観測雑音の共分散行列が正則でない場合の 線形離散時間系に対する低次元最適フィルタ†

吉 川 恒 夫†

京都大学工学部 宇治市五ヶ庄
(昭和 46 年 4 月 12 日 受付)

On Low Order Optimal Filters for Linear Discrete-Time Systems with Measurement Noise Whose Covariance Matrix is Singular

Tsuneo YOSHIKAWA

(Faculty of Engineering, Kyoto University, Uji)
(Received April 12, 1971)

This paper treats the linear discrete-time filtering problem where the measurement signals contain some elements free of noise. The main results are as follows:

- (i) A low order optimal filter is obtained by modifying the ordinary Kalman filter.
- (ii) Based upon the result (i), the structure of Tse-Athans' optimal minimal-order estimator is made clear.
- (iii) Applying the result (i) to the filtering problem with colored measurement noise, Bryson-Henrikson's result is obtained without using their measurement differencing method.

1. 緒 言

状態空間法による線形離散時間系に対するフィルタリング問題の研究は Kalman^{1),2)} によってはじめられた。観測雑音の共分散行列が正則でない場合、すなわち、観測信号が観測雑音の混入しない要素をいくつか含む場合については、Kalman¹⁾ がフィルタの次元数を減少させ得ることを指摘しており、Brammer³⁾ は Wiener-Hopf 方程式を解くことによって 1 つの低次元フィルタを求めており、また最近 Tse と Athans⁴⁾ が最小次元フィルタの構成の問題を扱った研究を発表している。またいっぽう、観測信号が有色雑音を含む場合については、Bryson と Henrikson⁵⁾ が観測信号の適当な差分をとることによってフィルタの式を導いており、Rishel⁶⁾ はこのフィルタが最適であることを証明している。

本報告では、線形離散時間形フィルタリング問題において、観測信号が観測雑音の混入しない要素をいくつか含む場合を考察し、その要素の数だけ次元数の低

いフィルタが、Kalman の結果²⁾ を少し変形することによって容易に誘導されることを示す。そしてこれと文献^{4),5)} の結果との関連について考察を加える。

次節では、問題の記述とフィルタの次元数の定義を行なう。3. では、この問題に対する通常のカルマン・フィルタを少し変形することによって次元数の低いフィルタが導かれることを示す。これと本質的に同じフィルタが Brammer³⁾ によってすでに求められているが、ここに示す解法のほうがより簡明であると思われる。4. では、3. の結果を用いて、Tse と Athans⁴⁾ によって議論された最小次元最適推定器の構造をより明確に表示できることを示す。5. では、観測信号が有色雑音を含む場合のフィルタリング問題に対して 3. の結果を用いれば、Bryson と Henrikson⁵⁾ の結果が導かれることを示す。

2. 問題の記述

線形離散時間系、

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \Phi(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) = H(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (1)$$

† 第 10 回計測自動制御学会制御理論部会で発表(昭 46・2)

$$= H(k)x(k) + \begin{bmatrix} v_1(k) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

を考える。ここで $k=1, 2, \dots$ は離散時刻, $x(k) \in R^n$ は状態ベクトル, $y(k) \in R^m$ は観測信号ベクトル, $w(k) \in R^n$, $v(k) \in R^m$ および $v_1(k) \in R^{m-l}$ はランダム・ベクトル, 0 は適当な次元の零ベクトルまたは零行列を表す。ただし, R^n は n 次元ベクトルの集合であり, $n \geq m \geq l$ とする。また, $n \times m$ 行列の集合を M_{nm} で表わすとき, $\Phi(k) \in M_{nn}$, $H(k) \in M_{mn}$ であり, $\text{rank } H(k) = m$ とする。 $w(k)$, $v(k)$, $k=1, 2, \dots$ および $x(1)$ は互いに独立で, それぞれの密度関数が,

$$p(w(k)) = N(0, Q(k)) \quad (3)$$

$$p(v(k)) = N(0, R(k)), \quad R(k) = \begin{bmatrix} R_1(k) & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$p(x(1)) = N(\hat{x}(110), P(110)) \quad (5)$$

