線形離散値系の2次評価を用いた最短時間問題の準最適解†

伊 藤 輝 生

九州工業大学 北九州市戸畑区仙水町 1-1

(昭和 45 年 10 月 16 日 受付)

Suboptimal Solution of the Minimum-Time Problem of Discrete Systems by Using Quadratic Performance Indices

Teruo Ito

(The Electrical Department of Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu)

(Received October 16, 1970)

There are several methods to solve the minimum-time (or the [minimum-stage] problem of discrete systems with the bounded control. Most of these methods are concerned with the computation of the reachable region in some sense. In the computation of the reachable region, as the dimension of the system increases, the computer program becomes more complex and the amount of the computation increases exponentially (since, for example, the number of the corners of the n -dimensional polyhedron in Euclidian space increases exponentially).

This paper analyzes the relation between the optimal solution for the quadratic performance index and the minimum-time solution which minimizes the control cost. Using this relation, the suboptimal solution of the minimum-time problem and its computation algorithms are given. Although the solution is suboptimal, the solutions of several examples are all sufficiently close to the optimal solutions. This method is thought to be applicable without difficulty for multi-input systems.

1. ま え が き

制限付操作量をもつ線形離散値系における最短時間問題（または最小段数問題）については種々に研究されている^{2)~5)}。そこでは、離散値系における最大原理を利用する方法²⁾、擬似逆行列 (pseudo-inverse matrix) を利用する方法³⁾、最終段の位相空間における状態値のノルムを評価として、最急降下法によって解を求めながら、最小段数を求める方法⁴⁾、および到達可能領域の構成を行なう方法⁵⁾などが提案されている。しかしながら、それらの方法の大部分は、まず、操作量の制限値を用いて到達可能領域の全部または一部を計算しつつ最小段数を決定し、つぎに、付加的な評価を設定して操作量を決定する方法が用いられている。このように到達可能領域の計算が関係する場合には、

系の次元数の増大にともなって計算プログラムが複雑化し、計算量が指数的に増大すると考えられる（たとえば、 n 次元空間を面で囲んでできる多面体の頂点数など）。本論文は、このような問題点を考慮して、操作量を決定しつつ最小段数を決定する方法について、その理論と計算アルゴリズムを示す。すなわち、最終段の状態値の2次形式と操作量の2乗和とからなる2次評価に対する最適解をもとめ、最適評価値が原点到達できる段数に対して満足すべき条件を導出し、評価のなかの最終段の状態値の項の重みを限りなく大きくしたとき、その条件を満足する最小の段数が最小段数問題の解となり、そのときの評価に対する最適操作量は最短時間問題の解のうち操作量の2乗和を最小にする唯一解に限りなく近づくことを、操作量の属する集合のコンパクト性から証明した。さらに上述の評価の重みを計算機の精度の範囲内で大きくした場合に、上

† 第 12 回自動制御連合講演会で発表（昭 44・11）

述の条件を満足する最小段数およびその評価に対する最適操作量を近似解として採用し、この近似解を決定するアルゴリズムについて述べる。解の近似度は計算精度を高めれば任意に高くすることができるが、例題の計算結果からもあきらかなように、現在の大形計算機の計算精度により、物理的観点から十分満足できる結果を得ている。この方法によれば系の次元の増加に対して、計算プログラムの複雑化はなく、計算量も大きく変化しない。

2. 仮 定

系は、次のような線形離散値系であるとし可制御であるとする。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k u_k, \quad k=0, \dots, N-1, \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}_k$ は n 次元状態ベクトル、 u_k はスカラー操作量、 ϕ_k は $n \times n$ 遷移行列、および $\mathbf{d}_k$ は $n \times 1$ 駆動行列である。さらに、操作量の制限条件を、

$$|u_k| \leq 1, \quad k=0, \dots, N-1 \quad (2)$$

とする。

以上の条件のもとに、与えられた初期値 $\mathbf{x}_0$ に対して、原点到達、すなわち $\mathbf{x}_N = 0$ となる最小の N および操作量 $u_0, \dots, u_{N-1}$ を決定する問題について考察する。この場合、解は存在するものと仮定する。

このような最短時間問題の解は、よく知られているように唯一ではない^{2), 3)}。本論文では、最小段数問題の解のなかで、操作量の 2 乗の和を最小にする唯一解の解法について考察する。

3. 2 次評価に対する最適解と最短時間問題の解との関係

いま、次のような 2 次の最終値評価を考える。

$$I_N(\epsilon) = \|\mathbf{x}_N\|_Q^2 + \epsilon \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 \quad (3)$$

