品質管理を考えた制御系の設計法

室津義定・大場史憲・西山建志

大阪府立大学工学部 堺市百舌鳥梅町4丁

(昭和46年1月6日 受付)

Design of Control Systems Considering Quality Control

Yoshisada MUROTSU, Fuminori OHBA and Tateshi NISHIYAMA

(College of Engineering, University of Osaka Prefecture, Sakai)

(Received January 6, 1971)

This paper is concerned with a design of control systems when the specifications of the systems' elements are subjected to random variations from their nominal values. We discuss how far the variations in the characteristics of the elements affect the performance of the overall system, and conversely how accurate each element should be in order that the performance of the overall system may be in the specified allowance. A design of an instrument servo system is presented to illustrate the proposed procedure.

1. ま え が き

制御系を短期間に効果的に設計・製作するためには、系の構成に使用する部品の特性の定格値からのばらつきを考慮しなくてはならない。特に、大量生産によって部品を製造する場合、製品としての信頼性を高めるために各部品をいかに品質管理すれば良いかという問題が生じる。このような問題に対して、系を設計する段階で考慮すべきことは、系の構成に使用する各部品の特性を表わす定数の定格値からのばらつきが系全体の性能にいかなる影響を与えるか、また逆に、系全体の動作特性が指定された公差内にあるためには、個々の部品に要求される製品誤差の範囲はいかにあるべきかということである。このような問題に対する従来の研究としては Chubb の著書¹⁾に2, 3の方法が述べてある程度のように思われる。そこでこの論文では、このような問題に対するより簡単で直接的な1つのアプローチを与える。その基礎となる概念は、古典的制御理論において、制御系の過渡応答はその系の極および零点によって特性づけられるということである。すなわち、各部品の定数がその定格値からばらつくとき、系全体の極および零点がいかなる影響を受けるかを考察する。また計器サーボ系の例によってその関係を用いて所望の精度を持つ系を構成するための部品の精度を決定する手法を与える。

2. 問題の記述

与えられた問題は、1) 各要素のばらつきが与えられたとき、系全体の特性はどれだけばらつくか (Analysis), 2) 各要素の精度をどれだけあげれば、系全体の特性が所定の要求を満足しうるか (Synthesis), ということであるが、これを前節で述べたように制御系の極および零点の変動の問題におきかえて、以下のように問題を設定することができる。

Fig. 1 に示した線形フィードバック系を考える。

Fig. 1 Block diagram of a linear feedback control system

このとき入出力の関係式は周知のごとく次のようになる。

$$\frac{C(s)}{R(s)} \triangleq G_c = \frac{G}{1+GH} \quad (1)$$

一般に G_c の分母, 分子は, ラプラス演算子 s の多項式で表わして, 次の形に書くことができる。

$$G_c = K \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (n \geq m) \quad (2)$$

ここに、 G_c の係数 $a_i (i=0, \dots, n-1)$, $b_j (j=0, \dots, m-1)$ は、系を構成している部品の定数値によってきまるものである。したがって、部品の定数値を $K_k (k=1, 2, \dots, q)$ で表わすと、 a_i および b_j は次のようにかける。

$$\left. \begin{aligned} a_i &= a_i(K_1, K_2, \dots, K_q) \quad (i=0, \dots, n-1) \\ b_j &= b_j(K_1, K_2, \dots, K_q) \quad (j=0, \dots, m-1) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

しかしながら、実際には各部品は製作誤差や、特性を測定によって決定する場合には測定誤差をとまなうので、その定数値は定格値どおりの場合はほとんどなく、定格値まわりにあるばらつきを持ったものとみなさなくてはならない。すなわち、 K_k は次のように書ける。

$$K_k = K_k^* + \delta K_k \quad (k=1, \dots, q) \quad (4)$$

ここに、 K_k^* は K_k の定格値、 δK_k は K_k^* からの変動分である。

このようにして、部品の定数が定格値から変動するとき、 G_c の係数 a_i および b_j は変動して次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} a_i &= a_i^* + \delta a_i = a_i + \sum_{k=1}^q \frac{\partial a_i}{\partial K_k} \delta K_k + O(\delta K_k) \\ b_j &= b_j^* + \delta b_j = b_j + \sum_{k=1}^q \frac{\partial b_j}{\partial K_k} \delta K_k + O(\delta K_k) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、 $a_i^* = a_i(K_1^*, K_2^*, K_q^*)$, $b_j^* = b_j(K_1^*, K_2^*, \dots, K_q^*)$ であり、偏導関数は、定格値 $K_k = K_k^* (k=1, \dots, q)$ における値とする。

