パルス式自動平衡形計重機の研究†

沢井 善三郎・原 島 文 雄・稲 葉 博

東京大学生産技術研究所 東京都港区六本木 7-22-1

(昭和 46 年 3 月 24 日 受付)

Study on Pulse-Driven Automatic Scale

Zenzaburō SAWAI, Fumio HARASHIMA and Hiroshi INABA

(Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Minato-ku, Tokyo)

(Received March 24, 1971)

In this paper, automatic beam scale with a pulse motor (stepping motor) is proposed, and the analysis of the system is shown with the experimental results.

Automatic beam scales of self-balancing type are widely used in industry for their high accuracy. However, the measuring time is comparatively long with the scales of this type. Consequently, they are not used as equipment for continuous measurement that requires their fast response.

By the use of a pulse motor as actuator and of an electronic controller, the response time of an automatic beam scale is considerably improved, and digital output signals are easily obtained, because the automatic scale proposed operates as an A-D converter.

The experiments are performed with two scales, one having an accuracy of 1/1000 and the other 1/8000. The experimental results have good correlations with the computation, and it is confirmed that the automatic scales proposed in this paper have excellent performances.

1. ま え が き

工業における重量計測技術の顕著な動向に自動化の発展がある。とくに電子技術の進歩とその応用は計量装置それ自体の自動化はもとより、装置産業における連続かつ自動的な操業ラインへの導入を可能とした。すなわち、工業用はかりの自動化は計量機構と計量結果の表示・記録・印字・累加重量の計算などを行なう付属装置、ならびに信号の変換・伝送・調節・制御などを行なう付加装置に関するものが含まれる。さらに鉄鋼・石油化学工業などにおいては、プロセス全体の運転効率の最適化をはかるため電算機の導入が行なわれているが、これに適した高精度かつ速応性大なる計量装置の必要性が増大しつつある。

自動平衡形計重機はてこはかりの送錘を自動化したもので、工業用としてはもっとも精度が高くホッパ・スケール、トラック・スケールなどに応用されている。

しかしながら精度が高い反面、計量に要する時間が比較的長く連続測定装置としての主要な条件である速応性に関しては実用的に十分とはいえない。もちろん最近の装置では送錘速度を高低速の2段階に分けて行なう、いわゆるデュアルモードの送錘機構を装着したものが開発され、速応性もかなり改善されてきたが、現状では計量精度 1/8000 において 15 秒程度を要し、いまだ改善の余地が残されている。従来の自動平衡形計重機は2相サーボモータあるいはバランシングモータなどを駆動源とし、送錘機構にはラック式おもりとピニオンにより、あるいはおもりをリードスクリューによって移送する方法が主として採用されている。また前記の送錘速度の高低速切換えは2台のモータを電磁クラッチなどで切換える方法が用いられている。

本論文は従来から用いられている計量機構に送錘駆動源として電気パルスモータ（ステップモータ）を採用した、いわゆるパルスサーボシステムの自動平衡形計重機に関するものである。研究の主目的である速応

† 第13回自動制御連合講演会で発表（昭 45・10）

性改善には、つぎの2つの方式を検討した。すなわち、てこの偏位を検出し、これを帰還する従来の方式に加えて、さらにてこの偏位速度ならびに加速度を検出し、これを帰還する制御方式について計量精度 1/1 000, 感量 0.1g の実験用小形計重機をモデルとし、電算機による数値解析を含む理論的な検討と実測を行なった。またいま1つの実用的な手段である送錘速度の多段切換方式を付加した場合の効果についても実測を行なった。この場合、本方式では従来の機械的な手段によらず、すべて電子回路によった。

