ホルダーを有する流体供給ネットワークシステムの最適制御 (非線形ネットワークの解析方法)

志水清孝*・安西祐一郎**・林喜男*

* 慶応義塾大学工学部 東京都小金井市前原町 4-5-11

** 慶応義塾大学大学院 東京都小金井市前原町 4-5-11

(昭和 46 年 3 月 26 日 受付)

Optimal Control of Fluid Supply Network Systems with Holders (An Analytical Method for Nonlinear Networks)

Kiyotaka SHIMIZU*, Yuichiro ANZAI** and Yoshio HAYASHI*

(* Faculty of Engineering, Keio University, Koganei)
(** Graduate School, Keio University, Koganei)

(Received March 26, 1971)

In general, fluid supply systems are described as nonlinear, dynamic, multi-terminal network systems with distributed sources, sinks and holders, in which the sources supply fluid based on demands at the sinks. Accordingly, it is desired to establish some mathematical method for determining the optimal supply curves which satisfy the predicted demand curves and minimize some objective function by utilizing the holders effectively.

The ordinary Hardy-Cross' method for network system simulation is extended to the fluid supply system with holders. The problem formulated is analyzed by discretizing the continuous process so that a nonlinear programming technique is applicable. An algorithm of calculating the optimal control is developed by combining the extended Hardy-Cross' method and the Zotendijk's method of feasible directions.

1. はじめに

上水道、石油、ガスその他の流体供給システムは、いくつかの供給点(source)といくつかの消費点(sink)がネットワークで結ばれ、消費点の需要に応じて供給点から液体や気体などを供給する輸送システムである。このようなシステムでは一般にある時間区間の需要曲線の予測が可能で、需要の予測値にみあった供給をおこなうが、供給点と消費点が単にパイプで結ばれている系ではつねに需要の最大値をみただけの供給が可能でなければならない。需要の上限と下限の差が大きく、ある一定時間だけ需要が特に増大するような系では、このような供給点をもつことは経済的でない。また、需要の急激な変動に対して供給点から供給をすぐに追従させることは困難である。このため、普通の流体供給システムは一般にいくつかのホルダーをもち、

これを利用して供給をおこなっている。すなわち、供給パターンは需要およびホルダーに貯えられている流体量の予測パターンに基づいて決められる。

そこでこの論文では、ある流体製品の輸送システムを仮想し、その最適制御を研究する。すなわち、「各消費点においてある一定時間の需要曲線が与えられたとき、各地に散在するホルダーを有効に利用して流体の需給バランスがとれ、与えられた制約条件のもとで、与えられた目的関数（たとえば、製造コスト）の値を最小にするような最適供給曲線（製造量）を求めること」。

ここでは、非常に単純化した物理的モデルに対して供給点からの供給量をコントロール変数とする動的最適制御問題を定式化し、それを非線形計画法を用いて解いている。

さて、在来の研究について一言すると、ホルダーを

含まない流体供給ネットワークシステムのシミュレーションについてはいくつかの論文^{2), 8)}があるが、ホルダーをもつシステムのシミュレーションおよびその最適制御についての研究は知見しない。

2. システムモデル

実際の流体供給システムは、模擬的に Fig. 1 のよ

○G : governor station

$f_{s_i}(t)$: supply flow rate from the i -th source

$f_i(t)$: flow rate

$d_i(t)$: demand of the i -th sink

Fig. 1 Fluid supply network system

うに書ける。われわれの最終目的は大規模なシステムの最適制御である。しかし、目的と開発すべき最適化アルゴリズムの特長を明らかにし、記述を簡単にするために、次のような仮定をおく。(1) 一定時間区間の需要予測曲線は与えられる。(2) 流体は非圧縮性流体である。(3) 輸送おくれは無視できるほど小さい。(4) 流体は供給点の送出圧力によって流れ、各パイプラインにおいてはヘッド差で流れる。(5) ホルダーは円筒形のオープンホルダーで、パイプは底面に接続されている。さらに、最適化問題のモデルとしての特長を強調するために、システムモデルも単純化して考える。しかし、この論文で与えられる手法はより複雑な他の類似システムに対しても一般化や拡張が可能である。

さて、Fig. 2 のような系を考える。 S_i は供給点、 H_i はホルダー、A, B は結節点 (node)、C, D, E, F は消費点である。 $f_{s_i}(t)$ は供給点からの送出流量、 $f_i(t)$ はループに属するパイプの流量、 $d_i(t)$ は各消費点の需要流量である。また $p_{s_i}(t)$ は供給点の流体送出圧力、 $p_1(t)$, $p_3(t)$ は結節点の圧力、 $p_2(t)$, $p_4(t)$ はホルダー内の流体底圧力である。消費点 C, D, E, F につながるパイプにはバルブがついており、バルブ抵抗係数は $R_i(t)$ である。以上の変数はすべて時間の関数になっている。また、 k_{s_i} , k_i は各パイプの抵抗係

Fig. 2 System model

数で正值をとる。

プロセス方程式は次の 3 つの物理的条件から導かれる。(1) 結節点における流体の物質収支。(2) ホルダーにおける流体の物質収支。(3) 各パイプにおける圧力降下。(1) は、結節点 A, B に対して、

$$-f_1(t) + f_4(t) + f_{s_1}(t) - d_1(t) = 0 \quad (2.1)$$

$$f_2(t) - f_3(t) + f_{s_2}(t) - d_3(t) = 0 \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (2.2)$$

で表わされる。次に、ホルダーの底面積を A 、ホルダー内の流体の高さを $h(t)$ 、圧力を $p(t)$ 、流体の密度を ρ とすれば、時刻 t にホルダーにたまっている流体の体積は、 $v(t) = Ah(t) = Ap(t)/\rho g = Cp(t)$ で与えられる。ここで $C = A/\rho g$ をホルダーのキャパシタンスと呼ぶ。ホルダー H_1 , H_2 のキャパシタンスをそれぞれ C_1 , C_2 とすれば、(2) は次のように表わされる。

$$C_1 p_2(t) = \int_{t_0}^t (f_1(\tau) - f_2(\tau) - d_2(\tau)) d\tau + C_1 p_2(t_0) \quad (2.3)$$

$$C_2 p_4(t) = \int_{t_0}^t (f_3(\tau) - f_4(\tau) - d_4(\tau)) d\tau + C_2 p_4(t_0) \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (2.4)$$

ここで、 $p_2(t_0)$, $p_4(t_0)$ はホルダー H_1 , H_2 の流体底圧力の初期値である。最後に、パイプの管内流れの圧力降下 $| \Delta p(t) |$ はパイプが十分長く管壁がなめらかでかつ非圧縮性流体の場合、 $| \Delta p(t) | = k f(t)^2$ (k は抵抗係数) で与えられる。よって次の式が成立する。

$$p_i(t) - p_{i+1}(t) = k_i f_i(t) |f_i(t)| \quad i=1, 2, 3 \quad (2.5) \sim (2.7)$$

$$p_4(t) - p_1(t) = k_4 f_4(t) |f_4(t)| \quad (2.8)$$

$$p_{s_1}(t) - p_1(t) = k_{s_1} f_{s_1}(t)^2 \quad (2.9)$$

$$p_{s_2}(t) - p_3(t) = k_{s_2} f_{s_2}(t)^2 \quad (2.10)$$

$$p_i(t) - p_0 = R_i(t) d_i(t)^2 \quad i=1, \dots, 4 \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (2.11) \sim (2.14)$$