ここで、一般に $\|\mathbf{x}\|_A^2$ は n 次元ベクトル $\mathbf{x}$ の $n \times n$ 行列 A に関する 2 次形式をあらわすものとし Q は任意の正定値行列、 ϵ はパラメータで、

$$0 < \epsilon \ll 1 \quad (4)$$

とする。もし、与えられた $\mathbf{x}_0$ に対して N 段で原点到達可能ならば、次の関係式が成立する。すなわち、初期値 $\mathbf{x}_0$ を原点に移す操作量を $u'_0, \dots, u'_{N-1}$ とすれば、任意の正定値行列 Q に対して、

$$\begin{aligned} \min_{|u_k| \leq 1, k=0, \dots, N-1} I_N(\epsilon) &\leq I_N|_{u_k=u'_k, k=0, \dots, N-1} \\ &= \epsilon \sum_{k=0}^{N-1} (u'_k)^2 \end{aligned}$$

となる。さらに (2) 式を考慮すれば、

$$\min_{|u_k| \leq 1, k=0, \dots, N-1} I_N(\epsilon) \leq \epsilon N \quad (5)$$

となる。最短時間 $N_{\min}$ も原点到達可能な段数であるから、 $N = N_{\min}$ に対して (5) 式の不等式が成立する。すなわち、(5) 式は最短時間 $N_{\min}$ が満足すべき 1 つの必要条件である (しかし、逆に (5) 式を満足する N がすべて原点到達可能段数とは限らない)。

以下において $\epsilon \rightarrow 0$ とするとき、(5) 式を満足する N の性質および (3) 式の評価 $I_N(\epsilon)$ に対する最適解の性質について考察する。 ϵ はパラメータであるから、 ϵ の変化にしたがって、各値が変化する。したがって ϵ に関係する各値には (ϵ) をつけることにして、一連の記号を次のように定義する。

$\Omega_N(\epsilon)$: (5) 式を満足するすべての段数 N の集合、 $N^*(\epsilon)$: $\Omega_N(\epsilon)$ に属する最小の段数、 $u_k^*(\epsilon)$: (3) 式の評価 $I_N(\epsilon)$ を (1) および (2) 式の条件のもとに最小化する操作量、 $\mathbf{x}_k^*(\epsilon)$: $u_k^*(\epsilon)$ による軌道上の状態値、 $\mathbf{u}_N = [u_0 \dots u_{N-1}]^T$, $\mathbf{u}_N^*(\epsilon) = [u_0^*(\epsilon) \dots u_{N-1}^*(\epsilon)]^T$, U^N : (2) 式を満足するすべての $\mathbf{u}_N$ の集合。 N 次元ユークリッド空間 R^N における有界閉集合 (コンパクト集合)。

このように定義された集合、変数およびベクトルの性質について以下に解析する。

まず、 $\epsilon_1 > \epsilon_2 > 0$ 、ならば $\Omega_N(\epsilon_1) \supset \Omega_N(\epsilon_2)$ であることを示そう。いま、

$$N_2 \in \Omega_N(\epsilon_2) \quad (6)$$

とすれば、 $\Omega_N(\epsilon)$ の定義により、(6) 式を満足するすべての N_2 に対して、

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}_{N_2} \in U^{N_2}} I_{N_2}(\epsilon) &= \|\mathbf{x}_{N_2}^*(\epsilon_2)\|_Q^2 + \epsilon_2 \|\mathbf{u}_{N_2}^*(\epsilon_2)\|^2 \\ &\leq \epsilon_2 N_2 \end{aligned} \quad (7)$$

が成立する。いっぽう、同じ N_2 に対して、 ϵ_1 に対する評価 $I_{N_2}(\epsilon_1)$ を考えれば、(7) 式の $\mathbf{u}_{N_2}^*(\epsilon_2)$ はこの評価に対する最適操作量ではないこと、(2) 式よりあきらかに、

$$\|\mathbf{u}_{N_2}^*(\epsilon_2)\|^2 = \sum_{k=0}^{N_2-1} (u_k^*(\epsilon_2))^2 \leq N_2 \quad (8)$$

であること、および $\epsilon_1 > \epsilon_2 > 0$ であることを考慮すれば、次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}_{N_2} \in U^{N_2}} I_{N_2}(\epsilon_1) &\leq I_{N_2}(\epsilon_1)|_{\mathbf{u}_{N_2}=\mathbf{u}_{N_2}^*(\epsilon_2)} \\ &= \|\mathbf{x}_{N_2}^*(\epsilon_2)\|_Q^2 + \epsilon_1 \|\mathbf{u}_{N_2}^*(\epsilon_2)\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}_{N_2}^*(\epsilon_2)\|_Q^2 + \epsilon_2 \|\mathbf{u}_{N_2}^*(\epsilon_2)\|^2 \\ &\quad + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \|\mathbf{u}_{N_2}^*(\epsilon_2)\|^2 \\ &\leq \epsilon_2 N_2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) N_2 \\ &= \epsilon_1 N_2 \end{aligned} \quad (9)$$