つぎにこれらの基本的な検討の結果、パルスサーボシステムは精度、速応性ともに従来の方式をうわまわる性能をもたせることができるとの見通しをえたので、さらに工業用自動はかりに実用されている計量機構による精度 1/8 000, 秤量 8 kg, 感量 1 g の計重機を試作し実測を行った。この結果、計量時間 10 秒以内のものを実現することができたので、これについても併せて報告する。なお自動平衡形計重機にパルスモータを駆動源とした制御方式に関する発表は、現在までのところ国内においては筆者ら以外にない^{1), 2), 3), 4)}。この方式に近いものとして、てこの偏位をパルス列に変換し、パルスモータおよびシンクロ発受信機の組み合わせによって可変周波数に変換し、サーボモータを制御する方式が開発されているが⁵⁾、従来の方式と本質的な相違はないと考えられる。また速応性の改善策として、電算機を推定器とし、てこの運動から測定荷重とつりあう送錘停止位置を予測する方式についての報告がある⁶⁾。この方式は、てこの傾きを必ずしも水平位置にもどす必要がなく、この意味から計量時間を大幅に短縮できるとされているが、現在のところ実用化に至っていない。他方、国外においては Bendix Electronics 社によってリードスクリューによる送錘機構にパルスモータを採用したてんびんが開発され、Physics Exhibition にそのモデルが出品されたと報告されている⁷⁾。

2. 原理と構成

Fig. 1 の単一てこにおいて支点 O, 力点 A, 重心を G, てこの質量を M, 力点にかかる総質量を P とすれば、つりあい状態において $\overline{OA}$ を l_1 , $\overline{OG}$ を l_2 , $\angle AOG$ を θ , 水平線 $\overline{OX}$ を基線とし $\angle XO A$ を α とおくと、てこの感度 S_e は次式で示される。

$$S_e = \frac{d\alpha}{dP} = \frac{l_1 \cos \alpha}{Pl_1 \sin \alpha + Ml_2 \sin(\theta + \alpha)} \\ = \frac{a}{Ph_1 + Mh_2} \quad (1)$$

Fig. 1 Principle of a beam scale

つぎに、Fig. 1 の系全体の慣性モーメントを I , 重力の加速度を g とすれば、てこの運動方程式から固有振動数 ω_n は次式で示される。

$$\omega_n = \sqrt{ag/IS_e} \quad (2)$$

(2) 式より ω_n は慣性モーメントと感度の積の平方根に反比例する。てこはかりの平衡点付近の応答を改善するには (2) 式の ω_n を高くする必要があるが、 S_e は計量精度からの拘束条件があり、また I は計量機構の構造上の制約から、いずれも小さくすることは容易でない。また、てこ自身の慣性モーメントを小さくした場合、荷重の大小、送錘位置によって ω_n が可変パラメータ系となるので、その安定性に問題がある。前述の送錘速度の高低速切換方式を採用する理由もこの点からうなずける。つぎに Fig. 1 のてこ系全体の伝達関数 $G(s)$ は減衰係数を ζ とすれば次式であたえられる。

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3)$$

また、パルスモータの伝達関数 $G_0(s)$ は、かなり複雑となるが実用的な近似式として 2 次振動系にむだ時間を加えることにより表わされる。すなわち、単一入力信号に対し、

$$G_0(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_0^2 \cdot e^{-s\tau}}{s^2 + 2\zeta_0\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (4)$$

ここで、 ω_0 : パルスモータ固有振動数、 ζ_0 : パルスモータ減衰係数。

また、パルスモータを送錘駆動に用いる場合、駆動パルス周波数がある程度大きい場合、パルス列入力に対する伝達関数は単に $1/s$ として近似できる。したがって後述の制御系の解析にあたっては積分器としている。また、パルスモータ使用上、とくに注意を要する点は、慣性負荷の大きさによって始動パルス周波数が大きく制限されること、および正逆転の両方向始動を要する場合、一方向駆動より始動特性の低下がみられること。さらに伝達機構として歯車を採用する場合、バックラッシュがあると計量精度への影響のみならず、騒音を発生し、さらに電気系への雑音源となるので、機械的精度の向上がとくに要求されることである。

Fig. 2 は試作計重機の機能図を示し、Table 1 に

Fig. 2 Schematic diagram for the pulse-driven automatic scale

計量精度 1/1 000 および 1/8 000 の場合の性能を示す。いずれもラック式送錘を採用し、パルスモータとラック上のピニオンとは 2 組の歯車機構によって連結されている。てこの偏位の検出は差動変圧器により、また速度検出には 2 個の円筒形多層巻コイル（各巻数 10 000 回、線径 0.12 mmφ）を差動接続とし、コイル中心に永久磁石を上下動させるものを用いている。1/1 000 試作計重機における偏位速度は、単位重量（0.1 g）あたり偏位 50 μ，固有周波数 1 Hz とすれば、直線速度 0.2 mm/s と非常に低い。したがって、検出信号はすこぶる小さい。加速度検出には速度検出器の出力に CR による電気的微分回路を挿入すれば実現可能と考えられるが、前述のように低レベルで、しかも雑音の影響もあって実用的なものをうるに至っていない。

