意の状態 $x(t)$, $\xi(t, s)$ に対して成立つためには、2次形式の係数がゼロにならなければならないことより、 $R_1(t)$, $R_2(t, s)$, $R_3(t, s, s')$ は次の Riccati 形方程式、

$$\begin{aligned}
 \frac{dR_1(t)}{dt} + R_1(t) A(t) + A^T(t) R_1(t) - R_1(t) C(t) Q^{-1} \\
 \times (t) C^T(t) R_1(t) + P(t) + R_2(t, 0) N(t, 0) \\
 + N(t, 0) R_2^T(t, 0) = 0 \quad (A.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_2(t, s)}{\partial t} + \frac{\partial R_2(t, s) N(t, s)}{\partial s} + A^T(t) R_2(t, s) \\
 - R_1(t) C(t) Q^{-1}(t) C^T(t) R_2(t, s) \\
 + N(t, 0) R_3(t, s, 0) = 0 \quad (A.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_3(t, s, s')}{\partial t} + \frac{\partial R_3(t, s, s') N(t, s)}{\partial s} \\
 + \frac{\partial N(t, s') R_3(t, s, s')}{\partial s'} - R_2^T(t, s') C(t) Q^{-1}(t) \\
 \times C^T(t) R_2(t, s) = 0 \quad (A.8)
 \end{aligned}$$

および、境界条件、

$$R_1(t) B(t) - R_2(t, 1) N(t, 1) = 0 \quad (A.9)$$

$$R_2^T(t, s) B(t) - R_3^T(t, s, 1) N(t, 1) = 0 \quad (A.10)$$

$$(R_2^T(t, s) B(t) - R_3(t, 1, s) N(t, 1) = 0) \quad (A.11)$$

を満足しなくてはならないことが導びかれる。また、前に得られた終端条件 (18) も満足しなくてはならない。