となる。したがって定義により、

$$N_2 \in \Omega_N(\epsilon_1) \quad (10)$$

となる。これで、

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0 \text{ ならば } \Omega_N(\varepsilon_2) \subset \Omega_N(\varepsilon_1) \quad (11)$$

なる関係が得られた。これは、さらに、

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_m \dots \rightarrow 0 \text{ ならば,}$$

$$\Omega_N(\varepsilon_1) \supset \Omega_N(\varepsilon_2) \supset \dots \supset \Omega_N(\varepsilon_m) \supset \dots \quad (12)$$

と書くことができ、この(12)式と $N^*(\varepsilon)$ の定義から、

$$N^*(\varepsilon_1) \leq N^*(\varepsilon_2) \leq \dots \leq N^*(\varepsilon_m) \leq \dots \quad (13)$$

となる。いっぽう、最短時間 $N_{\min}$ については、任意の ε に対して(5)式が成立するから、

$$N_{\min} \in \Omega_N(\varepsilon_i), \quad i=1, \dots, m, \dots \quad (14)$$

となり、したがって、

$$N_{\min} \geq N^*(\varepsilon_i), \quad i=1, \dots, m, \dots \quad (15)$$

となる。(13)式および(15)式は、 $N^*(\varepsilon_i)$ が $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_m > \dots \rightarrow 0$ となる ε_i に対して非減少整数列であり、しかも有界であることを示している。ゆえに、 $N^*(\varepsilon_i)$ は $i \rightarrow \infty$ に対して収束するから、これを $\tilde{N}$ とおけば、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} N^*(\varepsilon_i) = \tilde{N} \quad (16)$$

となる。しかし、さらに、 $N_{\min} \geq N^*(\varepsilon_i) \geq 0$ であり、 $N^*(\varepsilon_i)$ は有限個しかないから、十分に大きな整数 K が存在して

$$N^*(\varepsilon_i) = \tilde{N}, \quad i=K, K+1, \dots \quad (17)$$

となることは容易にわかる。

つぎに、 $\mathbf{x}_N$ の集合のコンパクト性を示そう。(1)式の遷移方程式を繰返し適用することにより、

$$\mathbf{x}_N = \Phi(N:0)\mathbf{x}_0 + G_N \mathbf{u}_N \quad (18)$$

$$\Phi(i:j) = \begin{cases} i > j \text{ ならば } \phi_{i-1}\phi_{i-2}\dots\phi_j \\ i = j \text{ ならば } \mathbf{I} \text{ (単位行列)} \end{cases} \quad (19)$$

$$G_N = [\Phi(N:1)\mathbf{d}_0 \quad \Phi(N:2)\mathbf{d}_1 \dots \Phi(N:N)\mathbf{d}_{N-1}] \quad (20)$$

となる。(18)式は、 $\mathbf{u}_N \in R^N$ から $\mathbf{x}_N \in R^n$ への連続写像であり、 $\mathbf{u}_N$ の集合 U^N はコンパクトであるから $\mathbf{x}_N$ の集合もコンパクトとなる。また、評価 $I_N(\varepsilon)$ に対する最適解の唯一性¹¹⁾から、各 ε_i に対してのおの1つずつの $\mathbf{u}_N^*(\varepsilon_i)$ および $\mathbf{x}_N^*(\varepsilon_i)$ が対応する。したがって上述の ε_i , $i=1, \dots, m, \dots$ の適当な部分列が存在して、

$$\varepsilon_i' > \varepsilon_2' > \dots > \varepsilon_m' > \dots \rightarrow 0 \quad (21)$$

とし、 $\mathbf{u}_N^*(\varepsilon_i')$ および $\mathbf{x}_N^*(\varepsilon_i')$ を収束させることができる¹⁰⁾。これを $\tilde{\mathbf{u}}_N$, $\tilde{\mathbf{x}}_N$ とおけば、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{u}_N^*(\varepsilon_i') = \tilde{\mathbf{u}}_N, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_N^*(\varepsilon_i') = \tilde{\mathbf{x}}_N \quad (22)$$

となる。いま $\tilde{N}$ として、(17)式の $N^*(\varepsilon)$ の収束値 $\tilde{N}$ を用いるとすれば、(12)式から、あきらかに、 $\tilde{N} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \Omega_N(\varepsilon_i)$ であるから、もちろん部分列 ε_i' に対しても、 $\tilde{N} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \Omega_N(\varepsilon_i')$ であり、したがって、(5)

式の関係から、

$$\|\mathbf{x}_N^*(\varepsilon_i')\|_{Q^2} \leq \min_{\mathbf{u}_N \in U^N} I_N(\varepsilon_i') \leq \varepsilon_i' \tilde{N}$$

$$i=1, \dots, m, \dots$$

$$(23)$$

となる。この(23)式において、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i' = 0 \quad (24)$$