ここで p_0 は大気圧である。

次に、プロセスの制約条件について考えよう。すなわち、(1) 供給点の流体供給能力に対する制約、(2) ホルダーにたまっている流量に対する制約、(3) 結節点の圧力に対する制約。(1) は次の式で与えられる。

$$\underline{f}_{s_i} \leq f_{s_i}(t) \leq \bar{f}_{s_i}, \quad i=1, 2 \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (2.15), (2.16)$$

(2) は、ホルダー H_1, H_2 に対して $\underline{v}_i \leq v_i(t) \leq \bar{v}_i$, $i=1, 2$ で与えられるが、 $v_1(t) = C_1 p_2(t)$, $v_2(t) = C_2 p_4(t)$, $\bar{C}_1, C_2 > 0$ であるから、これは、

$$\underline{p}_i \leq p_i(t) \leq \bar{p}_i, \quad i=2, 4 \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (2.17), (2.18)$$

と等価である。また、(3) は次の式で与えられる。

$$p_0 \leq p_i(t) \quad i=1, 3 \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (2.19), (2.20)$$

$R_i(t)$, $i=1, \dots, 4$ は消費点のバルブの開度によって決まり、任意の t に対して非負である。また、(2.9), (2.10), (2.19), (2.20) より $p_{s_i}(t) \geq 0$, $i=1, 2$ は自動的に成立する。 $d_i(t)$, $i=1, \dots, 4$ はその予測値が与えられる。けっきょく、われわれのシステムはプロセス方程式 (2.1)~(2.14) と不等式制約条件 (2.15)~(2.20) によって規定される。

3. 最適制御問題の定式化

流体供給システムの最適制御問題は、2. にのべたプロセス方程式と不等式条件のもとでの、ある定められた目的関数の最小化問題として定式化することができる。プロセス方程式 (2.1)~(2.14) は積分方程式 (2.3), (2.4) を含んでいるため動的モデルであるが、このような連続変数のモデルでは実際に数値計算をするのがむずかしい。そこで、(2.1)~(2.20) の離散形近似モデルとして、以後次のような近似プロセス方程式を考えよう。すなわち、(2.1)~(2.20)における連続時間 t , $t_0 \leq t \leq t_1$ を離散の時刻 j , $j=1, \dots, T$ でおきかえ、さらに (2.3), (2.4) の $\int_{t_0}^t dt$ を $\sum_{n=1}^j \Delta t$ でおきかえた式の集合を (2.1)'~(2.20)' とする。そうすれば (2.1)'~(2.20)' はスタティックな式であるが、 T が大きくなると変数の数が非常に多くなる。そこで、プロセス方程式 (2.1)'~(2.14)' から消去しうる変数を消去しよう。われわれのシステムでは、圧力変数をすべて消去することも、流量変数をすべて消去することもともに可能である。前者を流量法、後者を圧力法とよぶことにしよう。われわれの選ぶべき2つのコントロール変数は、流量法では $f_{s_i}(j)$, $i=1, 2$, $j=1, \dots, T$, 圧力法では $p_{s_i}(j)$, $i=1, 2$, $j=1, \dots, T$ にとられる。以下にのべる最適化手法は流量法、圧力法のどちらを用いることも可能であるが、ここでは、数値計算がより簡単な流量法を用いることにする。

まず、(2.5)'~(2.8)' から $p_1(j)$, $p_3(j)$ を消去すると次をうる。

$$\sum_{i=1}^4 k_i f_i(j) |f_i(j)| = 0 \quad (3.1)$$

$$p_2(j) - p_4(j) = k_2 f_2(j) |f_2(j)| + k_3 f_3(j) |f_3(j)|, \quad j=1, \dots, T \quad (3.2)$$

(2.3)', (2.4)' を (3.2) に代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_1} \sum_{n=1}^j (f_1(n) - f_2(n) - d_2(n)) \Delta t + p_2(0) \\ & - \frac{1}{C_2} \sum_{n=1}^j (f_3(n) - f_4(n) - d_4(n)) \Delta t - p_4(0) \\ & = k_2 f_2(j) |f_2(j)| + k_3 f_3(j) |f_3(j)| \quad j=1, \dots, T \end{aligned} \quad (3.3)$$

(2.1)', (2.2)', (3.1), (3.3) は $f_{s_i}(j)$, $i=1, 2$, $j=1, \dots, T$ が与えられたとき、 $f_i(j)$, $i=1, \dots, 4$, $j=1, \dots, T$ に関する非線形連立方程式であり、この解 $f_i(j)$ から $p_i(j)$, $R_i(j)$, $i=1, \dots, 4$, $j=1, \dots, T$, $p_{s_i}(j)$, $i=1, 2$, $j=1, \dots, T$ は容易に求められる。

以後、(2.1)', (2.2)', (3.1), (3.3) をプロセス方程式、 $f_{s_i}(j)$, $i=1, 2$, $j=1, \dots, T$ をコントロール変数、 $f_i(j)$, $i=1, \dots, 4$, $j=1, \dots, T$ を出力変数とよぶことにする。上にのべたように、圧力およびバルブ抵抗変数はすべて流量変数の関数として求められるから、不等式制約条件 (2.15)'~(2.20)' もまた、 $f_i(j)$, $i=1, \dots, 4$, $j=1, \dots, T$, $f_{s_i}(j)$, $i=1, 2$, $j=1, \dots, T$ に関する制約条件と考えられる。

次に、目的関数は、

$$P = \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^2 \alpha_i f_{s_i}(j) \quad (3.4)$$

または、

$$P = \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^2 (\alpha_i f_{s_i}(j) + \beta_i p_{s_i}(j)) \quad (3.5)$$

が考えられる。 α_i, β_i はコスト係数で、一般に $f_{s_i}(j)$, $i=1, 2$, $j=1, \dots, T$ の関数である。

けっきょく、最適制御問題は、「プロセス方程式 (2.1)', (2.2)', (3.1), (3.3) および不等式制約条件 (2.15)'~(2.20)' のもとで、(3.4) あるいは (3.5) を最小にするような $f_{s_i}(j)$, $i=1, 2$, $j=1, \dots, T$ を求めること」と定式化することができる。すなわち、コントロール変数および出力変数の合成ベクトルをそれぞれ $\mathbf{m}$, $\mathbf{x}$ とすれば、

$$\min_{\mathbf{m}} P(\mathbf{x}, \mathbf{m}) \quad (3.6)$$

$$\text{subject to } \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) \leq \mathbf{0} \quad (3.7), (3.8)$$

しかし、この問題に、 $\mathbf{x}$, $\mathbf{m}$ をすべて変数として直接非線形計画法を適用することは、変数の数が膨大なために実際には困難である。そこで、次節において $\mathbf{m}$ が与えられたとき数値的に $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{m})$ を求める方法を考える。これを用いれば、(3.6)~(3.8) は、

$$\min_{\mathbf{m}} P(\mathbf{x}(\mathbf{m}), \mathbf{m}) \quad (3.9)$$

$$\text{subject to } \mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathbf{m}), \mathbf{m}) \leq \mathbf{0} \quad (3.10)$$

と表わされ、コントロールベクトル $\mathbf{m}$ だけの空間で、

等式制約条件を含まない最適化問題として数値解を探索することができる。

4. プロセス方程式の数値解法

(3.7) は実際には (2.1)', (2.2)', (3.1), (3.3) で与えられるから、次のような $4T$ 個の式である。

$$-x_1(j) + x_4(j) + m_1(j) - d_1(j) = 0 \quad (4.1)$$

$$x_2(j) - x_3(j) + m_2(j) - d_3(j) = 0 \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^4 k_i x_i(j) |x_i(j)| = 0 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_1} \sum_{n=1}^j (x_1(n) - x_2(n) - d_2(n)) \Delta t + p_2(0) \\ & - \frac{1}{C_2} \sum_{n=1}^j (x_3(n) - x_4(n) - d_4(n)) \Delta t - p_4(0) \\ & - k_2 x_2(j) |x_2(j)| - k_3 x_3(j) |x_3(j)| = 0 \\ & j=1, \dots, T \quad (4.4) \end{aligned}$$