で与えられているものとする。ここで $N(\hat{x}, P)$ は平均値 $\hat{x}$, 分散 P の正規確率密度関数を表わし, $Q(k) \in M_{nn}$, $P(110) \in M_{nn}$ は正定対称*, $R(k) \in M_{mm}$, $R_1(k) \in M_{(m-l)(m-l)}$ は非負定対称である。さらに,

$$x(k) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad y(k) \triangleq \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_2(k) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$H(k) \triangleq [H_1(k) H_2(k)] \triangleq \begin{bmatrix} H_n(k) & \vdots & H_{12}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{21}(k) & \vdots & H_{22}(k) \end{bmatrix} \quad (7)$$

とおく。ただし $x_2(k) \in R^l$, $y_2(k) \in R^l$, $H_{22}(k) \in M_{ll}$ であり, $H_{22}(k)$ は正則であると仮定する。 $\text{rank } H(k) = m$ であるから, このように仮定しても一般性は失なわれない。

つぎに, フィルタに関する用語を明確にしておく。

(1), (2) で表わされる系に対して,

$$z(k+1) = A(k+1)\Phi(k)\hat{x}(k) \quad (8)$$

$$\hat{x}(k) = B(k)z(k) + C(k)y(k) \quad (9)$$

によって, $\bar{y}(k) \triangleq \{y(1), y(2), \dots, y(k)\}$ が与えられた場合の $x(k)$ の推定値 $\hat{x}(k) \in R^n$ を構成する系を, (1), (2) に対するフィルタとよぶ。そして $z(k) \in R^j$ のとき, このフィルタの次元数は j 次元であるという。すべての k について,

$$J(k) = E\{(\hat{x}(k) - x(k))^T (\hat{x}(k) - x(k)) | \bar{y}(k)\}$$

を最小にするフィルタを最適フィルタとよぶ。ただし, 添字 T は転置を, $E\{\cdot\}$ は条件付期待値を意味する。

* $Q(k)$ が非負定対称の場合には, (17) の $S(k)$ が正則でなくなる可能性がある。その場合にも (16) の $S^{-1}(k)$ の代わりに $S(k)$ の疑似逆行列 $S^+(k)$ を用いればよいことが Kalman²⁾ によって示されている。なおこの点については筆者⁸⁾ も考察を行ない, 算出の容易な一種の疑似逆行列を見出している。

これらの用語は Tse と Athans⁴⁾ の推定器 (estimator) の定義と本質的に同じものである。なぜならば, (8), (9) を書き改めると,

$$z(k+1) = A(k+1)\Phi(k)B(k)z(k) + A(k+1)\Phi(k)C(k)y(k) \quad (10)$$

$$\hat{x}(k) = B(k)z(k) + C(k)y(k) \quad (11)$$

となり, これは Tse と Athans⁴⁾ の (11) に対応するからである。(10), (11) からわかるとように, $z(k)$ をフィルタの状態ベクトル, $\hat{x}(k)$ を出力ベクトルとみることができる。ゆえに, フィルタの次元数すなわち $z(k)$ の次元数は, フィルタ内の記憶要素の数に対応する。以上の説明のためには (10), (11) のほうが (8), (9) よりもすぐれているが, (8), (9) のほうは決定すべき係数行列 $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ の物理的意味がより明確に表われている。すなわち, (8) は現在の推定値 $\hat{x}(k)$ から 1 単位時刻の間記憶すべき情報 $z(k+1)$ をいかに作り出すかを決定するのが $A(k)$ であることを示し, (9) はフィルタに記憶されている情報 $z(k)$ と現在のデータ $y(k)$ をいかに組み合わせて推定値を得るかを決定するのが $B(k)$, $C(k)$ であることを示している。なお最適フィルタにおいては,

