M 系列信号を用いる 2 次系の動特性測定†

柏 木 潤・灘 吉 一 隆

熊本大学工学部 熊本市黒髪町
(昭和 45 年 7 月 29 日 受付)

Identification of a Second Order System by Use of *M*-Sequence Signal

Hiroshi KASHIWAGI and Kazutaka NADAYOSHI

(Faculty of Engineering, Kumamoto University, Kumamoto)
(Received July 29, 1970)

When an *M*-sequence signal is used as an input to a system to be identified, the crosscorrelation of input and output gives approximately the system impulse response provided that the shift pulse period T of the *M*-sequence generator is sufficiently small. However, if T is not so small, the crosscorrelation function no longer gives the impulse response.

In this paper, the effect of T on the crosscorrelation function is calculated in the case where the system is of second order. And it is shown that, with only the gain correction, the crosscorrelation function can approximate the impulse response within the error of 3%, when

$$\omega_n T \leq 0.6$$

where ω_n is the natural frequency of the system. On the basis of this fact, a simple and practical method for system identification is described. In this method, no delay elements are used and the delay time is changed by varying T and by using several logic multipliers.

The results of analog computer simulation agreed well with the theoretical considerations.

1. ま え が き

制御系の動特性を測定することは制御を行なうにあたって基本的に重要なことである。そのため現在までに数多くの研究がなされ、種々の方法が報告されている。それらのうち、比較的簡単に作れる試験信号が使えて、操業中のプロセスなどにも大きな外乱を与えることなく動特性が測定できるものとして、*M* 系列信号を用いた動特性測定法がいくつか報告され^{1)~5)}、実用上有用なものと考えられている。

しかし実際にこの方法を使用しようとするときは、いままでに報告されている方法よりさらに具体的で簡単な測定の手法があればたいへん便利であろう。

本論文はこのような観点に立ち、制御系の 1 つの代表として 2 次系を考え、次の 2 点を明らかにしようとするものである。

(1) 比較的長い周期の *M* 系列信号を入力信号として用いたとき、その最小ビット幅 T の大きさは測定結

果にどのような影響をもつか。それに基づいて T をどのように選んだらよいか。

(2) *M* 系列信号の性質を利用すると、系の出力との相関をとるさいに遅延装置を不要にすることができ、具体的にどのような構成にすれば簡単な測定が行なえるか。

そのために、まず 2 次系の入力となる *M* 系列信号と出力との相互相関関数を計算して T の影響を考察し、その結果に基づいて動特性測定装置を構成し、アナログ計算機によってシミュレートした結果について述べる。

2. 入出力の相互相関関数

系への入力信号を $x(t)$ 、出力信号を $y(t)$ 、インパルス応答を $w(\tau)$ とすれば、一般に、

$$\phi_{xy}(t) = \int_0^\infty w(\sigma) \phi_{xx}(t-\sigma) d\sigma \quad (1)$$

が成立つ。ここに $\phi_{xy}(t)$ は入出力信号間の相互相関関数、 $\phi_{xx}(t)$ は入力信号の自己相関関数を表わす。

† 第 7 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 43・9)

入力 $x(t)$ が M 系列信号のときは, $\phi_{xx}(t)$ は Fig. 1 に示されるような三角波の列となるが, いまその周期が比較的長い場合を考えて, これを Fig. 2 で示されるような孤立した三角波で近似する. M 系列信号の周期 N がたとえば 127 のときは, $-1/N \approx 0.8\%$ 程度であるから, N がそれ以上であればこの近似を用いてさしつかえないであろう.

Fig. 1 Autocorrelation function of M -sequence signal

Fig. 2

測定対象は, 固有周波数 ω_n , 制動比 ζ の 2 次系とすると, インパルス応答は, $\zeta < 1$ のとき,

$$w(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \exp(-\zeta\omega_n t) \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \quad (2)$$

で与えられ, また $\phi_{xx}(t)$ が Fig. 2 のような三角波のときは,

$$\phi_{xx}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \quad (3)$$

と表わされるから, (2), (3) 式を (1) 式に代入すれば, $\phi_{xy}(t)$ は次のように求められる.