Fig. 3 は単位重量に対する偏位を 1 として基準化した場合の制御系ブロック線図である。帰還ループは偏位、速度、加速度の 3 つの検出信号による構成を示し、ここで入力 r は、てこの偏位の目標値であり、バランスした状態を目標としているので零となる。また、

A : velocity feedback gain
 B : acceleration feedback gain
 C : time constant of acceleration detector
 T : sampling time
 T_h : dead band
 ω_n : natural frequency of beam balance
 δ : damping coefficient of beam balance
 d : disturbance (load)

Fig. 3 Block diagram

出力 c は、てこの偏位を表わす量である。

Fig. 4 は制御装置の電気系系統図である。前述のように実用的な加速度検出器をうることが困難であったので、ここでは、てこの偏位および速度検出のみとし、これらを加算、増幅し必要な検出感度をえている。A-D 変換部は電圧比較器とトランジスタゲート回路で構成され、電圧比較器の基準電圧（ $\pm V_i$, V_m , V_h ）の極性および大きさを適当に設定することにより、送錘移動の方向と速度を自動的に選別することができる。

ここで、基準電圧 V_i は Fig. 3 に示す不感帯の幅 T_h に相当し、検出信号が V_h 以上では高速パルス駆動され、 V_h から V_m の間では中速駆動、さらに V_m から V_i までは低速パルス駆動となる。試作装置は基準電圧可変範囲を大きくするため検出信号増幅器を低速用と中、高速用の 2 個を使用しているが、実用的に、

Table 1 Specification of the scales

specification		1/1 000 scale	1/8 000 scale
capacity [g]		100	8 000
sensitivity [g]		0.1	1
weighing accuracy		1/1 000	1/8 000
beam balance	moment of inertia [kg·m ²]	about 0.019 6	about 1.84
	natural period [s]	about 1	0.92
	mechanical advantage	1 : 1	1 : 1.76
	rack weight [g]	100	4 547
	sliding span [mm]	157	440
pulse motor	type	Fujitsu AT 109	Fujitsu EPM-110
	angular increment per pulse [deg]	2.25	1.5
	maximum pulses rate [pps]	8 000	8 000
	maximum out put [HP]	0.05	0.33
	drive unit	Fujitsu FANUC 613F	Fujitsu FANUC 617A
position detector		differential transformer ±2.5 mm	differential transformer ±2.5 mm
sensitivity of position		0.5 V/0.1 g	0.4 V/0.1 g

Fig. 4 Block diagram of the controller

1 個とすることは十分可能である。なお歯車比は単位重量（感量）あたり 1 パルスとしているので、駆動パルス周波数をデジタルカウンタで測定することにより直接、測定荷重を知ることができる。

3. 特性の解析および実測結果

Fig. 3 の制御系の安定性ならびに過渡特性を求めるため、以下に示す数値解析を行なった。まず、この偏位のみを帰還する場合の閉ループの安定性を知るには、記述関数 (describing function) による方法がある。すなわち、

Fig. 5 Input and output waveforms of describing function

(1) $e(t) = A_1 \cos \omega t$ とするとサンプリング周波数が ω より十分大きいこと。

(2) 不感帯の幅を T_h とすれば $A_1 \gg T_h$.

(3) $G(s)$ が低域フィルタと考えられること。

これらの条件で $e(t)$ と $m_o(t)$ の関係は Fig. 5 に示される。出力波形 $m_o(t)$ を三角波で近似し、そのフーリエ展開したものの基本波成分の振幅を m_f とすれば、

$$m_f = \frac{2}{T\pi^2 f} \quad \omega = 2\pi f \quad (5)$$

このとき、 $e(t)$ から $m_o(t)$ までの

記述関数 N_D は次式で示される。

$$N_D = \frac{4}{T\pi\omega A_1} \epsilon^{-j(\pi/2)} \quad (6)$$

ここで、 T : サンプル周期

また、 $G(s)$ は (3) 式であたえられ、 $-1/N_D = G(j\omega)$ の条件により閉ループ系が不安定となる発振周波数 ω とその振幅 A_1 は、

$$A_1 = \frac{2}{\zeta\omega_n T\pi} \quad \omega = \omega_n \quad (7)$$

となる。(7) 式は偏位のみ帰還する場合で、ほぼ実測値と一致することが確かめられた。つぎに応答特性であるが、本制御方式は非線形サンプル値系で制御動作が時間的に不連続であるが、数値解析は可能であると考えられる。Fig. 6 は Fig. 3 の制御系を状態変数