$$\hat{x}(k) = E\{x(k) | \bar{y}(k)\}$$

が成立つことが Kalman¹⁾ によって示されている。

われわれが考察する問題は, (1), (2) の系に対する $(n-l)$ 次元の最適フィルタを求めることである。

3. 解 の 誘 導

$$\hat{x}(k|j) \triangleq \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k|j) \\ \vdots \\ \hat{x}_2(k|j) \end{bmatrix} \triangleq E\{x(k) | \bar{y}(j)\} \quad (12)$$

$$P(k|j) \triangleq E\{(\hat{x}(k|j) - x(k))(\hat{x}(k|j) - x(k))^T\} \quad (13)$$

とすると, Kalman²⁾ は $\hat{x}(k|k)$ が次式を満足することを示した。

$$\hat{x}(k|k) = [I_n - K(k)H(k)]\hat{x}(k|k-1) + K(k)y(k) \quad (14)$$

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi(k)\hat{x}(k|k) \quad (15)$$

ただし $I_n \in M_{nn}$ は単位行列であり, $K(k)$ は,

$$K(k) = P(k|k-1)H^T(k)S^{-1}(k) \quad (16)$$

$$S(k) = H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k) \quad (17)$$

$$P(k|k) = [I_n - K(k)H(k)]P(k|k-1) \quad (18)$$

$$P(k+1|k) = \Phi(k)P(k|k)\Phi^T(k) + Q(k) \quad (19)$$

によって算出される。(14), (15) が n 次元最適フィルタになっていることは, $z(k) = \hat{x}(k|k-1)$ ととることによって明らかである。このフィルタはカルマンフィルタとよばれている。

さて, (2), (6), (7) から,

$$\mathbf{x}_2(k) = H_{22}^{-1}(k)[\mathbf{y}_2(k) - H_{21}(k)\mathbf{x}_1(k)] \quad (20)$$

が得られるが, これを利用して (14), (15) を少し変形すれば, このフィルタの次元数を $n-l$ にまで落すことができる. 以下にこれを示す. (20) から,

$$\hat{\mathbf{x}}_2(k|k) = H_{22}^{-1}(k)[\mathbf{y}_2(k) - H_{21}(k)\hat{\mathbf{x}}_1(k|k)] \quad (21)$$

である. いっぽう,

$$K(k) \triangleq \begin{bmatrix} K_1(k) \\ \dots \\ K_2(k) \end{bmatrix}, \quad K_1(k) \in M_{(n-l)m} \quad (22)$$

において (14) を書きあらためると,

$$\hat{\mathbf{x}}_1(k|k) = \{[I_{n-l} : \mathbf{0}] - K_1(k)H(k)\} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + K_1(k)\mathbf{y}(k) \quad (23)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2(k|k) = \{[\mathbf{0} : I_l] - K_2(k)H(k)\} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + K_2(k)\mathbf{y}(k) \quad (24)$$

となる. (23) の $\hat{\mathbf{x}}_1(k|k)$ を (21) に代入し, これが (24) と等しいことから,

$$K_2(k) = H_{22}^{-1}(k)\{[\mathbf{0} : I_l] - H_{21}(k)K_1(k)\} \quad (25)$$

が得られる. ゆえに,

$$I_n - K(k)H(k) = \begin{bmatrix} I_{n-l} \\ \dots \\ -H_{22}^{-1}(k)H_{21}(k) \end{bmatrix} \times [I_{n-l} - K_1(k)H_1(k) : -K_1(k)H_2(k)] \quad (26)$$

である. そこで,

$$A^*(k) = [I_{n-l} - K_1(k)H_1(k) : -K_1(k)H_2(k)] \quad (27)$$

$$B^*(k) = \begin{bmatrix} I_{n-l} \\ \dots \\ -H_{22}^{-1}(k)H_{21}(k) \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$C^*(k) = K(k) \quad (29)$$

とおけば,

$$\mathbf{z}(k+1) = A^*(k+1)\Phi(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k) \quad (30)$$

$$\mathbf{z}(1) = A^*(1)\hat{\mathbf{x}}(1|0) \quad (31)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = B^*(k)\mathbf{z}(k) + C^*(k)\mathbf{y}(k) \quad (32)$$

が得られ, $(n-l)$ 次元最適フィルタ 1 つが求まったことになる.