$t \leq -T$ のとき,

$$\phi_{xy}(t) = 0$$

$-T \leq t \leq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(t) = & 1 + \frac{t}{T} - \frac{2\zeta}{\omega_n T} \frac{e^{-\zeta\omega_n(t+T)}}{\omega_n T} \\ & \times \left\{ \frac{1-2\zeta^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n(t+T) \right. \\ & \left. - 2\zeta \cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n(t+T) \right\} \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq T$ のとき,

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(t) = & 1 - \frac{t}{T} + \frac{2\zeta}{\omega_n T} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n T} \left[\left\{ \frac{2(1-2\zeta^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right. \right. \\ & - \frac{1-2\zeta^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T} \cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n T \\ & - 2\zeta e^{-\zeta\omega_n T} \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n T \left. \right\} \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \\ & - \left(4\zeta + \frac{1-2\zeta^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T} \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n T \right. \\ & \left. \left. - 2\zeta e^{-\zeta\omega_n T} \cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n T \right) \cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \right] \end{aligned}$$

$t \geq T$ のとき,

$$\phi_{xy}(t) = \frac{2e^{-\zeta\omega_n T}}{\omega_n T} \left[\left\{ \frac{1-2\zeta^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} (1 - \cosh\zeta\omega_n T \cos\right. \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n T + 2\zeta \sinh\zeta\omega_n T \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n T \left. \right\} \\ & \times \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \left\{ -2\zeta(1 - \cosh\zeta\omega_n T \cos\right. \\ & \times \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n T) + \frac{1-2\zeta^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sinh\zeta\omega_n T \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n T \left. \right\} \\ & \times \cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \quad (4) \end{aligned}$$

(4) 式を計算してグラフにしたのが Fig. 3 である.

(a)

(b)

Fig. 3 Cross-correlation function $\phi_{xy}(t)$ ($\zeta=0.3$)

以上の計算から次のことがわかる.

(i) $-T \leq t \leq 0$ のとき, $\phi_{xy}(t)$ は t の増加関数であり極値は存在しない.

(ii) $0 \leq t \leq T$ では T の値の小さなるうちは極値はないが, T が大きくなると極値をもつようになる.

($\omega_n=0.3$, $\zeta=0.3$ では約 $T > 4.65$ で極値をもつ)

(iii) $t \geq T$ における (4) 式の $\phi_{xy}(t)$ は,

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(t) = & \frac{1}{\omega_n^2 T} (\cosh\zeta\omega_n T - \cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n T) \\ & \times \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi \quad (5) \end{aligned}$$

と書き変えることができるので (2), (5) 式から, $t \geq T$ においては, $\phi_{xy}(t)$ は真のインパルス応答をゲインを g 倍, 位相を ϕ だけ遅らせたものとなっている. ここに,

$$g = \frac{1}{\omega_n^2 T} (\cosh \zeta \omega_n T - \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n T) \quad (6)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{A}{B} \quad (7)$$

$$A = -2\zeta(1 - \cosh \zeta \omega_n T \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n T)$$

$$+ \frac{1-2\zeta^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sinh \zeta \omega_n T \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n T$$

$$B = \frac{1-2\zeta^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} (1 - \cosh \zeta \omega_n T \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n T)$$

$$+ 2\zeta \sinh \zeta \omega_n T \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n T$$

したがって $\phi_{xx}(t)$ が三角波であることの影響は、Fig. 4 のように等価伝達関数 $G_T(|G_T|=g, \angle G_T=\phi)$ で置き換えることができる。(6), (7) 式を Fig. 5, Fig. 6 に示す。

 Fig. 4 Equivalent transfer function G_T

 Fig. 5 Gain of the equivalent transfer function G_T

3. 真のインパルス応答との差

T は比較的小さいと考えてよいから、 $t \geq T$ について真のインパルス応答との差を調べる。

Fig. 5(b), Fig. 6(b) から明らかなように $\omega_n T$ の小さいところでは、 $\omega_n T$ とゲイン $|G_T|$ はほとんど正比例の関係となり、位相のずれ ϕ は小さい。

いま $|G_T|$ が $\omega_n T$ に比例するとみなしたときの誤

 Fig. 6 Phase of the equivalent transfer function G_T

差の割合を次式のように定める。

$$E_{|G_T|} \triangleq 1 - \frac{|G_T|}{C \cdot \omega_n T} \quad (8)$$

ここで、 C は Fig. 5(b) から求められる傾きである。また位相のずれ ϕ の割合を表わすのに真のインパルス応答の位相との比をとってみよう。

$$E_\phi \triangleq -\frac{\phi}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t} = -\frac{\phi}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n m T} \quad (9)$$