この節では、任意に固定された $m = m^0$ に対して非線形連立方程式 (4.1)~(4.4) を解くアルゴリズムを研究する。

まず、(4.1)~(4.4) において $m_i(j)$, $i=1, 2$, $j=1, \dots, T$ を固定したとき、これらの $4T$ 個の連立方程式を解くためには $4T$ 個を同時に解く必要はないことを示そう。

$$\mu(j) = \frac{1}{C_1} \sum_{n=1}^{j-1} (x_1(n) - x_2(n) - d_2(n)) \Delta t,$$

$$\nu(j) = \frac{1}{C_2} \sum_{n=1}^{j-1} (x_3(n) - x_4(n) - d_4(n)) \Delta t \quad \text{とおけば,}$$

(4.4) は次のように書ける。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_1} (x_1(j) - x_2(j) - d_2(j)) \Delta t + \mu(j) + p_2(0) \\ & - \frac{1}{C_2} (x_3(j) - x_4(j) - d_4(j)) \Delta t - \nu(j) - p_4(0) \\ & = k_2 x_2(j) |x_2(j)| + k_3 x_3(j) |x_3(j)| \quad j=1, \dots, T \quad (4.5) \end{aligned}$$

(4.1)~(4.3), (4.5) から $j=1$ に対する 4 個の式をとりだし $x_i(1)$, $i=1, \dots, 4$ を求める。これらを $j=2$ に対する 4 個の式に代入すると、 $\mu(2)$, $\nu(2)$ は定数となるから $x_i(2)$, $i=1, \dots, 4$ に関する連立方程式がえられる。これをくりかえすとき、 $4T$ 個の式を 4 個ずつシーケンシャルに解くことによってすべての解がえられる。よって、われわれの問題は x_i , $i=1, \dots, 4$ に関する連立方程式、

$$f_1(\mathbf{x}) = -x_1 + x_4 + m_1 - d_1 = 0 \quad (4.6)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = x_2 - x_3 + m_2 - d_3 = 0 \quad (4.7)$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 k_i x_i |x_i| = 0 \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} f_4(\mathbf{x}) &= a_1(x_1 - x_2) - a_2(x_3 - x_4) + B \\ & - k_2 x_2 |x_2| - k_3 x_3 |x_3| = 0 \quad (4.9) \end{aligned}$$

を解くことに帰着された。ただし、ここで $a_1 = \Delta t / C_1$, $a_2 = \Delta t / C_2$, $B = -d_2 \Delta t / C_1 + d_4 \Delta t / C_2 + \mu + p_2(0) - \nu - p_4(0)$ は定数である。

非線形連立方程式の数値解法として、最近たとえば Broyden³⁾, Fletcher-Powell その他によって収束性

のよいアルゴリズムが開発されている。しかし、ここではネットワークシステムのシミュレーションによく用いられている Hardy-Cross 法²⁾ を拡張してわれわれのプロセス方程式に適用することを考える。理由は、一般の非線形方程式の数値解法より収束速度が非常に速いためである (参考のために拡張された Hardy-Cross 法と Broyden 法の収束速度を Table 1 に比較しておく)。

A. Hardy-Cross 法 供給点と消費点がネットワークで結ばれたシステムにおいて、各結節点に対してキルヒホッフの第 1 法則,

$$\sum_j Q_j = 0 \quad (4.10)$$

各ループに対してキルヒホッフの第 2 法則,

$$\sum_k k_i Q_i |Q_i| = 0 \quad (k_i > 0) \quad (4.11)$$

が成立すると仮定する。このようなシステムに対してすべての供給点および消費点の流量が与えられたとき、すべてのパイプの流量を数値的に求める方法を考える。供給点、消費点に接続するパイプ以外のパイプ流量を $Q_1, \dots, Q_r$ とする。まず (4.10) をすべてみたす第 1 次仮定流量 $Q_1^0, \dots, Q_r^0$ を選ぶ。これに対して (4.11) がなりたつならば $Q_1^0, \dots, Q_r^0$ は解である。(4.11) が成立しなければ、第 1 次補正流量 δQ^0 を次のように選ぶ。1 つのループに対して、それに属するパイプの第 1 次仮定流量を $Q_1^0, \dots, Q_n^0$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n k_i (Q_i^0 + \delta Q^0) |Q_i^0 + \delta Q^0| = \sum_{i=1}^n k_i Q_i^0 |Q_i^0| \\ & + 2\delta Q^0 \sum_{i=1}^n k_i |Q_i^0| + \delta Q^{02} \sum_{i=1}^n \tau_i k_i \end{aligned}$$

ここで τ_i は $Q_i^0 \geq 0$ のとき 1, $Q_i^0 < 0$ のとき -1 をとる。 δQ^0 は微小であるとみなして右辺第 3 項を省略してゼロとおけば δQ^0 がえられる。このようにして、一般に第 k イテレーションでは、

$$\delta Q^k = \frac{\sum_{i=1}^n k_i Q_i^k |Q_i^k|}{2 \sum_{i=1}^n k_i |Q_i^k|}, \quad Q_i^{k+1} = Q_i^k + \delta Q^k, \quad i=1, \dots, n \quad (4.12)$$

となる。(4.12) がすべてのループに対しておこなわれる。もし、あるパイプが隣接する 2 つのループに共通ならば、両ループの補正流量を加えて次の仮定流量とする。このことから、Hardy-Cross 法においては初期値 $Q_1^0, \dots, Q_r^0$ が (4.10) をみたすならば、任意の k に対して $Q_1^k, \dots, Q_r^k$ は (4.10) をみたす。これが Hardy-Cross 法の利点であって、(4.12) からすべてのループに対して $\delta Q^k = 0$ ならば $\sum_i k_i Q_i^k |Q_i^k| = 0$

だから $Q_1^k, \dots, Q_r^k$ は解である。

上にのべた Hardy-Cross 法はホルダーを含まない系に対するものであって、われわれのシステムには直接適用できない。そこで、次に Hardy-Cross 法をホルダーがある場合に拡張して、(4.6)~(4.8) の数値

解法を求めよう。

B. 拡張された Hardy-Cross 法 Hardy-Cross 法では非線形方程式はつねに 1 個だけ扱われているので、1 つのループについては流量 Q_i の増分 δQ_i を $\delta Q_1 = \dots = \delta Q_n = \delta Q$ と各変数について一定としている。しかし、われわれの問題 (4.6)~(4.9) では結節点の式 (4.6), (4.7), ループの式 (4.8) のほかにホルダーがあることによって非線形方程式 (4.9) が付加されており、非線形方程式の数は 2 個なので、2 つの独立な増分をとる必要がある。しかも、任意のイテレーションですべての変数が線形方程式を自動的にみたすという Hardy-Cross 法の特長をここでもみたすためには、変数の増分の修正のしかたに注意しなければならない。ここでは、(4.6) が x_1, x_4 , (4.7) が x_2, x_3 だけを含むことに注意して、 $\delta x_1 = \delta x_4 = \delta x^1$, $\delta x_2 = \delta x_3 = \delta x^2$ としよう。こうすれば、任意のイテレーションですべての変数が線形方程式 (4.6), (4.7) をみたすようにすることができる。