以上のようにして、 G_c の係数 a_i, b_j の変動が求まるので、結局、 a_i, b_j の変動に対して、制御系の特性を支配する極および零点がどのように変動するかを考えればよい。したがって次のように問題を設定することができる。

【問題】 「 G_c の係数 $a_i, b_j (i=0, \dots, n-1, j=0, \dots, m-1)$ の平均値 a_i^*, b_j^* , 標準偏差 $\sigma_{a_i}, \sigma_{b_j}$ および相関係数 $\rho_{a_i a_j}, \rho_{b_i b_j}$ がそれぞれ与えられたとき、極および零点の分散を計算せよ」

3. 極および零点の分散の計算法

極および零点の分散の計算法は、高次代数方程式の係数の変動に対する根の分散の計算法にはかならないので、次の n 次代数方程式について考えよう。

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0 \quad (6)$$

いま、(5)式において2次以上の微小項を無視すると、各部品の定数の定格値 K_k^* , 標準偏差 σ_{K_k} , 相関係数 $\rho_{K_k K_l} (k, l=1, \dots, q)$ が与えられたとき、 $a_i (i=0, \dots, n-1)$ の平均値は a_i^* で与えられ、分散および共分散は次のようになる。

$$\sigma_{a_i}^2 \triangleq [(\delta a_i)^2]^* = \sum_{k,l=1}^q \frac{\partial a_i}{\partial K_k} \cdot \frac{\partial a_i}{\partial K_l} \cdot \rho_{K_k K_l} \cdot \sigma_{K_k} \cdot \sigma_{K_l}$$

$$\rho_{a_i a_j} \cdot \sigma_{a_i} \cdot \sigma_{a_j} \triangleq [(\delta a_i \cdot \delta a_j)]^* \quad (7)$$

$$= \sum_{k,l=1}^q \frac{\partial a_i}{\partial K_k} \cdot \frac{\partial a_j}{\partial K_l} \cdot \rho_{K_k K_l} \cdot \sigma_{K_k} \cdot \sigma_{K_l} \quad (8)$$

ただし、 $[\cdot]^*$ は $(\cdot)$ の期待値を表わす。したがって、(6)式において、係数 a_i の統計的性質を次のように仮定する。

(I) $a_i (i=0, 1, \dots, n-1)$ の平均値 a_i^* , 標準偏差 σ_{a_i} , および、相関係数 $\rho_{a_i a_j} (i, j=0, 1, \dots, n-1)$ が与えられている。

(II) a_i の平均値からのばらつきはあまり大きくなく、2次以上の項は無視できる。

いま、(6)式の係数 $a_i = a_i^* (i=0, 1, \dots, n-1)$ に対する根を $P_j^* (j=1, 2, \dots, n)$ とする。すなわち、

$$(P_j^*)^n + a_{n-1}^*(P_j^*)^{n-1} + \dots + a_1^*P_j^* + a_0^* = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

各係数が変動して、

$$a_i = a_i^* + \delta a_i \quad (i=0, 1, \dots, n-1) \quad (10)$$

となったときの(6)式の根を、

$$P_j = P_j^* + \delta P_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

とする。すなわち、

$$\begin{aligned} & (P_j^* + \delta P_j)^n + (a_{n-1}^* + \delta a_{n-1})(P_j^* + \delta P_j)^{n-1} + \dots \\ & + (a_1^* + \delta a_1)(P_j^* + \delta P_j) + (a_0^* + \delta a_0) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

(12)式を展開して、2次以上の項を無視して、 δP_j に関して解くと、

$$\delta P_j = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (P_j^*)^k \cdot \delta a_k}{D_j} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (13)^{*1}$$

となる。ただし、 $D_j = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(P_j^*)^k a_{k+1}^*$, $a_n^* = 1$