ここで、 mT は遅延時間である。(8), (9) 式を Fig. 7, Fig. 8 に示す。

以上のことから次のことがわかる。

(i) ゲイン $|G_T|$ $\omega_n T \leq 0.6$ では $|G_T|$ は T に比例すると考えてよい。このときの誤差は ζ によらず 3% 以内である。

(ii) 位相差 ϕ $\omega_n T \leq 0.6$ では 2% 以内の誤差で位相の遅れを無視できる。

したがって、 $\zeta < 1$, $t \geq T$ において、 $\omega_n T \leq 0.6$ で

 Fig. 7 $E_{|G_T|}$

Fig. 8 E_ϕ ($m=5$)

は、 M 系列信号の自己相関関数が三角波であることの影響をゲインの補正のみで除くことができる。すなわち、測定により得られた相互相関関数 $\phi_{xy}(t)$ を $1/|G_T|$ 倍すれば、インパルス応答が数 % の誤差で得られることになる。

4. 測定装置の構成

4.1 装置の構成

3. で述べたように $\omega_n T \leq 0.6$ の範囲では、 T を変えても補正は容易であること、および M 系列信号の性質を用いて、簡単な動特性測定装置を構成した (Fig. 9)。すなわち、 M 系列信号発生器によって作った信号

Fig. 9 Block diagram of the impulse response measuring device

M_1 をプロセスに加え、他方では M_1 を時間的にずらせて (といっても遅延装置が必要なわけではなく、 M 系列信号発生器のシフトレジスタの異なる段から信号を取り出せばよい)、もとの M_1 と掛け合わせて、 M_1 よりある遅延時間 mT だけ遅れた信号 M_2 を作る。

このような信号 M_2 を数個 (おのおのの遅延時間を $m_1 T, m_2 T, \dots, m_i T$ とする) 作っておき、シフトパルス周期 T を $\omega_n T \leq 0.6$ の範囲で変えたとき、 $m_1 T, m_2 T, \dots, m_i T$ がお互いに重なり合って測定したい遅延時間の範囲をすべてカバーするように、あらかじめ $m_1, m_2, \dots, m_i$ の組を選んでおく。

このようにすると遅延装置はもちろん不要であり、遅延信号を得るための乗算論理回路も i 個ですみ、一定時間内の任意の遅延時間を得ることができる。

シフトパルス周期 T を変えた場合、それに伴って $1/|G_T|$ のゲインの補正を行なわなければならない。

4.2 パラメータの決定法

測定にさいし定めるべきパラメータのうち主なものは M 系列信号の周期 N 、シフトパルスの周期 T 、遅延

個数 m の 3 つである。そのため、はじめに対象の固有周波数 ω_n と制動比 ζ は与えられているものとして系の整定時間 T_s を定めよう。

(2) 式で示される 2 次系のインパルス応答の概形は、 $\zeta < 1$ のときは一般に Fig. 10 のようになる。極値を

Fig. 10

$a_1, a_2, \dots, a_l, \dots$ とし、それに対応する時間を $t_1, t_2, \dots, t_l, \dots$ としたとき、 $|a_l/a_1|$ は次のように書ける。

$$\left| \frac{a_l}{a_1} \right| = \exp \left\{ -\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} (l-1) \right\} \quad (10)$$

ただし、 $l=2, 3, 4, \dots$

(10) 式において $|a_l/a_1| \approx 1/100$ となったときの時間 t_l を系の整定時間 T_s と定めると、 T_s は、

$$T_s = t_l = \frac{(2l-1)\pi}{2\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} \quad (11)$$

より求められる。

(i) M 系列の周期 N の取りうる範囲 T は遅延時間を変えるとときに変化するのでそれにもなると M 系列信号の周期 NT が変わる。 NT は測定しようとする系の整定時間 T_s に比して長いことが望まれるので、 T を最小としたときの周期 NT が T_s よりも大きくなるように N を定める必要がある。ここでは、 NT は T_s の 1.5 倍以上あれば十分であると考えことにすると、

$$NT \geq 1.5 T_s \quad (12)$$

(11) 式を代入して、

$$N \geq 1.5 \frac{(2l-1)\pi}{2\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n T} \quad (13)$$