いま、すべての定数項が与えられたとき、(4.6), (4.7) をみたす任意の $x_1, \dots, x_4$ を $x_1^0, \dots, x_4^0$ とする。このとき、上にのべたように各変数の増分をとり、 $x_1^0, \dots, x_4^0$ で (4.8), (4.9) を線形化した方程式は次のようになる。

$$\sum_{i=1}^4 k_i x_i^0 |x_i^0| + 2\delta x^1 (k_1 |x_1^0| + k_4 |x_4^0|) + 2\delta x^2 (k_2 |x_2^0| + k_3 |x_3^0|) = 0$$

$$k_2 x_2^0 |x_2^0| + k_3 x_3^0 |x_3^0| + \delta x^2 (2k_2 |x_2^0| + 2k_3 |x_3^0| + a_1 + a_2) - \delta x^1 (a_1 + a_2) - a_1 (x_1^0 - x_2^0) + a_2 (x_3^0 - x_4^0) - B = 0$$

一般に第 k イテレーションでは次のようになる。

$$P \begin{pmatrix} \delta x^1 \\ \delta x^2 \end{pmatrix} = q \quad (4.13)$$

ただし、

$$P = \begin{pmatrix} 2(k_1 |x_1^k| + k_4 |x_4^k|) & 2(k_2 |x_2^k| + k_3 |x_3^k|) \\ -(a_1 + a_2) & 2(k_2 |x_2^k| + k_3 |x_3^k|) + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^4 k_i x_i^k |x_i^k| \\ -k_2 x_2^k |x_2^k| - k_3 x_3^k |x_3^k| + a_1 (x_1^k - x_2^k) - a_2 (x_3^k - x_4^k) + B \end{pmatrix}$$

$x^k \neq 0$ ならば P は正則だから、(4.13) は簡単に解くことができる。また $x^k \neq 0$ が (4.6)~(4.9) の解ならば $q=0$, かつ P は正則だから $\delta x^1 = \delta x^2 = 0$ である。逆に $\delta x^1 = \delta x^2 = 0$ が (4.13) の解ならば P の正則性により $q=0$, すなわち x^k は (4.8), (4.9) をみたす。ところがアルゴリズムのつくり方から x^k は (4.6), (4.7) をみたしているから、けっきょく $\delta x^1 = \delta x^2 = 0$ が実現したときの x^k は (4.6)~(4.9) の解になっている。この結果はアルゴリズムの停止基準として用いることができる。

実際に (4.13) を用いて (4.6)~(4.9) (つまり (4.1)~(4.4)) の解を求めた結果を Table 1 に示す。Table 1 に示したように、拡張された Hardy-Cross

Table 1 Comparison of extended Hardy-Cross' method and Broyden's method
parameters used : $C_1=C_2=1$, $k_1=k_2=k_3=k_4=1$, $p_2(0)=1$, $p_4(0)=0$, $T=8$, $\Delta t=1$

discrete time j	1	2	3	4	5	6	7	8
value of control var. $m_1(\cdot)$	3.0	3.0	5.0	5.0	6.0	5.0	5.0	4.0
$m_2(\cdot)$	3.0	3.0	5.0	6.0	5.0	6.0	5.0	4.0
value of demand var. $d_1(\cdot)$	1.0	2.0	1.0	1.0	1.0	4.0	4.0	1.0
$d_2(\cdot)$	1.0	1.5	1.0	1.0	2.0	3.0	4.0	1.0
$d_3(\cdot)$	1.0	1.25	1.0	2.0	1.0	4.0	5.0	2.0
$d_4(\cdot)$	1.0	1.75	2.0	1.0	2.0	5.0	3.0	2.0

initial estimates of x : $x_1^0(j) = m_1(j) - d_1(j)$, $x_2^0(j) = 0$, $x_3^0(j) = m_2(j) - d_3(j)$, $x_4^0(j) = 0$, $j=1, \dots, T$
computed results :

discrete time j	1	2	3	4	5	6	7	8
value of output var. $x_1(\cdot)$	0.88	0.35	1.89	1.93	2.46	0.02	0.50	1.41
$x_2(\cdot)$	-0.88	-0.79	-1.89	-1.93	-1.95	-0.76	-0.02	-0.86
$x_3(\cdot)$	1.13	0.96	2.11	2.07	2.05	1.24	-0.02	1.14
$x_4(\cdot)$	-1.13	-0.65	-2.11	-2.07	-2.54	-0.98	-0.50	-1.59
No. of iterations								
extended H-C' method	2	2	2	2	2	2	2	2
Broyden's method	18	36	15	15	18	29	25	14

execution time : extended Hardy Cross' method 2.95 s (IBM 7040)
Broyden's method 185.76 s (Fortran IV)

法は Broyden 法に比べて計算時間が非常に短くてすみ、(4.6)~(4.9) を解く場合には 60 倍以上速く収束する。

5. 最適制御問題の解法

拡張された Hardy-Cross 法の導入により (3.9), (3.10) のような形に変形された問題の解法として Zoutendijk の方法を応用する。またイテレーション停止規準として必要な関連定理を開発する。

Zoutendijk の実行可能方向法と関連定理

$$\min f(\mathbf{x}) \text{ subject to } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \quad (5.1)$$

ここで $f, \mathbf{g}$ は偏導関数が連続な、ベクトルの関数である。Zoutendijk の実行可能方向法⁴⁾では、第 i イテレーションにおける変数の値を $\mathbf{x}^i$, $J^i = \{j | g_j(\mathbf{x}^i) = 0\}$ とするとき、次のような補助問題を解いて次に進むべき探索方向 $\mathbf{s}^i$ を求める。

$$\min_{\mathbf{s}, \xi} \xi \quad (5.2)$$

$$\text{subject to } \nabla g_j(\mathbf{x}^i) \mathbf{s} + \theta_j \xi \geq 0 \quad j \in J^i \quad (5.3)$$

$$\nabla f(\mathbf{x}^i) \mathbf{s} - \xi \leq 0 \quad (5.4)$$

$$\mathbf{s}^T \mathbf{s} + \xi^2 \leq 1 \quad (5.5)$$

ここで修正ファクタ θ_j は、 $g_j(\mathbf{x})$ が線形ならば $\theta_j = 0$, 非線形ならば $0 < \theta_j < 1$ にとる。方向 $\mathbf{s}^i$ が決まれば、ステップ幅は線形探索によって $f(\mathbf{x}^{i+1}) = \min_{\alpha} f(\mathbf{x}^i + \alpha \mathbf{s}^i)$ となるように決める。イテレーションの停止規準は次の定理で与えられる。

【定理 1】(Zoutendijk) 実行可能解 $\mathbf{x}^i$ に対して補助問題 (5.2)~(5.5) の解を ξ^* とするとき、 $\xi^* \geq 0$ ならば $\mathbf{x}^i$ は原問題の最適解である⁴⁾。

さて、(5.2)~(5.5) は形式的に次のように書ける。

$$\min_{\mathbf{y}} \mathbf{p}^T \mathbf{y} \quad (5.6)$$

$$\text{subject to } \mathbf{P} \mathbf{y} \leq \mathbf{0}, \mathbf{y}^T \mathbf{y} \leq 1 \quad (5.7), (5.8)$$