したがって、 P_j^* が実根である場合には、根の分散は次のようになる。

$$\sigma_{P_j}^2 \triangleq [(\delta P_j)^2]^* = \frac{1}{D_j^2} \sum_{k,l=0}^{n-1} (P_j^*)^{k+l} \rho_{a_{k+1} a_{l+1}} \cdot \sigma_{a_{k+1}} \cdot \sigma_{a_{l+1}} \quad (14)$$

*1 (13)式は $D_j \neq 0$ を仮定している。 $D_j = 0$ の場合は、

(12)式を展開して2次の項までを採用し、

$$A_j \cdot \delta P_j^2 + B_j \cdot \delta P_j + C_j = 0$$

ただし、

$$A_j = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(k+2)(k+1)}{2!} (P_j^*)^k a_{k+2}^*$$

$$B_j = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(P_j^*)^k \delta a_{k+1}$$

$$C_j = \sum_{k=0}^{n-1} (P_j^*)^k \delta a_k$$

なる2次式の根として δP_j が得られるので計算は非常に複雑になる。しかし、 $D_j = 0$ の場合は、特性方程式(6)が重根を持つ場合に相当するので、このような点を設計点として選ぶことは少ない。

次に, P_j^* が複素根の場合を考えよう. このとき, まず (13) 式を実数部(Re と略す) と虚数部(Im と略す) に分けて書くと,

$$\delta P_j = \sum_{k=0}^{n-1} R_k \delta a_k + i \sum_{k=0}^{n-1} I_k \delta a_k \quad (15)$$

となる, ただし,

$$R_k = \operatorname{Re} \left[\frac{(P_j^*)^k}{D_j} \right], \quad I_k = \operatorname{Im} \left[\frac{(P_j^*)^k}{D_j} \right] \quad (16)$$

である. したがって, δP_j の実数部と虚数部の分散および共分散は, 次のように計算される.

$$\left. \begin{aligned} [\{\operatorname{Re}(\delta P_j)\}^2]^* &= \sum_{k,l=0}^{n-1} R_k \cdot R_l \cdot \rho_{a_k a_l} \cdot \sigma_{a_k} \cdot \sigma_{a_l} \\ [\{\operatorname{Im}(\delta P_j)\}^2]^* &= \sum_{k,l=0}^{n-1} I_k \cdot I_l \cdot \rho_{a_k a_l} \cdot \sigma_{a_k} \cdot \sigma_{a_l} \\ [\operatorname{Re}(\delta P_j) \cdot \operatorname{Im}(\delta P_j)]^* &= \sum_{k,l=0}^{n-1} R_k \cdot I_l \cdot \rho_{a_k a_l} \cdot \sigma_{a_k} \cdot \sigma_{a_l} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

いっぽう, 複素根 P_j の振幅および位相角は,

$$\left. \begin{aligned} |P_j| &= \sqrt{\{\operatorname{Re}(P_j)\}^2 + \{\operatorname{Im}(P_j)\}^2} \\ \angle P_j &= \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im}(P_j)}{\operatorname{Re}(P_j)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

で与えられるので, これらの分散は次のように計算される²⁾.

$$\begin{aligned} \sigma_{|P_j|^2} &= \frac{\{\operatorname{Re}(P_j^*)\}^2}{|P_j^*|^2} [\{\operatorname{Re}(\delta P_j)\}^2]^* \\ &+ \frac{\{\operatorname{Im}(P_j^*)\}^2}{|P_j^*|^2} [\{\operatorname{Im}(\delta P_j)\}^2]^* \\ &+ \frac{2 \operatorname{Re}(P_j^*) \cdot \operatorname{Im}(P_j^*)}{|P_j^*|^2} [\operatorname{Re}(\delta P_j) \cdot \operatorname{Im}(\delta P_j)]^* \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\angle P_j^2} &= \frac{\{\operatorname{Im}(P_j^*)\}^2}{|P_j^*|^4} [\{\operatorname{Re}(\delta P_j)\}^2]^* \\ &+ \frac{\{\operatorname{Re}(P_j^*)\}^2}{|P_j^*|^4} [\{\operatorname{Im}(\delta P_j)\}^2]^* \\ &- \frac{2 \operatorname{Re}(P_j^*) \cdot \operatorname{Im}(P_j^*)}{|P_j^*|^4} [\operatorname{Re}(\delta P_j) \cdot \operatorname{Im}(\delta P_j)]^* \end{aligned} \quad (20)$$

4. 計器サーボ系に対する設計仕様

2. で提起した問題を Fig. 2 に示すような計器サーボ系¹⁾ について考えよう.