ここに l は (10) 式から定まる整数である。(13) 式の範囲を Fig. 11 に示す。

(ii) シフトパルスの周期 T の範囲 T は $\omega_n T \leq 0.6$ から上限が定まり、下限は N によって定まる。すなわち、

$$\frac{1.5(2l-1)}{2\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n N} \leq T \leq \frac{0.6}{\omega_n} \quad (14)$$

(iii) 遅延個数 m いま n のシフトレジスタによって発生させた M 系列信号を k 個 ($0 < k \leq n$) ずらせて、もとの信号と掛け合わせてできる信号の遅延個

Fig. 11

Table 1 Relation between n , N and m
 n : number of stages of shift register
 N : period of M -sequence
 m : delay (mT becomes the delay time)
 k : number of delay between the two signals which are multiplied

n	N	m									
		$k=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	7	5	3	2							
4	15	12	9	4	3						
5	31	18	5	29	10	2					
6	63	6	12	32	24	62	64				
7	127 (A)	7	14	63	28	54	126	1			
7	127 (B)	32	63	8	125	3	15	4			
9	511	130	260	429	9	507	329	67	18	4	
10	1023	77	154	10	308	508	14	1013	608	324	1016

数を n が 10 までについて求めた結果を Table 1 に示す。

(i)において N を定めれば Table 1 からそれに対応する m は定まるので適当なものを使用する。そのとき mT を望む遅延時間の範囲にすることができなければ、 N を別の値にとって mT が望む遅延時間になるまでこの過程を繰り返す。 N , T , m の関係を Fig. 11 に示す。ただし使用した遅延信号発生器においては Table 1 に示す m の値よりもすべて 1 だけ大きい m の値が得られる回路となっている。

例として、 $\zeta=0.3$, $\omega_n=6.0$ の 2 次系を測定するさいのパラメータを決定してみよう。

(1) $\omega_n T=0.6$ と $\zeta=0.3$ から Fig. 11 (a) 点が定まるから $N>45$ でなければならない。その範囲でいま周期 $N=127$ (A) の M 系列を用いるとすれば Fig. 11 (b) 点が定まる。よって (b) 点に対応する下限の $\omega_n T$ が (c) 点と定まる。すなわち、 $\omega_n T$ の範囲は、

$$0.22 \leq \omega_n T \leq 0.6 \quad (15)$$

(2) $N=127$ (A) に対応する遅延個数は Table 1 から、 $m=2, 8, 15, 29, \dots$ と選べる。

(3) それぞれの m について (15) 式から対応する遅延時間 $\omega_n m T$ の範囲が定まる。すなわち、

$$0.22 m \leq \omega_n m T \leq 0.6 m \quad (16)$$

なる範囲で測定が可能となる。これから、それぞれの m に対する測定可能な遅延時間の範囲を求めると Fig. 12 となる。この場合は、 $N=127$ (A) は測定不

Fig. 12 Solid lines show the measurable regions

可能な範囲が生ずるため不適当であることがわかる。

周期 N を、 $N=511$ に選び同様な操作を繰返すと遅延時間の範囲は、

$$0.053 m \leq \omega_n m T \leq 0.6 m \quad (17)$$

となる。 $N=511$ において m は、 $m=5, 10, 19, 68, \dots$ であるから測定可能な遅延時間の範囲を示すと Fig. 12 のようになる。したがって、この 2 次系に対して $N=511$ は適当である。

$N=127$ (B) についても同様に測定可能な範囲を求めると、Fig. 12 に示すように、この場合も適当であることがわかる。

4.3 ω_n, ζ がわかっていない場合

いままでは対象の固有周波数や ω_n 制動比 ζ が既知としてパラメータを決める方法を述べてきたが、実際にはこれらがわからない場合が多いであろう。そのとき、 ω_n や ζ についておよその値が見つければ、それを用いてパラメータを決めればよいが、それもわからないときは、系のインパルス応答が最大となるおよその時間 (これを $t_{\max}$ とする) から、 T の上限を定めることができる。