ただし、 $\mathbf{y} = (s_1, \dots, s_n, \xi)^T$, $\mathbf{p} = (0, \dots, 0, 1)^T$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g_1}{\partial x_1} \big|_{\mathbf{x}^i} & \dots & -\frac{\partial g_1}{\partial x_n} \big|_{\mathbf{x}^i} & -\theta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial g_r}{\partial x_1} \big|_{\mathbf{x}^i} & \dots & -\frac{\partial g_r}{\partial x_n} \big|_{\mathbf{x}^i} & -\theta_r \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \big|_{\mathbf{x}^i} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \big|_{\mathbf{x}^i} & -1 \end{pmatrix}$$

$$J^i = \{1, 2, \dots, r\} \text{ である。}$$

(5.6)~(5.8) に対する Lagrange 関数を、

$$L(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \beta) = \mathbf{p}^T \mathbf{y} + \mathbf{u}^T \mathbf{P} \mathbf{y} + \beta (\mathbf{y}^T \mathbf{y} - 1), \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \beta \geq 0 \quad (5.9)$$

と定義すれば、最適解 $\mathbf{y}^*$ に対して、

$$\frac{\partial L^T}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{p} + \mathbf{P}^T \mathbf{u} + 2\beta \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial L^T}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{P} \mathbf{y} \leq \mathbf{0} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{u}^T \frac{\partial L^T}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{u}^T \mathbf{P} \mathbf{y} = 0 \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 1 \leq 0 \quad (5.13)$$

$$\beta \frac{\partial L}{\partial \beta} = \beta (\mathbf{y}^T \mathbf{y} - 1) = 0 \quad (5.14)$$

$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \beta \geq 0 \quad (5.15)$$

をみたす Lagrange 乗数 $\mathbf{u}^*$, β^* が存在する。問題 (5.6)~(5.8) は凸計画問題だから、条件 (5.10)~(5.15) は最適十分条件にもなっていることに注意する。(5.10) に左から $\mathbf{P}$ をかけると、

$$\mathbf{P} \mathbf{p} = -\mathbf{P} \mathbf{P}^T \mathbf{u} - 2\beta \mathbf{P} \mathbf{y} \quad (5.16)$$

また、 $\mathbf{v} = -2\beta \mathbf{P} \mathbf{y}$ とおけば、(5.11), (5.15) から $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ 。さらに (5.12) から $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = -2\beta \mathbf{u}^T \mathbf{P} \mathbf{y} = 0$ 。よって (5.10)~(5.15) の解 $(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*, \beta^*)$ に対して $\mathbf{u}^*$ と $\mathbf{v}^* = -2\beta^* \mathbf{P} \mathbf{y}^*$ は、

$$-\mathbf{P} \mathbf{P}^T \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{P} \mathbf{p} \quad (5.17)$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{v} = 0, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \quad (5.18), (5.19), (5.20)$$

をみたさなければならない。

問題 (5.6)~(5.8) を解くことと (5.17)~(5.20) を解くことはある条件のもとでは等価になる。このことを示すためには (5.17)~(5.20) の解 $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{v}^*$ に対してベクトル $\mathbf{y}^*$ とスカラー β^* が存在して、この $(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*, \beta^*)$ が (5.10)~(5.15) をみたすことをいえば十分である。以下でわれわれは Zoutendijk の方法を適用するさい、イテレーション停止規準として役だつような定理を証明しておこう。

【定理 2】

(i) 係数行列 $\mathbf{P}$ を評価する点 $\mathbf{x}^i$ が原問題 (5.1) の最適点でないならば、 $\mathbf{p} + \mathbf{P}^T \mathbf{u} = \mathbf{0}$ をみたす (5.17)~(5.20) の解 $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{v}^*$ が存在する。

(ii) $\mathbf{p} + \mathbf{P}^T \mathbf{u} = \mathbf{0}$ をみたす (5.17)~(5.20) の解 $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{v}^*$ に対して $\mathbf{y}^* = \frac{-\mathbf{p} - \mathbf{P}^T \mathbf{u}}{\|\mathbf{p} + \mathbf{P}^T \mathbf{u}\|}$ とおけば、 $\mathbf{y}^*$ は問題 (5.6)~(5.8) の最適解である。

【証明】

(i) (5.17)~(5.20) は問題 (5.6)~(5.8) の Kuhn-Tucker 条件 (5.10)~(5.15) から導かれたものであるから、 $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{v}^*$ の存在はあきらかである。すなわち、(5.6)~(5.8) の解を $\mathbf{y}^*$, $\mathbf{y}^*$ に対応する Lagrange 乗数の値を $\mathbf{u}^*$, β^* とし、 $\mathbf{v}^* = -2\beta^* \mathbf{P} \mathbf{y}^*$ とすれば $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{v}^*$ は (5.17)~(5.20) をみたす。

この $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{v}^*$ に対して $\mathbf{p} + \mathbf{P}^T \mathbf{u} = \mathbf{0}$ がなりたつと仮定する。このとき $\mathbf{p}^T = -\mathbf{u}^{*T} \mathbf{P}$ だから、

$$\mathbf{p}^T \mathbf{y} = -\mathbf{u}^{*T} \mathbf{P} \mathbf{y} \geq 0 \text{ for } \forall \mathbf{y} \text{ satisfying } \mathbf{P} \mathbf{y} \leq \mathbf{0}$$

所が、 $\mathbf{P} \mathbf{y} \leq \mathbf{0}$ は問題 (5.6)~(5.8) の制約条件の一部であるから、 $\mathbf{p}^T \mathbf{y} \geq 0$ はあきらかである。ところが仮定により $\mathbf{x}^i$ は原問題の最適点ではないから、定理 1 から $\mathbf{p}^T \mathbf{y}^* = \xi^* < 0$ でなければならない。これは矛盾であって、けっきょく $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{v}^*$ に対して $\mathbf{p} + \mathbf{P}^T \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ がみたまされる。

(ii) $\mathbf{p} + \mathbf{P}^T \mathbf{u} = \mathbf{0}$ をみたす (5.17)~(5.20) の解 $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{v}^*$ が存在することは (i) で証明された。この

u^*, v^* に対して,

$$z = -p - P^T u^* = 0 \quad (5.21)$$

とおくと, $\|z\| = \|-p - P^T u^*\| = \|p + P^T u^*\| > 0$ で, $y^* = (-p - P^T u^*) / \|p + P^T u^*\| = z / \|z\|$ となる. ここで $2\beta^* = \|z\| > 0$ とおけば, $z = \|z\| y^* = 2\beta^* y^*$ となるから, (5.21) に代入すれば, (y^*, u^*, β^*) は (5.10) をみたす. また (5.17), (5.20) から, $P y^* = (-P_p - P P^T u^*) / \|p + P^T u^*\| = -u^* / \|p + P^T u^*\| \leq 0$ であるから (5.11) がみたされる. また, (5.18) から $u^{*T} P y^* = -u^{*T} v^* / \|p + P^T u^*\| = 0$ だから, (5.12) もみたされる. さらに $y^{*T} y^* = 1$, $u^* \geq 0$, $\beta^* > 0$ だから (5.13) ~ (5.15) もみたされる. ゆえに y^* は (5.6) ~ (5.8) の解である.

イテレーションの停止規準は $P^T y^* = \xi^* \geq 0$ であったが, (5.17) ~ (5.20) を解き定理 2 を用いて y^* を計算するときには, もし $p + P^T u = 0$ ならば y^* が求められないのでこの停止規準が使えない. しかしこの場合には定理 2 (i) に関する背理法から, すでに最適解に達していることがわかり, y^* を計算する必要はない. すなわち定理 2 (i) の対偶をとってそれを停止規準として用いることができる.

(5.17) ~ (5.20) は Wolfe の 2 次計画法⁵⁾ を応用すれば, LP のシンプレックス法を用いて容易に解くことができる.