であることを考慮すれば、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_N^*(\varepsilon_i')\|_{Q^2}^2 = \|\tilde{\mathbf{x}}_N\|_{Q^2}^2 = 0 \quad (25)$$

となる。 Q は正定値行列であるから、(25)式から、

$$\tilde{\mathbf{x}}_N = 0 \quad (26)$$

を得る。これは、 $\tilde{\mathbf{u}}_N = [\tilde{u}_0 \dots \tilde{u}_{N-1}]^T$ が状態値を $\mathbf{x}_0$ から原点に到達させる操作量であることを示している。また、状態値を $\mathbf{x}_0$ から原点に到達させる最小の段数は $N_{\min}$ であるから、(15)および(16)式の関係を考えることにより、

$$\tilde{N} = N_{\min} \quad (27)$$

となる。まえにものべたように、 $\tilde{N}$ 段で状態値を $\mathbf{x}_0$ から原点に到達させる操作量は必ずしも唯一ではない²⁾。しかし、 $\tilde{N}$ 段で状態値を $\mathbf{x}_0$ から原点に移し、かつ操作量の2乗和 $\|\mathbf{u}_N\|^2$ を最小にする解は唯一である¹¹⁾。そのような解を、

$$\mathbf{u}_{N_{\min}}^0 = \mathbf{u}_N^0 = [u_0 \dots u_{N-1}]^T \quad (28)$$

とおくことにすれば、この $\mathbf{u}_N^0$ は必ずしも $I_N(\varepsilon_i')$ に対する最適解と一致しないから、次の不等式、

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}_N \in U^N} I_N(\varepsilon_i') &\leq I_N(\varepsilon_i') | \mathbf{u}_N = \mathbf{u}_N^0 \\ &= \varepsilon_i' \|\mathbf{u}_N^0\|^2 \end{aligned} \quad (29)$$

が成立する。さらに両辺を ε_i' で割って $i \rightarrow \infty$ とすることにより、(29)式は、

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_i'} \|\mathbf{x}_N^*(\varepsilon_i')\|^2 + \|\mathbf{u}_N^*(\varepsilon_i')\|^2 \right\} \\ \leq \|\mathbf{u}_N^0\|^2 \end{aligned} \quad (30)$$

となる。(22)式にしたがって、(30)式左辺は、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_i'} \|\mathbf{x}_N^*(\varepsilon_i')\|^2 \right\} + \|\tilde{\mathbf{u}}_N\|^2 \quad (31)$$

と書ける。いっぽう、 $\tilde{\mathbf{u}}_N^0$ および $\tilde{\mathbf{u}}_N (= \tilde{\mathbf{u}}_{N_{\min}})$ の定義からあきらかに、

$$\|\mathbf{u}_N^0\|^2 \leq \|\tilde{\mathbf{u}}_N\|^2 \quad (32)$$

であるから、(30)~(32)式をまとめることにより、次の結果を得る。

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_i'} \|\mathbf{x}_N^*(\varepsilon_i')\|^2 = 0 \quad (33)$$

$$\|\mathbf{u}_N^0\|^2 = \|\tilde{\mathbf{u}}_N\|^2 \quad (34)$$

さらに、 $\|\mathbf{u}_N\|^2$ を最小とする最短時間問題の解の唯一性から、

$$\tilde{\mathbf{u}}_N = \mathbf{u}_N^0 \quad (35)$$

となる。このように、 $\tilde{N}$, $\tilde{u}_N$ の唯一性により、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon_i = 0 \quad (36)$$

となる任意の部分列に対して、 $N^*(\varepsilon_i)$, および $\tilde{u}_N^*(\varepsilon_i)$ は、 $\tilde{N}$, $\tilde{u}_N$ に収束することになる¹⁰⁾。

以上の結果をまとめれば次のようになる。まず(17)式から、ある ε_K が存在して、

$$N^*(\varepsilon) = \tilde{N} = N_{\min}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_K \quad (37)$$

したがって、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{N^*(\varepsilon)}^*(\varepsilon) = u_{\tilde{N}}^0 = u_{N_{\min}}^0 \quad (38)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \|x_{N^*(\varepsilon)}^*(\varepsilon)\|_Q^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \|x_{\tilde{N}}^*(\varepsilon)\|_Q^2 = 0 \quad (39)$$

である。

また、原点が平衡点であるから、 $\tilde{N}(=N_{\min})$ のかわりに $N > \tilde{N}$ となる N を用いても(23)~(39)式は、(37)式を除いてすべて成立する。ただし、この場合の u_N^0 は、原点を終端点とし、操作量の 2 乗和を評価とする固定端点問題の最適解に相当し、 $u_N^*(\varepsilon)$ は、 $\varepsilon \rightarrow 0$ において、この解に収束する。