この系の閉ループ伝達関数は次式で与えられる.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (21)$$

ただし,

$$\begin{aligned} K &= a_0 = \frac{K_s \cdot K_f \cdot K_a \cdot K_m \cdot \cos(\phi_f + \phi_a)}{N \cdot J_m \cdot J_L} \\ a_1 &= \frac{K_s \cdot B_m + K_s \cdot K_g \cdot K_a \cdot K_m \cdot \cos(\phi_g + \phi_a)}{J_m \cdot J_L} \end{aligned}$$

Fig. 2 Block diagram of a typical instrument servo system

$$\begin{aligned} &+ \frac{K_s \cdot f_L}{N^2 \cdot J_m \cdot J_L} \\ a_2 &= \frac{B_m \cdot f_L + K_a \cdot K_g \cdot K_m \cdot f_L \cdot \cos(\phi_g + \phi_a)}{J_m \cdot J_L} \\ &+ \frac{K_s}{J_L} + \frac{K_s}{N^2 \cdot J_m} \\ a_3 &= \frac{B_m + K_g \cdot K_a \cdot K_m \cdot \cos(\phi_g + \phi_a)}{J_m} + \frac{f_L}{J_L} \end{aligned}$$

である.

このような計器サーボ系においては, 従来, 卓越根に注目して, 減衰比 ζ の値が 0.6~0.8 になるように設計されることが望ましいとされている³⁾. これを位相角で表わすと Fig. 3 のようになる. しかしながら,

Fig. 3 Desirable region of characteristic poles in s-plane

このように設計された系を構成する各部品の定数の値は, 製作誤差や測定誤差のために, 定格値のまわりにあるばらつきをもっているものとみなさなければならない. そこで, 2. に提起したような, 系の特性のばらつきについての Analysis の問題と Synthesis の問題が生ずる. したがって, 1つの設計仕様としては,

たとえば「 $P\%$ の確率で $\zeta=0.6\sim 0.8$ となるようにせよ」という形で与えられる。

以下に、3. の手法を用いて、このような問題に対する1つのアプローチを与える。簡単のために、まず(21)式を2次系で近似して取り扱い、その後(21)式で与えられる4次系について考察する。

5. 計器サーボ系の統計的設計法

5.1 2次系で近似した場合

(21)式において、負荷減衰力が非常に小さくて、歯車列剛性がきわめて大きい場合は、 $f_L \rightarrow 0$ 、 $K_s \rightarrow \infty$ で近似できるので、次のような2次系で与えられることになる。

$$\frac{c(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (22)$$

ただし、

$$K = a_0 = \frac{K_f \cdot K_a \cdot N \cdot K_m \cdot \cos(\phi_f + \phi_a)}{N^2 \cdot J_m + J_L}$$

$$a_1 = \frac{K_a \cdot N^2 \cdot K_m \cdot K_g \cdot \cos(\phi_g + \phi_a) + N^2 \cdot B_m}{N^2 J_m + J_L}$$