Fig. 6 State-variable diagram of the system

線図で表わしたものである。この系は次のベクトル行列形式で表わされる。

$$\frac{dv}{d\lambda} = A v(\lambda), \quad \lambda = t - nT, \quad 0 < \lambda \leq T$$

$$(n=0, 1, \dots, n)$$

$$v = \text{col}(d, x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (8)$$

(8) 式はサンプリング区間内の離散値系を記述する

状態微分方程式で、この初期条件は次の状態推移方程式であたえられる。

$$v(nT^+) = Bv(nT) \quad (9)$$

(8) 式のラプラス変換から、

$$sV(s) = AV(s) + v(0^+)$$

したがって、

$$V(s) = [sI - A]^{-1}v(0^+) \quad (10)$$

ただし、 I : 単位マトリクス

$$\Phi(\lambda) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

とすれば、

$$v(t) = \Phi(t - nT)v(nT^+) \quad (11)$$

Fig. 5 から、(8) 式は具体的に、次のように表わされる。

$$\dot{x}_1 = 0$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \omega_n^2 d - \omega_n^2 x_1 - 2\zeta\omega_n x_2 + \omega_n^2 x_4$$

$$\dot{x}_3 = \omega_n^2 d - \omega_n^2 x_1 - 2\zeta\omega_n x_2 - \frac{1}{c}x_3 + \omega_n^2 x_4 \quad (12)$$

したがって (付録参照)、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega_n^2 & -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n & 0 & \omega_n^2 \\ \omega_n^2 & -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n & -1/c & \omega_n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\Phi(t) = [\phi_{ij}] \quad (14)$$

また、(9) 式の B 行列は、Fig. 6 より次のようになる。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + Q/x_4(nT) \end{pmatrix} \quad (15)$$

ただし、 Q は、

$$J = -[x_1(nT) + Ax_2(nT) + A \cdot Bx_3(nT)] \text{ とおけば、}$$

$$Q = \begin{cases} +1 & J \geq T_h \\ 0 & -T_h < J < T_h \\ -1 & -J \leq -T_h \end{cases} \quad (16)$$

ゆえに、任意の初期値 $v(0^+)$ があたえられたとき、(11)、(13)、(14)、[(15)、(16) 式からステップ応答が計算できる。各帰還量 A 、 B 、 C を決定する場合、アナログ計算機で概略値を求め、細部をデジタル計算機によって求めた。

Fig. 7、Fig. 8 は 1/1000 試作計重機のステップ応答の計算結果 (パルスモータ軸位置) と実測結果である。Fig. 7、Fig. 8 の計算結果で、グラフ初期の階段状波形はパルスモータ軸位置がステップ状に変化し

(1) $\omega_n/2\pi=0.2$, (2) $\omega_n/2\pi=1.6$,
(3) $\omega_n/2\pi=1.8 \sim 2.0$, $\zeta=0.6$, $T_h=0.6$
(theoretical)

$\zeta=0.65$, $T_h=0.6$, $\omega_n/2\pi=1.0$
(experimental)

Fig. 7 Computed curves and experimental results
(without velocity feedback)

ていることを表わしているものであり、その他の部分については簡単のため包絡線で表わしている。この場合、この平衡点付近の安定限界は駆動パルス周波数において 10 pps となる。さらに速度帰還を付加した場合、約 30 pps となり速応性の改善がみとめられた。また、これらは実測結果ともほぼ一致する。したがってさらに大幅な速応性の改善には加速度帰還が必要となる。