2 次振動系の $t_{\max}$ と ω_n の関係はつぎのようになる。

$$t_{\max} = \eta \cdot \frac{1}{\omega_n} \quad (18)$$

ここに、

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$0 < \zeta < 1$ であるから、 $1 \leq \eta \leq \pi/2$ である。2.2 で求められた T の上限 $\omega_n T \leq 0.6$ に (18) 式を代入すれば、

$$T \leq 0.6 \frac{1}{\omega_n} = 0.6 \frac{1}{\eta} t_{\max}$$

すなわち,

$$T \leq (0.38 \sim 0.6) t_{\max} \quad (19)$$

となる。(19)式から T の上限は $t_{\max}$ の40~60%と近似できる。このことは一般の対象の場合、それを2次系で近似したとき ω_n や ζ がわからなくても、そのインパルス応答の最大になるおよその時間から T の上限を決められるという意味で広く応用できるであろう。

5. アナログ計算機によるシミュレーション

アナログ計算機に2次系をつくり本方法により測定した結果を述べる。入力信号 $x(t)$ として $N=511$ の M 系列信号を用い、遅延信号 $x(t-mT)$ として $m=5, 10, 19, 68$ の4個を使用した。

—×—: $m=5, N=511$ —△—: $m=19, N=511$
—○—: $m=10, N=511$ —□—: $m=68, N=511$
Solid lines: theoretical

Fig. 13 Results of analog computer simulation without gain correction ($\zeta=0.3$)

—×—: $m=5, N=511$ —△—: $m=19, N=511$
—○—: $m=10, N=511$ —□—: $m=68, N=511$
solid line: theoretical

Fig. 14 Results of analog computer simulation with gain correction ($\zeta=0.3$)

Fig. 15 Results of analog computer simulation with gain correction ($\zeta=0.9$)

Fig. 13 は Fig. 9 の $|G_T|$ の補正をしないときの図であるから T によってゲインが異なっている。 $1/|G_T|$ の補正をし真のインパルス応答と比較した結果を Fig. 14, Fig. 15 に示す。測定値とインパルス応答との一致は良好である。

6. あとがき

M 系列信号を入力信号として2次系の動特性を測定するさいに、そのシフトパルス周期 T が測定結果にどのような影響を与えるかを考察し、その結果に基づいて簡単な方法によって動特性を測定する方法および実験結果を示した。

すなわち、2次系に周期の長い M 系列信号を加えたとき、入力と出力の相互相関関数 $\phi_{xy}(t)$ を計算すると、 $t \geq T$ では、自己相関関数が三角波である信号を2次系に加えることは、白色雑音がある等価伝達関数 G_T を通ったのち2次系に加えられることと等価であることを示し、 G_T を調べた結果、 $\omega_n T \leq 0.6$ の範囲でシフトパルス周期 T を変えても、それに応じて $1/|G_T|$ のゲインの補正をすれば、測定した相互相関関数からインパルス応答が求められ、そのときの誤差は3%以内であることを示した。これらの結果に基づいて、遅延装置を必要としない簡単な動特性測定装置を構成し、アナログ計算機によってシミュレートした結果、良好な結果が得られた。

本論文は2次系について考察したが、その他の系についても2次系で近似するなどして同様の方法が用いられるであろうし、少なくともいちおうの目安を得るのに役立つであろうと思われる。

終わりに、日ごろ御指導賜わっている東京大学教授磯部孝先生に深く感謝の意を表する。また本実験に協力された高橋丈児氏〔(現)立石電機(株)〕、中村弘則氏〔(現)日製産業(株)〕に感謝する。

なお本論文の計算は熊本大学電子計算機室のデジタル計算機を使用したことを付記する。

参考文献

- 1) 古田勝久・伊沢計介：プロセス動特性の一測定法、計測と制御、3-9, 665/674 (1964)
- 2) 佐藤 勇：線形なプロセス応答の実時間算定法、計測と制御、3-9, 675/683 (1964)
- 3) M. T. G. Hughes, A. R. M. Noton: The Measurement of Control System Characteristics by Means of a Cross-Correlator, Proc. IEE. Pt. C, 77/83 (1962)
- 4) K. R. Godfrey and W. Murgatroyd: Input-transducer Errors in Binary Crosscorrelation Experiments, Proc. IEE, 112-3, 565/573 (1965)
- 5) A. E. G. Hazlerigg and A. R. M. Noton: Application of Crosscorrelating Equipment to Linear System Identification, Proc. IEE, 112-12, 2385/2400 (1965)