6. 例 題

Zoutendijk のアルゴリズムと拡張された Hardy-Cross 法を併用して, 次のような最適制御問題の例題を考えよう.

簡単のため 1 日を 4 時間区間 (つまり $T=4$) で考える. Fig. 2 における供給点 S_1, S_2 の供給能力は, それぞれ $\bar{m}_1=10.0$, $\bar{m}_1=5.0$, $\bar{m}_2=5.0$, $\bar{m}_2=2.5$, またいろいろな定数は次のとおりである. ただし下つき添字はホルダー H_1, H_2 の番号で, 圧力は相対圧力である. $\bar{v}_1=5.0$, $\bar{v}_2=2.5$ (ホルダー容量), $\bar{p}_2=2.0$, $\bar{p}_4=1.6$, $C_1=\bar{v}_1/\bar{p}_2=2.5$, $C_2=\bar{v}_2/\bar{p}_4=1.563$, $k_1=k_3=2.5 \times 10^{-2}$, $k_2=k_4=5.0 \times 10^{-2}$, $k_{s1}=k_{s2}=3.0 \times 10^{-4}$, $p_0=0.0$, $\rho=10^3$. また, ホルダー H_1, H_2 の流体底圧力の初期値は $p_2(0)=0.6$, $p_4(0)=0.48$ とする. 各消費点の需要は次のように与えられる. $d_1(1)=1.0$, $d_1(2)=4.0$, $d_1(3)=2.25$, $d_1(4)=4.5$, $d_2(1)=1.5$, $d_2(2)=6.0$, $d_2(3)=3.3$, $d_2(4)=7.0$, $d_3(1)=0.5$, $d_3(2)=2.0$, $d_3(3)=1.2$, $d_3(4)=2.0$, $d_4(1)=1.0$, $d_4(2)=4.0$, $d_4(3)=2.25$, $d_4(4)=4.5$.

制約条件としてさらに次のような条件を考えた. 1 日のおわりにホルダーにたまっている流体の量は, 翌日の流体量の初期値となるから, 最終時間ステージでの各ホルダーの流体圧力 $p_2(4)$, $p_4(4)$ は次の式をみたす.

$$p_i(0) \leq p_i(4) \quad i=2, 4 \quad (6.1), (6.2)$$

1. 上のような数値例において, 目的関数を流体コ

Table 2 Simulation result of optimization (1)

initial value of objective function : 79.50
minimum value of objective function : 76.79
number of iterations : 40

discrete time j	1	2	3	4
optimal control value $m_1(\cdot)$	5.62	10.00	10.00	9.99
$m_2(\cdot)$	2.51	2.54	2.51	4.15
optimal output value $x_1(\cdot)$	2.82	3.53	4.59	3.36
$x_2(\cdot)$	-1.07	-0.37	-0.84	-1.24
$x_3(\cdot)$	0.93	0.17	0.47	0.91
$x_4(\cdot)$	-1.80	-2.47	-3.15	-2.13
$p_1(\cdot)$	1.75	1.02	2.09	0.89
$p_2(\cdot)$	1.55	0.71	1.56	0.60
$p_3(\cdot)$	1.61	0.72	1.60	0.68
$p_4(\cdot)$	1.59	0.72	1.59	0.66

Table 3 Simulation result of optimization (2)

initial value of objective function : 96.73
minimum value of objective function : 91.24
number of iterations : 41

discrete time j	1	2	3	4
optimal control value $m_1(\cdot)$	5.01	7.76	9.99	9.99
$m_2(\cdot)$	2.50	2.50	4.62	4.99
optimal output value $x_1(\cdot)$	2.46	2.21	4.75	3.48
$x_2(\cdot)$	-1.05	-0.29	-1.89	-1.69
$x_3(\cdot)$	0.95	0.22	1.53	1.31
$x_4(\cdot)$	-1.54	-1.55	-2.98	-2.02
$p_1(\cdot)$	1.56	0.13	1.91	0.91
$p_2(\cdot)$	1.41	0.00	1.34	0.61
$p_3(\cdot)$	1.46	0.01	1.52	0.75
$p_4(\cdot)$	1.44	0.01	1.46	0.71

スト $P(x, m) = \sum_{j=1}^4 (1.5 m_1(j) + 2.0 m_2(j))$ にとった場合, Table 2 のようなシミュレーション結果がえられた.

2. 次に目的関数を $P(x, m) = \sum_{j=1}^4 (1.5(m_1(j) + 2.0 m_2(j) + 1.75 p_{s1}(j) + 1.3 p_{s2}(j)))$ とした場合には, Table 3 のようなシミュレーション結果がえられた.

Table 2, 3 の結果の初期推定値は, ともに $m_1^0(1)=5.3$, $m_1^0(2)=9.7$, $m_1^0(3)=7.4$, $m_1^0(4)=9.8$, $m_2^0(1)=2.6$, $m_2^0(2)=4.7$, $m_2^0(3)=3.4$, $m_2^0(4)=4.9$ である.

シミュレーション実験では, 許容範囲にあるいろいろな初期推定値に対して, みな同じ値に収束した. また, 停止規準は $\xi^* > 1.0 \times 10^{-3}$ または $\|p + P^T u\| < 1.0 \times 10^{-3}$ である. 計算実行時間は 1 つの問題に対して, 約 2 分 (IBM 7040 Fortran IV) である.

7. 一般的なシステムに対する拡張された Hardy-Cross 法の適用可能性

本章では、供給点、消費点、結節点、ホルダー、バルブ抵抗およびパイプを要素とする一般的な流体供給ネットワークシステムに対して、拡張された Hardy-Cross 法がどのように適用できるかを考察しよう。

グラフ理論との用語の統一のため、以後パイプを分枝 (edge)、端点として供給点または消費点をもたないパイプを通常分枝 (ordinary edge) とよぶ。また、結節点、供給点、消費点およびホルダーをあわせて点 (point) とよぼう。通常分枝の流量を $x = x(j) = (x_1(j), \dots, x_r(j))^T$ 、供給分枝の流量を $m = m(j) = (m_1(j), \dots, m_p(j))^T$ 、消費点分枝の流量を $d = d(j) = (d_1(j), \dots, d_q(j))^T$ とし、結節点、ホルダー、供給点の圧力をそれぞれ、 $p_n = p_n(j) = (p_1(j), \dots, p_n(j))^T$ 、 $p_h = p_h(j) = (p_{n+1}(j), \dots, p_{n+h}(j))^T$ 、 $p_s = p_s(j) = (p_{s1}(j), \dots, p_{sq}(j))^T$ とする。また、消費点分枝のバルブ抵抗度数を $R = R(j) = (R_1(j), \dots, R_q(j))^T$ とする。他の記号は 2. に準ずる。さらに、 $p_h(0) = (p_{n+1}(0), \dots, p_{n+h}(0))^T$ 、

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_r \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} |x_1(j)| & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |x_r(j)| \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} A_j & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{C_h} A_j \end{pmatrix}$$

とする。ただし、 $C_1, \dots, C_h$ はホルダーのキャパシタンス、 A_j は積分の近似和の演算子を表わす。すなわち、 $A_j = \sum_{n=1}^j \Delta t$ 。

次に、点-分枝接合行列 Y^* を次のように定義する。すなわち、 Y^* は列が左から r 個の通常分枝、 p 個の供給点分枝、 q 個の消費点分枝に対応し、行が上から n 個の結節点、 h 個のホルダー、 p 個の供給点、 q 個の消費点に対応して、点 i から分枝 j がでていくとき $y_{ij} = -1$ 、はいるとき $y_{ij} = 1$ 、その他のとき $y_{ij} = 0$ を要素とする $(n+h+p+q) \times (r+p+q)$ 行列である。 Y^* のはじめの $n+h$ 行からなる小行列を Y とし、 $Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ h \end{matrix}$ 、 $Y_1 = \begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \end{pmatrix}$ とおく。