である。

(22)式において、特性方程式の係数 $a_i (i=0, 1)$ の分散および共分散は、(7)、(8)式から、各部件の定数の分散によって次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{a_1}^2 &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial K_a} K_a \right)^{*2} \sigma_{x_{K_a}}^2 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial K_m} K_m \right)^{*2} \sigma_{x_{K_m}}^2 \\ &+ \left(\frac{\partial a_1}{\partial J_m} J_m \right)^{*2} \sigma_{x_{J_m}}^2 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial B_m} B_m \right)^{*2} \sigma_{x_{B_m}}^2 \\ &+ \left(\frac{\partial a_1}{\partial K_g} K_g \right)^{*2} \sigma_{x_{K_g}}^2 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial J_L} J_L \right)^{*2} \sigma_{x_{J_L}}^2 \\ \sigma_{a_0}^2 &= \left(\frac{\partial a_0}{\partial K_f} K_f \right)^{*2} \sigma_{x_{K_f}}^2 + \left(\frac{\partial a_0}{\partial K_a} K_a \right)^{*2} \sigma_{x_{K_a}}^2 \\ &+ \left(\frac{\partial a_0}{\partial K_m} K_m \right)^{*2} \sigma_{x_{K_m}}^2 + \left(\frac{\partial a_0}{\partial J_m} J_m \right)^{*2} \sigma_{x_{J_m}}^2 \\ &+ \left(\frac{\partial a_0}{\partial J_L} J_L \right)^{*2} \sigma_{x_{J_L}}^2 \\ \rho_{a_1 a_0} \cdot \sigma_{a_1} \cdot \sigma_{a_0} &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial K_a} K_a \right)^* \left(\frac{\partial a_0}{\partial K_a} K_a \right)^* \sigma_{x_{K_a}}^2 \\ &+ \left(\frac{\partial a_1}{\partial K_m} K_m \right)^* \left(\frac{\partial a_0}{\partial K_m} K_m \right)^* \sigma_{x_{K_m}}^2 \\ &+ \left(\frac{\partial a_1}{\partial J_m} J_m \right)^* \left(\frac{\partial a_0}{\partial J_m} J_m \right)^* \sigma_{x_{J_m}}^2 \\ &+ \left(\frac{\partial a_1}{\partial J_L} J_L \right)^* \left(\frac{\partial a_0}{\partial J_L} J_L \right)^* \sigma_{x_{J_L}}^2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

上式において、 $x(\cdot) = \delta(\cdot) / (\cdot)^*$ とおいた。たとえば、 x_{K_a} は $\delta K_a / K_a^*$ であり、 K_a における変動の、定格値に対する割合を与える。したがって $\sigma_{x_{K_a}}$ は、定格値に対するばらつきの割合を与えている。また、各部

品の定数は統計的に独立であるとした。

いま、構成要素の定数が定格値であるとき、すなわち、 $a_i (i=0, 1)$ が $a_i^* (i=0, 1)$ のときの特性根が次のような複素根であるとする。

$$P_{1,2}^* = -R^* + iI^* \quad (24)$$

このとき、定格値から、要素の定数が変動すると特性根の変動は、

$$\delta P_1 = \frac{\delta a_1}{2} + i \frac{R^* \delta a_1 - \delta a_0}{2I^*} \quad (25)$$

となる。また、(17)式から特性根の実数部および虚数部の分散および共分散は、

$$\left. \begin{aligned} [\operatorname{Re}(\delta P_1)]^2 &= \frac{1}{4} [(\delta a_1)^2]^* \\ [\operatorname{Im}(\delta P_1)]^2 &= \frac{1}{4 \cdot (I^*)^2} [(R^*)^2 \{(\delta a_1)^2\}^* \\ &+ \{(\delta a_0)^2\}^* - 2R^* (\delta a_1 \cdot \delta a_0)^*] \\ [\operatorname{Re}(\delta P_1) \cdot \operatorname{Im}(\delta P_1)]^* &= \frac{1}{4I^*} [R^* \{(\delta a_1)^2\}^* \\ &- (\delta a_1 \cdot \delta a_0)^*] \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

となる。このとき、特性根の振幅および位相角の分散は(19)、(20)式から次のように与えられる。

$$\sigma_{|P_1|}^2 = \frac{1}{4|P_1^*|^2} \sigma_{a_0}$$

$$\sigma_{\angle P_1}^2 = \frac{1}{4|P_1^*|^4} \left[\left\{ I^* + \frac{(R^*)^2}{I^*} \right\} \sigma_{a_1}^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{R^*}{I^*} \right)^2 \sigma_{a_0}^2 - 2 \left\{ I^* + \frac{(R^*)^2}{I^*} \right\} \frac{R^*}{I^*} \rho_{a_1 a_0} \cdot \sigma_{a_1} \cdot \sigma_{a_0} \right] \quad (27)$$

このようにして特性根の分散が求まると、4. のべたような、たとえば減衰比 ζ についての設計仕様をみたす設計が可能となる。以下具体的にデータを与えてその手法を考察する。