$A^*(k)$ および $C^*(k)$ の計算に必要な $K(k)$ は (16) ~ (19) を用いて算出すればよいのであるが, (20) を利用して (18), (19) をつぎのように書き換えることもできる. まず $P(k|j)$ を分割して,

$$P(k|j) \triangleq \begin{bmatrix} P_{11}(k|j) & \dots & P_{12}(k|j) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{21}(k|j) & \dots & P_{22}(k|j) \end{bmatrix}, \quad P_{22}(k|j) \in M_{ll} \quad (33)$$

とおけば, (20), (21) から,

$$P(k|k) = B^*(k)P_{11}(k|k)B^{*T}(k) \quad (34)$$

が得られる. これを用いれば, (18), (19) は,

$$P_{11}(k|k) = A^*(k)P(k|k-1) \begin{bmatrix} I_{n-l} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$P(k+1|k) = V(k)P_{11}(k|k)V^T(k) + Q(k) \quad (36)$$

$$V(k) = \Phi(k)B^*(k) \quad (37)$$

となる. 結局, $K(k)$ は (16)~(19) または (16), (17), (22), (27), (34)~(37) の組のどちらかによって算出することになる.

なお, Brammer³⁾ は (30)~(32) と本質的に同じ結果を Wiener-Hopf 方程式を解くことによって導いているが, ここに示した解法のほうがより簡明であると思われる.

4. 最小次元最適フィルタの構造

(1), (2) に対する最小次元の最適フィルタを求める問題は Tse と Athans⁴⁾ によって考察されており, その結果はつぎのようにまとめられる.

$R_1(k)$, $k=1, 2, \dots$, が正定対称ならば, 最小次元最適フィルタの次元数は $n-l$ であり, その係数行列は, $C(k)$ が (29) によって一意的に与えられ, $A(k)$, $B(k)$ は,

$$B(k)A(k) + C^*(k)H(k) = I_n \quad (38)$$

を満足する任意の対 $\{A(k), B(k)\}$ によって与えられる.

さらに Tse と Athans は $A(k)$, $B(k)$ を具体的に算出する手法を示しているが, それによれば $(n-m)n+lm$ 個の未知数を含む双線形連立代数方程式を解かねばならない (文献⁴⁾ の (60a) を参照されたい). これに対し, 前節の結果を用いれば, 上述の $A(k)$, $B(k)$ をより明確に表示できる. すなわちつぎようになる.

$R_1(k)$, $k=1, 2, \dots$ が正定対称ならば, 最小次元最適フィルタの係数行列 $A(k)$, $B(k)$ および $C(k)$ は,

$$\tilde{A}(k) \triangleq L(k)A^*(k) \quad (39)$$

$$\tilde{B}(k) \triangleq B^*(k)L^{-1}(k) \quad (40)$$

および $C^*(k)$ で与えられる. ここで $L(k) \in M_{(n-l)(n-l)}$, $k=1, 2, \dots$ は任意の正則行列である.

これを証明するには $\tilde{A}(k)$, $\tilde{B}(k)$ が (38) の解であり, 逆に (38) の任意の解が適当な $L(k)$ を選ぶことによって $\tilde{A}(k)$, $\tilde{B}(k)$ の形に表わされることを示せばよい. 前者は (26) から明らか, また後者は $\text{rank}[I_n - C^*(k)H(k)] = n-l$ であることを利用すれば容易に示される.