また、Fig. 9 は計量精度 1/1000 計重機の送錘速度を 3 段階に切換えた場合のステップ応答の実測値で、この場合、駆動パルス周波数は高速時 920 pps、中速時 50 pps、低速時 7 pps で重点荷重は 50g の分銅を用いた。偏位検出信号の大小により送錘駆動のパルス周波数が自動的に切換えられていることがわかる。実

$$\omega_n/2\pi=1.1, \quad \zeta=0.7, \quad T_h=0.8$$

(theoretical)

$$A=0.25, \quad \zeta=0.65, \quad \omega_n/2\pi=1.0, \quad T_h=0.8$$

(experimental)

Fig. 8 Computed curves and experimental results (with velocity feedback)

測結果では偏位が零付近においてオーバーシュートし符号が反転しても同一方向のパルスが出つづけている。これは、てこの振動の高周波成分を除去するために、コントローラに挿入したフィルタによる電氣的なおく

Fig. 9 Oscillograms of the transient response (1/1000 scale)

れ(約 100ms)によるものである。この場合の計量時間は秤量 100g に対し、偏位のみを帰還でも約 2.5s であった。なお高速時のパルス周波数限界を実測した結果、約 1200 pps であった。

試作計重機の数値解析および実測結果から、本制御方式は従来の方式と比較し、精度、速応性とも実用的に十分対抗でき、また他の方式にみられないすぐれた特徴を具備するものが期待できる。

一般に工業用自動平衡形計重機の計量精度は1/3000～1/8000 程度が多く用いられ、前述の試作計重機はこの意味において十分とはいえない。そこでさらに現在、実用されている計量機構にパルスモータを取付けた精度 1/8000 の計重機を試作し、実測を行なった。

Fig. 10 (a), (b) は、てこの偏位のみを帰還した場合の重点荷重に対するステップ応答を記録したものである。送錘駆動速度の切換えは3段階とし、駆動パルス周波数は高速時 910 pps, 中速時 114 pps, 低速時 3.45 pps, 重点荷重は 200g, 4000g の分銅で行なった。いずれも低速時のパルス数は2～3個で整定し、てこの平衡点付近の安定性も保証され、必要な精度を容易に確保することができた。この場合、計量時間は秤量 8kg で約 10.4s であった。また前述の、てこの偏位速度をさらに付加しても、計量時間の短縮は 0.5～0.7s で、その効果も薄い。

1/8000 試作計重機における駆動パルス周波数限界を実測したが、約 950～1000 pps で、これは当初の推定より 100 pps 程度低い。この原因としては伝達機

Fig. 10 Oscillograms of the transient response (1/8 000 scale)

構を含む計量機構の慣性負荷が、予想よりも大きくなったためである。したがって、さらにこの点を吟味すれば精度 1/8 000 において計量時間 8~9 s の工業用計量装置の実現が期待できる。Photo. 1 に計量精度 1/8 000 試作計重機の計量機構ならびに制御装置の外観を示す。

Photo. 1 View of 1/8 000 scale

4. 結 言

以上、パルスサーボシステムによる自動平衡形計重機に関する制御方式、制御系の解析、実測結果ならびに実用化試験について、その概略を報告したが、本方式はつぎのような特徴をもっている。