ここで、これからの議論のために、グラフ理論の定理を証明なしで与えておく。

【補助定理 1⁶⁾】 連結グラフの点-分枝接合行列を B 、結節点の数を b とすれば、 $\text{rank } B = b-1$ 。また、 B の任意の 1 行をのぞいた $b-1$ 個の行は 1 次独立である。

【補助定理 2⁶⁾】 連結グラフの分枝の数を a 、結節点の数を b 、基本ループの数を l とするとき、 $l = a - b + 1$ 。

さて、プロセス方程式を導こう。結節点およびホルダーの物質収支は、それぞれ、

$$(Y_{11}, Y_{12}) \begin{pmatrix} x \\ m \\ d \end{pmatrix} = 0 \quad (7.1)$$

$$A(Y_{21}, Y_{22}) \begin{pmatrix} x \\ m \\ d \end{pmatrix} + p_h(0) = p_h \quad (7.2)$$

で表わされる。また、通常分枝の圧力降下は、 $Z = -Y_1^T$ とおけば、

$$Z \begin{pmatrix} p_n \\ p_h \end{pmatrix} = KXx \quad (7.3)$$

と書くことができる。

まず (7.3) から p_n を消去する。(7.3) には Y^* の一部である Y_1 だけが含まれているから、(7.3) だけを考えるときには対応する点-分枝接合行列としては Y^* でなく Y_1 を用いることができる。 Y_1 に対応するグラフに対しても補助定理 1, 2 はなりたつ。システムの基本ループの数を s とすれば、補助定理 2 により通常分枝の数 r は $r = s + (n+h) - 1$ である。また、補助定理 1 により $\text{rank } Z = \text{rank } Y_1 = n+h-1$ だから、 $(n+h+s-1) \times (n+h)$ 行列 Z の $n+h-1$ 個の列は 1 次独立である。このとき、 Z の第 1 列で非ゼロ要素のある行を第 1 行と交換し (第 1 行が非ゼロならそのままよい)、次に第 1 行に適当な定数をかけて他の行に加え第 1 列の第 2 ~ 第 $n+h+s-1$ 行をゼロにする。これを各列に対して順におこなうと、 Z の主対角部分を $(n+h-1) \times (n+h-1)$ 上三角行列に変換することができる。すなわち、適当な基本演算^{*1} E をほどこして、 Z を、

$$EZ = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & * & * & \cdots & * \\ \hline & & 0 & & W & \\ & & 0 & & 0 & \end{array} \right) \begin{matrix} n \\ h-1 \\ s \end{matrix}$$

なる形に変換できる⁷⁾。ただし W は $\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$ の形の $(h-1) \times h$ 行列である。このとき、(7.3) は、

$$EZ \begin{pmatrix} p_n \\ p_h \end{pmatrix} = EKXx \quad (7.4)$$

に変換される。

(7.1) ~ (7.3) における非線形方程式は (7.3) だけで、その数は r だけあり、 p_n は (7.3) だけに含まれるから、(7.3) から p_n を消去すると $r-n$ 個の非線形方程式をうる。ところが補助定理 2 によって $r-n$

*1 行列の 2 つの行 (列) の交換やある行 (列) の定数倍を他の行 (列) に加えるなどの操作は、適当な正則行列を左 (列の場合は右) からかけておこなえる。この操作を基本演算、行列を基本行列とよぶ。基本行列あるいはその積を基本演算の意味に用いることもある。

$=s+h-1$ だから、これらの $r-n$ 個の方程式は (7.4) の最後の $h-1+s$ 行によって構成することができる。

すなわち、 $EKXx = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ h-1 \\ s \end{matrix}$ とすれば、

$$Wp_h = x_B \quad (7.5)$$

$$x_C = 0 \quad (7.6)$$

(7.5), (7.6) は p_n を含まない、独立な $s+h-1$ 個の式である。

次に、(7.2) を (7.5) に代入すれば、

$$W \left\{ A(Y_{21}, Y_{22}) \begin{pmatrix} x \\ m \\ d \end{pmatrix} + p_h(0) \right\} = x_B \quad (7.7)$$

となり、 p_h が消去される。けっきょく、圧力変数 p_n , p_h の消去によって、(7.1)~(7.3) は (7.1), (7.6), (7.7) に帰着された。

ところで (7.1), (7.6), (7.7) は $(n+h+s-1)T$ 個の式からなるが、解 $x(1), \dots, x(T)$ を求めるためには各 j 時点に対応する $n+h+s-1$ 個の式を T 回シーケンシャルに解けばよいことはあきらかである。そこで、以後は固定された j に対する $n+h+s-1$ 個の式に対する、拡張された Hardy-Cross 法の適用可能性を考察する。

Hardy-Cross 法における 1 つの問題は、線形方程式をすべてみたす x の初期推定値をどのようにえらぶかということである。われわれのシステムは少なくとも 1 つのホルダーを含む ($h \geq 1$) と仮定しよう。このとき、補助定理 1 によって $\text{rank } Y_{11} = n$ であることは容易にわかる。よって、 Y_{11} の r 個の列から n 個の 1 次独立な列をえらぶことができる。これらの n 個の列からなる Y_{11} の小行列を Y_{111} , Y_{11} ののこりの部分を Y_{112} とし、 Y_{111} , Y_{112} に対応する x の部分をそれぞれ x_1, x_2 とすれば、(7.1) から、

$$Y_{11}x = (Y_{111}, Y_{112}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -Y_{12} \begin{pmatrix} m \\ d \end{pmatrix} = c \quad (\text{定数ベクトル})$$

このとき、

$$x_1 = Y_{111}^{-1}c, \quad x_2 = 0 \quad (7.8)$$

とおけば、(7.8) は線形方程式 (7.1) をみたす。すなわち、(7.8) は拡張された Hardy-Cross 法の初期推定値を与える 1 つの方法である。

また、考えている $n+h+s-1$ 個の式には $h+s-1$ 個の非線形方程式 (7.6), (7.7) が含まれる。拡張された Hardy-Cross 法は非線形方程式を線形化した線形連立方程式の解として各変数の増分を求め、逐次解を改善していく方法であるから、この場合の独立な増分の数は $h+s-1$ 個でなければならない。これらを $\delta x^1, \dots, \delta x^{h+s-1}$ とすれば、変数 x_i の増分 δx_i は、

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{h+s-1} a_i^k \delta x^k \quad i=1, \dots, r \quad (7.9)$$

で与えられる。このとき、任意のイテレーションですべての変数が線形方程式 (7.1) を自動的にみたすという拡張された Hardy-Cross 法の特長がなりたつためには、定係数 a_i^k , $i=1, \dots, r, k=1, \dots, h+s-1$ を適当にとる必要がある。このための条件は、次の (7.10)~(7.13) で与えられる。すなわち増分修正のための条件はつぎのような定数ベクトル a^k が存在することである。

$$\exists a^k = (a_1^k, \dots, a_r^k)^T \quad k=1, \dots, h+s-1 \quad (\text{定数ベクトル}) \quad (7.10)$$

$$\text{such that } a^k \neq 0 \text{ for all } k=1, \dots, h+s-1 \quad (7.11)$$

$$\exists i \text{ such that } a_i^k = 0 \text{ for all } k=1, \dots, h+s-1 \quad (7.12)$$

$$\text{and } Y_{11}(a^1, \dots, a^{h+s-1}) \begin{pmatrix} \delta x^1 \\ \vdots \\ \delta x^{h+s-1} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{for } \forall \delta x^1, \dots, \delta x^{h+s-1} \quad (7.13)$$