4. 最短時間問題の近似解

以上の理論において、実際に(37)~(39)式の極限を計算することは困難と思われる。そこで、近似解として、 $N^*(\varepsilon)$ および $u_{N^*(\varepsilon)}^*(\varepsilon)$ を採用することを考えてみる〔この近似解はあとで修正拡張される(45), (47), (48)式参照〕。この近似解の性質について考察すれば、(15)式から、

$$N^*(\varepsilon) \leq N_{\min} \quad (15)'$$

であり、 $N^*(\varepsilon)$ は最短時間 $N_{\min}$ を越えることはない。〔(15)式が任意の $\varepsilon(>0)$ に対して成り立つことは導出の過程よりあきらかである〕。したがって、近似度として問題となるのは、近似解がもうひとつの制御目的である原点到達をどれほど(近似的に)満足しているかということである。このことについては、 $N^*(\varepsilon) \in \Omega_N(\varepsilon)$ であることから、 $N=N^*(\varepsilon)$ に対して(5)式の不等式が成り立ち、(23)式と同様にして、

$$\|x_{N^*(\varepsilon)}^*(\varepsilon)\|_Q^2 \leq \varepsilon N^*(\varepsilon) \quad (40)$$

なる関係式を得る。したがって、もし、近似的原点到達として、(40)式の左辺の値がある値 γ 以下になることが要求されるとすれば、以下に述べる 2 つの方法によって、 ε の値を決定することにより近似的原点到達を満足させることができることになる。1 つの方法は、適当な数列 $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \dots > \varepsilon_i > \dots$ を選び、 ε_0 から順に $\|x_{N^*(\varepsilon_i)}^*(\varepsilon_i)\|_Q^2$ を求めて、この値が γ 以下になる ε_i に対する $N^*(\varepsilon_i)$ および操作量 $u_{N^*(\varepsilon_i)}^*(\varepsilon_i)$ が近似解となる。そのような ε_i が存在することは、(40)式

の関係と、(15)式から $N^*(\varepsilon)$ が有界であることから保証される。もう 1 つの方法は、系の動特性と初期値から、先験的に原点到達するに十分な段数 N が推定できる場合(たとえば、最短時間 $N_{\min}$ の値の範囲があらかじめ知れている場合に、その範囲外の大きな N がこの場合に相当する)、 $\varepsilon N = \gamma$ となるように ε を決定し解を求めればよい。なぜなら、(15)式と N の設定法を考慮すれば、 $\varepsilon N^*(\varepsilon) \leq \varepsilon N_{\min} < \varepsilon N = \gamma$ であるから、(40)式から近似的原点到達は十分確保できるからである。

さて、上述の γ の値については、対象とする物理的系において、許容誤差等を考慮して値が設定されるべきものである。したがって、 γ の値は個々の系により異なり γ の具体的値を論じるのは無意味である。したがって、ここでは求まった解の近似の精度をあらわす考え方として次のような近似的原点到達の考え方を提案することにする。すなわち、2 次評価に対する最適操作量の値が 1 に比べて無視できるような状態値の領域を近似的な原点と考える(この場合は操作量の制限は問題とならないので、線形制御となる¹⁴⁾)。このことを式で表現すれば、

$$\|x\|^2 \ll \min_k \{\|d_k\|^2, k = N^*(\varepsilon), N^*(\varepsilon) + 1, \dots\} \quad (41)$$

と書くことができる。なぜならば $x_{N^*(\varepsilon)}$ が(41)式を満足したとすれば、2 次評価を適当に選ぶことにより、

$$\|x_k\|^2 \ll \min_k \{\|d_k\|^2, k = N^*(\varepsilon), N^*(\varepsilon) + 1, \dots\} \\ k = N^*(\varepsilon) + 1, N^*(\varepsilon) + 2, \dots \quad (42)$$

であるから¹⁵⁾、(1)式から、

$$\|d_k\|^2 u_k^2 = \|x_{k+1} - \phi x_k\|^2 \leq \|x_{k+1}\|^2 + \|\phi x_k\|^2 \\ \leq \|x_{k+1}\|^2 + \lambda_{\max}(\phi^T \phi) \|x_k\|^2 \quad (43)^{16)}$$

$\lambda_{\max}(A)$: 行列 A の固有値の最大値

となり、両辺を $\|d_k\|^2$ で除することにより、(42)式から、

$$u_k^2 \ll 1, k = N^*(\varepsilon), N^*(\varepsilon) + 1, \dots \quad (44)$$

となるからである。したがって、前述の考え方に従えば、(41)式により γ を設定すればよい。しかし、これは 1 つの考え方であって、具体的な γ の値を設定する場合には、やはり対象とする物理系から要求される精度も考慮しなければならない(後述する例題においては、かりに $\|x\|^2 \leq 10^{-5} \|d\|^2$ 程度を対象として考えてみた)。