いま、各部件の定数の定格値および標準偏差が次のように与えられているものとする。

$$K_f^* = 2.441 \text{ [V/rad]}, \sigma_{x_{K_f}} = 0.2, K_g^* = 3.290 \cdot 10^{-4} \text{ [V/rad/s]}, \sigma_{x_{K_g}} = 0.1, K_a^* = 1.980 \cdot 10^3 \text{ [V/V]},$$

$$\sigma_{x_{K_a}} = 0.2, K_m^* = 2.145 \cdot 10^{-3} \text{ [oz-in/V]}, \sigma_{x_{K_m}} = 0.2, B_m^* = 2.125 \cdot 10^{-4} \text{ [oz-in/rad/s]}, \sigma_{x_{B_m}} = 0.3,$$

$$J_m^* = 1.107 \cdot 10^{-5} \text{ [oz-in/rad/s}^2], \sigma_{x_{J_m}} = 0.1, J_L^* = 1.334 \cdot 10^{-2} \text{ [oz-in/rad/s}^2], \sigma_{x_{J_L}} = 0.1, N = 95.92,$$

$$\phi_f^* = \phi_g^* = \phi_a^* = 0.$$

このとき、定格値に対する特性根は次のようになる。

$$P_{1,2}^* = -64.29 \pm 67.08 i$$

またそのときの位相角および減衰比は、

$$\theta^* = \pm 133.78 \text{ [deg]}, \zeta^* = 0.7220$$

となる。次に特性根の分散を計算すると、

$$\sigma_{|P_1|}^2 = 2.783 \cdot 10^2$$

$$\sigma_{\angle P_1} = 2.979 \cdot 10^{-2} [\text{rad}^2]$$

となる。したがって、位相角の標準偏差は、

$$\sigma_{\angle P_1} = 9.887 [\text{deg}]$$

となる。いっぽう、減衰比 $\zeta = 0.6 \sim 0.8$ に対応する位相角は Fig. 3 に示したように $\theta = 127 \sim 143 \text{ deg}$ であるから、定格値に対する位相角の許容範囲は、

$$133.78^\circ - 6.78^\circ \leq \theta \leq 133.78^\circ + 9.22^\circ$$

である。したがって、位相角の分布^{*2}がガウス分布であると仮定したとき、この範囲からはみ出す確率は

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \text{ としたとき、}$$

$$\int_{-\infty}^{-6.78/9.887} \Phi(t) dt + \int_{9.22/9.887}^{\infty} \Phi(t) dt = 0.4245$$

である。結局、この系が設計仕様を満足する確率は、57.55% にすぎないことがわかる。それでは、次に 95% の確率で設計仕様をみたすように、位相角が許容範囲にはいるためには、各部品の精度をどれだけ上げればよいかを調べる。このとき、位相角がその許容範囲からはみだす確率は 5% 以下でなければならないから、許される位相角の標準偏差を σ とすると、 σ は、

$$\int_{-\infty}^{-6.78/\sigma} \Phi(t) dt + \int_{9.22/\sigma}^{\infty} \Phi(t) dt \leq 0.05 \quad (28)$$

をみたさなければならない。そこで、 $\sigma = 4.08 \text{ deg}$ とすると、この確率は 0.0497 となって与えられた仕様をみたすことがわかる。いま、各部品の精度を一様に高めるとして、位相角の標準偏差を 4.08 deg 以下にするためには、各部品の精度を $9.887/4.08 = 2.42$ 倍高めなければならないことがわかる。

いっぽう、 $P_{1,2}$ の分散を計算すると、

$$\sigma_{|P_1|^2} = 5.571 \times 10$$

$$\sigma_{\angle P_1} = 6.589 \times 10^{-2} [\text{rad}^2]$$

となる。したがって、位相角の標準偏差は、

$$\sigma_{\angle P_1} = 14.71 [\text{deg}]$$

となる。以下、前と同様にして、 $\theta = 127 \sim 143^\circ$ にはいる確率は 41.19% となることがわかる。また、95% の確率でこの卓越根の位相角がこの範囲にはいるようにするためには、各部品の精度を一様に上げるとすれば、3.61 倍に高めなければならないことがわかる。