(1) 高精度の確保が容易、かつ速応性に関しても従来の方式よりすぐれている。

(2) 計量のデジタル表示が容易、かつ電算機の入力装置として直接使用できる。

(3) 送経速度の多段切換えをすべて電子回路によって行なっている。

(4) 機構部品がすこぶる簡単化されるので、保守の点からも有利である。

なお、本制御方式を実用化するにあたって、もっとも大きな難点は、パルスモータ駆動装置のコスト高であるが、これについても必要とする性能に適合した駆動回路の最適設計、IC 化による電子回路の簡単化、需要の促進などによりローコスト化の実現が可能であると考えられる。本研究は 1967 年 4 月、当時、本学大学院学生宮崎文夫君（現在、昭和電工勤務）によって基礎研究が行なわれ、その後、約 3 年間にわたり行なわれたものである。この間、計量機構の試作については大和製衡株式会社山越庸右氏をはじめ関係各位の協力をいただいた。また、大阪府立大学小野敏郎助教授には、種々有益な助言を賜った。この機会に厚く感謝の意を表する次第である。なお、本研究は昭和 43 年、44 年度文部省科学試験研究費によったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 沢井・宮崎・里：自動送経式計量装置について、生産研究, 20-6, 303/304 (1968)
- 2) 沢井・稲葉・宮崎：パルスモータを用いた自動送経式計重機、第 8 回計測自動制御学会学術講演会予稿集, 387/388 (1969)
- 3) 沢井・原島・稲葉：パルス式計重機の計量速度の改善、生産研究, 21-12, 35/36 (1969)
- 4) 沢井・原島・稲葉：パルス式自動平衡形計量装置、第 13 回自動制御連合講演会前刷, 313/314 (1970)
- 5) 川崎製鉄製：AUE-500 型計量装置 (1969)
- 6) 榎木・小野・松本：計算機制御を前提とした新しい自動送経式計量装置の構成とその応用、計装, 12-2, 47/52 (1969)
- 7) Ideas Applied: Weigh-Boeam Balance With a Controlled Stepping-Motor, Control 11-7, 332 (1967)
- 8) 工業計測技術系 5：重量, 40-4, 日刊工業新聞社 (1965)
- 9) LA-4 型計量機構, 大和製衡株式会社, 43-3 (1968)
- 10) J. T. Tou: Modern Control Theory, McGraw-Hill

(1964)

- 11) M. Cogniat : La balance automatique «Ugine-Eyraud», Mesures-Décembre, No. 307 (1962)
- 12) J. C. Nicklas : Analysis, Design, and Testing of

a Position Servo Utilizing a Stepper Motor, Trans. ASME, 85-6 (June-1963)

- 13) 池辺 : パルスモータのステップ応答について, 計測と制御, 1-5, 384/394 (1962)

□ 付 録 □

$\Phi(t) = [\phi_{ij}]$ の計算 :

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & \phi_{15} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34} & \phi_{35} \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & \phi_{44} & \phi_{45} \\ \phi_{51} & \phi_{52} & \phi_{53} & \phi_{54} & \phi_{55} \end{pmatrix}$$

$$\phi_{11} = 1$$

$$\phi_{12} = \phi_{13} = \phi_{14} = \phi_{15} = 0$$

$$\phi_{21} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right] = 1 - \frac{\varepsilon^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} (\sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t \cdot \zeta + \cos \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t \cdot \sqrt{1-\zeta^2})$$

$$\phi_{22} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{S + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right] = \frac{\varepsilon^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} (\sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t \cdot \zeta + \cos \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t \cdot \sqrt{1-\zeta^2})$$

$$\phi_{23} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right] = \varepsilon^{-\zeta\omega_n t} \frac{\sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\phi_{24} = 0$$

$$\phi_{25} = \phi_{31}$$

$$\phi_{31} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right] = \omega_n^2 \times \phi_{23}$$

$$\phi_{32} = -\phi_{31}$$

$$\phi_{33} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right] = \varepsilon^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \zeta \varepsilon^{-\zeta\omega_n t} \frac{\sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\phi_{34} = 0$$

$$\phi_{35} = \phi_{31}$$

$$\phi_{41} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot s \cdot \frac{C}{1 + Cs} \right] = \frac{C\omega_n^2}{1 - 2\zeta\omega_n C + C^2\omega_n^2} \left[(C\omega_n - \zeta) \varepsilon^{-\zeta\omega_n t} \frac{\sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \varepsilon^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \varepsilon^{-(1/C)t} \right]$$

$$\phi_{42} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot s \cdot \frac{C}{Cs + 1} \right] = -\phi_{41}$$

$$\phi_{43} = \mathcal{L}^{-1} \left[\left(\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \right) \cdot s \cdot \frac{1}{1 + Cs} \right] = \frac{C}{1 - 2\zeta\omega_n C + C^2\omega_n^2} \left[(C\omega_n - \zeta) \varepsilon^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \omega_n (C\omega_n \zeta - 2\zeta^2 + 1) \varepsilon^{-\zeta\omega_n t} \frac{\sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{1}{C} \varepsilon^{-(1/C)t} \right] - \varepsilon^{-(1/C)t}$$

$$\phi_{44} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C}{1 + Cs} \right] = \varepsilon^{-(1/C)t}$$

$$\phi_{45} = \phi_{41}$$

$$\phi_{51} = \phi_{52} = \phi_{53} = \phi_{54} = 0$$

$$\phi_{55} = 1$$