つぎに、適当な ε と Q が与えられた場合に、近似解を求める計算アルゴリズムについて考察する。 $N^*(\varepsilon)$ のかわりにつぎのような関係を満足する N^{**} を考える。

$$N^{**} \in \Omega_N(\varepsilon) \text{ であって } N^{**} - 1 \in \Omega_N(\varepsilon) \quad (45)$$

この式において、つぎの条件、

$$N \geq N^*(\epsilon) \text{ ならば } N \in \Omega_N(\epsilon) \quad (46)$$

を満足するならば、(45)式を満足するのは、 $N^*(\epsilon)$ のみであるから、 N^{**} は $N^*(\epsilon)$ に一致する。しかしながら、 $\Omega_N(\epsilon)$ が、

$$\Omega_N(\epsilon) = \{N^*(\epsilon), N_1, N_2, \dots, N_m, N_{\min}, N_{\min}+1, \dots\}$$

$$N^*(\epsilon) < N_1 < N_2 < \dots < N_m < N_{\min} \quad (47)$$

であり、 $N_{i+1} - N_i \geq 2$ となるような N_{i+1} が存在する場合には、 $N^*(\epsilon)$ のみならず N_{i+1} も(45)式を満足する。しかし、(5)式の導出の過程からあきらかなように、 $N \geq N_{\min}$ ならば、原点が平衡点であるから、(5)式の不等式はつねになりたつことは容易にわかるから、 $N \geq N_{\min}$ ならば $N \in \Omega_N(\epsilon)$ である。したがって、(45)式を満足する N^{**} は、

$$N^*(\epsilon) \leq N^{**} \leq N_{\min} \quad (48)$$

なる関係にあり、段数近似からみて、 $N^*(\epsilon)$ よりよい近似になることがわかる。また(48)式および前述の ϵ の選択法からあきらかなように、 $N^*(\epsilon)$ のかわりに N^{**} を用いても ϵ の選択法に関する議論は変わらない。

以上のように、(45)式により、近似解を求める場合、 $I_N(\epsilon)$ の最小値を実際に計算し、 ϵN と比較することにより、 N が $\Omega_N(\epsilon)$ に属するかどうかを判定しつつ、 N^{**} を求めるので、 $I_N(\epsilon)$ を最小化する $u_N^*(\epsilon)$ を実際に計算する必要があり、この計算には、逐次近似評価法^{1), 13)}による計算法が適していると思われる。そして、計算アルゴリズムは次のようになる。

(i) 十分に大きな段数 N^0_{upper} および十分に小さな段数 N^0_{lower} ($N^0_{\text{lower}}=0$ でもよい)を選び、
 $N^0_{\text{upper}} \in \Omega_N(\epsilon), N^0_{\text{lower}} \in \Omega_N(\epsilon) \quad (49)$
 となるようにする。

(ii) 段数 $N^k, k=0, 1, \dots$ を、 N^0 は適当に、 $N^1, N^2, \dots$ は、(iii)の方法に従って決定し(3)式の評価 I_N^* を最小化する操作量 $u_0^*, \dots, u_{N^k-1}^*$ 、およびそのときの評価値 $I_{N^k}^*$ を逐次近似評価法により計算する。

(iii) (ii)の結果を用いて、おのおのの段数値を次のように修正し、(ii)の計算にもどる。

(イ) $I_{N^k}^* \leq \epsilon N^k$ ならば、($\therefore N^k \in \Omega_N(\epsilon)$)

$$\left. \begin{aligned} N^{k+1}_{\text{upper}} &= N^k, \\ N^{k+1}_{\text{lower}} &= N^k_{\text{lower}} \\ N^{k+1} &= [(N^k + N^k_{\text{lower}})/2] \text{ 小数以下切捨} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

(ロ) $I_{N^k}^* > \epsilon N^k$ ならば、($\therefore N^k \notin \Omega_N(\epsilon)$)

$$\left. \begin{aligned} N^{k+1}_{\text{upper}} &= N^k_{\text{upper}} \\ N^{k+1}_{\text{lower}} &= N^k \\ N^{k+1} &= [(N^k_{\text{upper}} + N^k)/2] \text{ 小数以下切捨} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

(iv) (ii), (iii)の計算を、

$$N^{k+1}_{\text{upper}} - N^{k+1}_{\text{lower}} = 1 \quad (52)$$

となるまで繰返す。

以上の計算手順の流れ図を Fig. 1 に示す。

Fig. 1 Flow chart for the computation of the minimum stage problem

この計算手順により、つねに、

$$N^{k+1}_{\text{upper}} \in \Omega_N(\epsilon), N^{k+1}_{\text{lower}} \in \Omega_N(\epsilon) \quad (53)$$

である。さらに、(50), (51)式からあきらかなように、

$$N^{k+1} = [(N^k_{\text{upper}} + N^k_{\text{lower}})/2] \text{ 小数以下切捨} \quad (54)$$