6. 実際問題への適用についての注意

前章においては、設計法の説明を簡単にするために、各部品の精度を一様に高めることによって、制御系の特性を許容範囲に入れることを考えた。しかし、実際問題においては一般に、調整個所が設けられているこ

ともあろうし、また感度的な立場からは、制御系のばらつきに最も強く影響する部品の精度を上げれば有利であることがわかる。そこで本章では、これらの問題について考察する。簡単のために、5. に述べた計器サーボ系の場合について考える。

まず、各部品のばらつきが制御系の特性に及ぼす影響の度合(感度)について考察する。個々の部品の感度は、(23) 式においてその部品に対する分散にかかっている係数と、(27) 式の係数の大きさによって決まる。したがって、各部品の感度の割合は容易に計算できる。いっぽう、(28) 式から、許される位相角の標準偏差 σ が求まると、その値を (27) 式左辺に代入することにより先に求めた各部品の感度の割合にしたがってそれぞれの部品の精度をいかに上げれば良いかはただちに計算できる。

次に、調整個所が設けられている場合を考えよう。このとき、そのパラメータを調整することによって完全に系全体の特性が変えられる場合には本論文のような精度の検討は必要でない。しかし実際には、そのパラメータの可調整範囲は限られているので、調整される位相角の範囲は限定される。このときには、本論文の手法を用いることによって、調整可能なパラメータによっても調整できない場合はどのくらいの確率で起こるかがわかるし、逆に、指定された確率で所望の特性に調整可能であるための部品の精度を決定することもできる。さらに、部品の精度が指定されている場合には、調整可能なパラメータの可調整範囲を決定することもできる。

7. む す び

この論文では、生産現場において特に大切な品質管理の問題に関連して、制御系の設計、製作にあたって製品としての信頼性を高めるために系の構成に使用する部品の特性のばらつきを考慮した設計法を与えた。ここに与えた設計法を用いることによって不必要に部品の精度を要求することなく、所望の精度を有する系を構成することが可能となり、経済的な無駄をなくすることができる。なお、この論文では、制御系の特性が極点と零点で記述される場合について取扱った。しかしながら、定常特性、周波数特性あるいは最適制御理論のように評価関数によって制御系の特性の記述がなされる場合に対しても、この論文の考え方を拡張することができる。

末筆ながら、この研究に対して有益な御討論をいただいた大阪府立大学工学部津村俊弘助教授および神戸大学工学部岩壺卓三助教授に心より感謝する。

^{*2} 位相角の分布は前もってわからないので、実際には、各部品の定数の分布が与えられたとき、モンテカルロ法などにより検証する必要がある(付録参照)。

参 考 文 献

- 1) Chubb 著, 金沢訳: 計器サーボ系の設計法, 学献社 (1969)
- 2) 岩壺・室津・渡辺: ロータのつりあわせに及ぼす測定誤差の影響, 日本機械学会講演論文集 No. 700-17 (1970-10)
- 3) 伊沢: 自動制御入門, オーム社, p.176 (昭 40)

□ 付 録 □

5. に与えた例題では, 各部品の変数がガウス分布をしているとき, 特性根の位相角の分布はガウス分布であると仮定した. ここでは, モンテカルロ法によって位相角の分布を調べる. 計算機を使って, 3000 回の乱数発生によって得た位相角の分布を Fig. 4 に示す. これを χ^2 テストすると, 42 自由度に対する χ^2 値が 608 となり, この分布はガウス分布とみなせないことがわかる. しかし, 平均値からの偏差の小さい所ではガウス分布と良く一致している. また, このようにして得た, 平均値および標準偏差は $\theta_m^* = 134.8^\circ$ および, $\sigma_{\theta_m} = 11.8^\circ$ であるのに対して, われわれの近似計算では, 平均値 $\theta^* = 133.78^\circ$, 標準偏差 $\sigma_\theta = 14.71^\circ$ という結果を得ている. このようにして, 実際の位相角の分布は, ガウス分布のように, 平均値からきわめて大きな偏差はおこらないことが予想さ

れ, われわれの提案した近似法は安全側の設計法を与えていることがわかる.

Fig. 4 Frequency histogram of phase angle