(7.11) は δx^k が (7.9) から消去されないための条件である。また、もし (7.12) がなりたたなければ、 x_i の増分 $\sum_{k=1}^{h+s-1} a_i^k \delta x^k$ はゼロになり、 x_i はつねにその初期推定値に等しくなる。任意の初期推定値に対して解が存在するとすれば、このことは (7.12) がなりたたなければ解が無数に存在することを意味しており、これは物理的条件からあきらかに否定される。(7.11)~(7.13) をみたす a_i^k , $i=1, \dots, r, k=1, \dots, h+s-1$ に対して増分 (7.9) をつくり、これを (7.1) の x の項に加えても (7.13) によって等式はなりたつ。すなわち、

$$Y_{11} \left\{ x + (a^1, \dots, a^{h+s-1}) \begin{pmatrix} \delta x^1 \\ \vdots \\ \delta x^{h+s-1} \end{pmatrix} \right\} + Y_{12} \begin{pmatrix} m \\ d \end{pmatrix} = 0 \quad (7.14)$$

ここで $\delta x^1, \dots, \delta x^{h+s-1}$ は、非線形方程式 (7.6), (7.7) を線形化した連立方程式の解として与えられる。

条件 (7.10)~(7.13) がなりたつための必要十分条件を与えよう。その基礎となる事実はこの定理で与えられる。

【定理 3】 $x^1, \dots, x^m$ は 1 次独立な l 次元の既知ベクトル ($l > m$)、 $X = (x^1, \dots, x^m)$, X^T の第 k 列をのぞいた小行列を $X^{T(k)}$ とする。このとき、

$$w^k \neq 0 \text{ for all } k=1, \dots, l-m \quad (7.15)$$

$$\exists i \text{ such that } w_i^k = 0 \text{ for all } k=1, \dots, l-m \quad (7.16)$$

$$X^T w^k = 0 \text{ for all } k=1, \dots, l-m \quad (7.17)$$

をみたす $l-m$ 個の l 次元ベクトル $w^1, \dots, w^{l-m}$ が存在するための必要十分条件は、 $\text{rank } X^{T(k)} = m$ for all $k=1, \dots, l$ がなりたつことである。

証明は初歩的な線形代数学を用いておこなえる¹⁾が、ここでは割愛する。

いま、われわれのシステムは $h+s \geq 2$ をみたすと

しよう。このとき、補助定理 2 によって $r-n=h+s-1 \geq 1$ 。すなわち、 $r > n$ 。さらに前にのべた $h \geq 1$ なる仮定と補助定理 1 により、 Y_{11} の行ベクトルは 1 次独立である。よって、定理 3 において、 $X^T = Y_{11}$ 、 $l=r$ 、 $m=n$ とし、 $w^k = a^k$ とすれば、条件 (7.11) ~ (7.13) はあきらかに定理 3 の条件と等価である。この結果、与えられたシステムにおいて $h \geq 1$ かつ $h+s \geq 2$ のとき、(7.10) ~ (7.13) がなりたつための必要十分条件は、 Y_{11} の第 k 列をのぞいた小行列を $Y_{11}^{(k)}$ とするとき、

$$\text{rank } Y_{11}^{(k)} = n \text{ for all } k=1, \dots, r \quad (7.18)$$

がなりたつことであることが示された。けっきょく、 $h \geq 1$ 、 $h+s \geq 2$ かつ (7.18) がなりたつようなシステムに対しては拡張された Hardy-Cross 法が適用可能である。

最後に、一般的なシステムに対する拡張された Hardy-Cross 法のアルゴリズムをまとめておく。

(i) 条件 (7.10) ~ (7.13) をみたす定数ベクトル $a^1, \dots, a^{h+s-1}$ を求める。

(ii) x の初期推定値 (7.8) を求め、 $x_1^0, \dots, x_r^0$ とする。

(iii) $x_1^0, \dots, x_r^0$ が (7.6), (7.7) をみたせば $x_1^0, \dots, x_r^0$ はプロセス方程式の解である。みたさなければ

(iv) に行く。

(iv) $x_1^0, \dots, x_r^0$ に対して、(7.6), (7.7) を線形化した線形連立方程式を解き、解 $\delta x^1, \dots, \delta x^{h+s-1}$ を求める。

(v) $\delta x_i = \sum_{k=1}^{h+s-1} a_i^k \delta x^k$, $i=1, \dots, r$ を計算する。

(iv) $x_i^0 = x_i^0 + \delta x_i$, $i=1, \dots, r$ として (iii) にもどる。

8. 結 論

ホルダーを有する流体供給ネットワークシステムについて、最適制御問題の定式化、拡張された Hardy-Cross 法によるシミュレーション、Zoutendijk の実行可能方向法による最適供給パターンの計算をおこなった。そして、一般的なネットワークシステムの最適制御に関する基本的な手法を開発した。その特長を要約すると、

1. われわれの手法では、最適化アルゴリズムは 2 つの段階、すなわち (i) プロセス方程式を解く段階と、(ii) コントロール変数の最適値を求める段階からなりたっている。このことは流体供給システムのよう

に一般に出力変数 x の次元がコントロール変数 m の次元に比べて高い場合には非常に有効である。なぜなら、プロセス方程式を x に関して解くことによって、最適化計算の過程で陽に考えなければならない変数の数を減らしておき、 m だけの空間で等式条件を含まない非線形計画として計算すればよいということは、プログラミングの複雑さをいちじるしく軽減する。

2. プロセス方程式を解くための拡張された Hardy-Cross 法は、試みた他の非線形連立方程式の解法に比べて計算時間が非常に短く、最適化アルゴリズムの一部として用いるのに適している。また、拡張された Hardy-Cross 法と Zoutendijk の方法を組み合わせて構成した最適制御計算アルゴリズムは、物理的に意味のあるシステムに対して適用した結果、収束性がよく、アルゴリズムとして妥当なものであると考えられる。

3. Zoutendijk の実行可能方向法はわれわれののような問題において有効な制約条件つき最適化手法である。さらに、LP のシンプレックス法に帰着されることは実用上非常に有益である。

4. さらに、非常に一般的なシステムに対しても基本的にはわれわれのアルゴリズムが適用可能であることが示された。

最後に、この論文で扱ったような問題の重要性を筆者らにご教示くださった東京瓦斯 (株) の山田恵康、関 雅夫の両氏に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 安西祐一郎：慶応義塾大学工学部修士論文 (1971)
- 2) 日本瓦斯協会編：都市ガス工業 (供給編)，日本瓦斯協会，p.67 (1967)
- 3) C. G. Broyden : A Class of Methods for Solving Non-linear Simultaneous Equations, Math. Comp., 19-92, 577/593 (1965)
- 4) G. Zoutendijk : Method of Feasible Directions, American Elsevier Publishing Co. Inc., New York (1960)
- 5) P. Wolfe : The Simplex Method for Quadratic Programming, Econometrica, 27-3, 382/398 (1959)
- 6) W.H. Kim & R. T. Chien : Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks, Columbia Univ. Press (1962)
- 7) A. S. Householder : The Theory of Matrices in Numerical Analysis, Blaisdell, New York (1964)
- 8) 都築五九男：都市ガスの最適供給計画に関する研究，オペレーションズリサーチ，14-8, 26/31 (1969)