であらわされるから、(50)式、すなわち $N^k \in \Omega_N(\epsilon)$ である場合には、

$$\begin{aligned} N^{k+1}_{\text{upper}} - N^{k+1}_{\text{lower}} &= [(N^k_{\text{upper}} - N^k_{\text{lower}})/2] \text{ 小数以下切捨} \end{aligned} \quad (55)$$

となり、(51)式、すなわち $N^k \notin \Omega_N(\epsilon)$ である場合には、

$$\begin{aligned} N^{k+1}_{\text{upper}} - N^{k+1}_{\text{lower}} &= [(N^k_{\text{upper}} - N^k)/2] \text{ 小数以下切上} \end{aligned} \quad (56)$$

となるから、 $N^k_{\text{upper}} - N^k_{\text{lower}} \geq 2$ であるかぎりこの差の値は k とともに減少する。そして、(52)式がなりたつときは、(54)式から、 $N^{k+1} = N^{k+1}_{\text{lower}} \in \Omega_N(\epsilon)$ であるから、こののち k が増加しても、つねに(51)式の修正をうけ、したがって、 N^{k+1}_{upper} および N^{k+1}_{lower} の値は、(56)式よりあきらかなように、そ

これらの差が1のまま変化もなくなり収束する。そして、この(52)式がなりたつときは、(53)式を考慮すれば、

$$N^{k+1}_{upper} \in \Omega_N(\varepsilon), \\ N^{k+1}_{lower} = N^{k+1}_{upper} - 1 \in \Omega_N(\varepsilon) \quad (57)$$

であるから、 N^{k+1}_{upper} は N^{**} をあらわすことになる。以上のような計算アルゴリズムによる例題の計算結果を次に示す。

5. 例 題

系のモデルとして、純慣性系を採用し、サンプル時間を1秒とすれば、

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u_k, |u_k| \leq 1 \quad (58)$$

となる(この場合、系のゲインを2とした)。また他のデータは次のとおりである。

$$\left. \begin{array}{l} \text{初期値; } x_0 = [10 \ 0]^T \\ \text{評価; } Q = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \varepsilon = 10^{-4} \end{array} \right\} \quad (59)$$

計算結果を Fig. 2 および Table 1 に示す。Fig. 2 は、参考のため、 $N=4 \sim 10$ について、評価 I_N に対する最適軌道を示したもので、Table 1 は、それぞれの N に対する最小評価値を表にしたものである。この表からあきらかに、

$$\left. \begin{array}{l} 5, \dots, 10 \in \Omega_N(\varepsilon), 4 \in \Omega_N^c(\varepsilon) \\ \therefore N^*(\varepsilon) = 5 \end{array} \right\} \quad (60)$$

この結果から、 $\|x_{N^*(\varepsilon)}^*(\varepsilon)\|^2$ の値を計算すれば、 $\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 \leq \|x\|_Q^2$ および $\lambda_{\min}(Q)=4$ を考慮して、

Fig. 2 Trajectories of the state by $u_k^*(\varepsilon)$, $k=0, \dots, N-1$, $N=4, 5, 6, 7, 8, 10$

Table 1 Values of I_N and $\|x_{N^*(\varepsilon)}^*(\varepsilon)\|_Q^2$, $N=10 \sim 4$, resulting in $N^*(\varepsilon)=5$

N	I_N	$\ x_{N^*(\varepsilon)}^*(\varepsilon)\ _Q^2$
10	0.3048×10^{-4}	0.5485×10^{-10}
9	0.4190×10^{-4}	0.8656×10^{-10}
8	0.5982×10^{-4}	0.1381×10^{-9}
7	0.8965×10^{-4}	0.2442×10^{-9}
6	1.4332×10^{-4}	0.4475×10^{-9}
5	2.5010×10^{-4}	0.1212×10^{-8}
4	4.987	4.987

$$\|x_{N^*(\varepsilon)}^*(\varepsilon)\|^2 \leq (1/\lambda_{\min}(Q)) \|x_{N^*(\varepsilon)}^*(\varepsilon)\|_Q^2 \\ = 0.0303 \times 10^{-8} \ll 5 = \|d\|^2$$

であることがわかる。

次に同じ系で、サンプル時間 T が小さい場合の例題について示す。用いた各値は次のとおりである。

$$\left. \begin{array}{l} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T^2 \\ T \end{bmatrix} u_k, T = 0.0125 \\ x_0 = \begin{bmatrix} 0.32 \\ 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}, \varepsilon = 10^{-7} \\ N^0_{upper} = N^0 = 100, N^0_{lower} = 86 \end{array} \right\} \quad (61)$$

この結果、 $N^*(\varepsilon)=91$ であり、 $\|x_{N^*(\varepsilon)}^*(\varepsilon)\|_Q^2 = 1.299 \times 10^{-9}$ であった。また、 $u_k^*(\varepsilon)$ と $x_k^*(\varepsilon)$ は Fig. 3 のとおりである。

Fig. 3 $u_k^*(\varepsilon)$ and $x_k^*(\varepsilon)$ at $N=N^*(\varepsilon)=91$

上述の系を連続系として、最大原理により求めた解は、同じ初期値に対して、最小時間 $0.8\sqrt{2}$ 秒であり、これは離散値系における段数との間に、

$$90T < 0.8\sqrt{2} < 91T \quad (62)$$

なる関係がある。

また、前述の例題と同様にして、 $\|x_{N^*(\varepsilon)}^*(\varepsilon)\|^2$ の値を計算すれば、 $\lambda_{\min}(Q)=6$ を考慮して、

$$\|x_{N^*(\varepsilon)}^*(\varepsilon)\|^2 \leq 0.2165 \times 10^{-9} \ll 1.56 \times 10^{-4} = \|d\|^2$$

と判断できる。

このほか、5次系3入力、3次系1入力の系についても計算を試みたが、特別に問題は生じなかったのでここでは省略する。

6. 議論および結論

以上のように、制限付操作量線形離散値系における最短時間問題の解は、最終値の2次形式と操作量の2乗和との和の評価に対する最適解において、前者の重みを無限大に近づける極限の場合の最適解の1つであることがわかる。ここでは、近似解として、この重みを有限に大きくした2次評価に対して求められる(45)

式の N^{**} および $u_{N^{**}}(\varepsilon)$ を近似解としているが、例題のように $N^{**} = N_{\min}(=\tilde{N})$ である場合には(33)式からもわかるように $\|x_{N^{**}}^*(\varepsilon)\|_{Q^2}$ が ε より高いオーダーでゼロに収束することは、原点到達の近似解という面からみて好ましいと思われる。

また、最短時間問題とはべつに、 $N \geq \tilde{N}$ となる N に対して、評価を、

$$I_N = \|x_N\|_{Q^2}^2 + \varepsilon \left\{ \sum_{k=1}^N (\|x_k\|_{Q_k^2}^2 + \lambda_{k-1} u_{k-1}^2) \right\}$$

とおけば 3. の理論とまったく同様にして、

$$I_{N'} = \sum_{k=1}^N (\|x_k\|_{Q_k^2}^2 + \lambda_{k-1} u_{k-1}^2)$$

を評価とし、原点を終端点とする固定端点問題の近似解を得ることができる。

いずれにしても、4. にのべた計算アルゴリズムによる解法は、多入力系に対しても十分適用できると思われるし、例題の計算結果は、最短時間および近似的原点到達の点からみて物理的に十分満足できるものと思われる。

おわりに、本研究にあたり、たえず御指導いただいた九州大学辻 節三教授ならびに相良節夫教授に感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 伊藤：制限付操作量をもつ線形系の逐次近似評価法による最適制御，第10回自動制御連合講演会 127 (1967)
- 2) E. B. Lee: Recurrence Equations and the Control of their Evolution, J. Math. Anal. and Appl. Vol. 7, 118/126 (1963)
- 3) R. W. Koepcke: A Solution to the Sampled, Minimum-time Problem, 1963 JACC, 94/100 (1963)
- 4) J. H. Eaton: An On Line Solution to Sampled-data Time Optimal Control, J. Electron. Control, 15-4, 333/341 (1963)
- 5) J. Pokoski: An Analysis Scheme for Suboptimal, Minimum-time, Sampled-data Systems, 1968 JACC, 270/287 (1968)
- 6) W. Hahn: Theory and Application of Liapunov's Direct Method, Prentice-Hall (1963)
- 7) R. E. Kalman & J. E. Bertram: Control System Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov, Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng., Vol. 82, 371/393 (1960)
- 8) 辻 節三：最適制御概論 (1967-養賢堂)
- 9) 伊藤：線形離散値系の最短時間問題について，第12回自動制御連合講演会 120 (1969)
- 10) 吉田洋一：点集合論入門 (1957-培風館)
- 11) D. H. Chyung: Discrete Linear Optimal Control Systems with Essentially Quadratic Cost Functionals, IEEE Trans. Automatic Control, AC-11-3 (July-1966)
- 12) 伊藤：制限付操作量線形離散値系の固定端点問題の準最適解，第13回自動制御連合講演会 187 (1970)
- 13) 伊藤：制限付操作線形離散値系の2次評価に対する最適制御，電気学会誌，91-3, 135/144 (1971)
- 14) J. R. Tou: Modern Control Theory McGraw-Hill Book Co., Inc. (1964)
- 15) R. E. Kalman: On the General Theory of Control Systems, Proc. First Intern. Congr. Autom. Control, Eyre & Spottiswoode (Publishers), Ltd., London (1961)
- 16) R. Bellman: Introduction to Matrix Theory, McGraw-Hill, New York (1960)