5. 観測信号が有色雑音を含む場合

線形系,

$$\mathbf{x}_s(k+1) = \Phi_s(k)\mathbf{x}_s(k) + \mathbf{w}_s(k) \quad (41)$$

$$\mathbf{y}(k) = H_s(k) \mathbf{x}_s(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(k) \\ \dots \\ \mathbf{x}_n(k) \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{x}_n(k+1) = \Phi_n(k) \mathbf{x}_n(k) + \mathbf{w}_n(k) \quad (43)$$

を考える。ここで $\mathbf{x}_s(k) \in R^{n-l}$ は状態ベクトル、 $\mathbf{y}(k) \in R^m$ は観測信号ベクトル、 $\mathbf{x}_n(k) \in R^l$ は有色雑音を表わすベクトル、 $\mathbf{w}_s(k)$, $\mathbf{w}_n(k)$, $\mathbf{v}_1(k)$ はランダムベクトルである。(42) は観測雑音の一部が有色雑音となっていることを意味する。

$$\mathbf{w}(k) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{w}_s(k) \\ \dots \\ \mathbf{w}_n(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(1) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s(k) \\ \dots \\ \mathbf{x}_n(k) \end{bmatrix}$$

とおくとき、 $\mathbf{w}(k)$, $\mathbf{v}_1(k)$, $k=1, 2, \dots$, および $\mathbf{x}(1)$ は互いに独立で、

$$p(\mathbf{w}(k)) = N(\mathbf{0}, Q(k))$$

$$p(\mathbf{v}_1(k)) = N(\mathbf{0}, R_1(k))$$

$$p(\mathbf{x}(1)) = N(\hat{\mathbf{x}}(1|0), P(1|0))$$

が与えられているものとする。この系において $\bar{\mathbf{y}}(k)$ が与えられた場合に $\mathbf{x}_s(k)$ の推定値 $\hat{\mathbf{x}}_s(k|k)$ を求める問題を考察する。この問題において $m=l$ の場合、すなわち観測信号のすべての要素が有色雑音を含む場合については、すでに Bryson と Henrikson⁵⁾ が、相隣る時刻における観測信号の適当な差分を取ってそれを新たな観測信号とする方法 (measurement differencing approach) によって解いている。

本章では、上述の問題を Kalman²⁾ の augmented state approach によって 2. の問題に帰着し、3. の結果を用いて解き、その解において $m=l$ とすれば Bryson と Henrikson⁵⁾ の結果が導かれることを示す。

さて Kalman²⁾ に従って、

$$\mathbf{x}(k) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s(k) \\ \dots \\ \mathbf{x}_n(k) \end{bmatrix}, \quad \Phi(k) \triangleq \begin{bmatrix} \Phi_s(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_n(k) \end{bmatrix}$$

$$H(k) \triangleq \begin{bmatrix} H_s(k) & \mathbf{0} \\ \dots & \dots \\ I_l & \dots \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} H_{s1}(k) & \mathbf{0} \\ \dots & \dots \\ H_{s2}(k) & I_l \end{bmatrix}$$

とおけば、上述の問題は 2. の問題に帰着される。これに 3. の結果を用い、 $\hat{\mathbf{x}}_n(k|k)$ を消去すると、結局、

$$\mathbf{z}(k+1) = [\Phi_s(k) - K_1(k+1)W(k)]\hat{\mathbf{x}}_s(k|k) - K_1(k+1)U\Phi_n(k)U^T\mathbf{y}(k) \quad (44)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_s(k|k) = \mathbf{z}(k) + K_1(k)\mathbf{y}(k) \quad (45)$$

$$\mathbf{z}(1) = [I_{n-l} - K_1(1)H_s(1) : -K_1(1)U]\hat{\mathbf{x}}(1|0) \quad (46)$$

が得られる。ただし、

$$K_1(k) = [I_{n-l} : \mathbf{0}]P(k|k-1)H^T(k)S^{-1}(k) \quad (47)$$

$$S(k) = H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k) \quad (48)$$

$$P_{11}(k|k) = [I_{n-l} - K_1(k)H_s(k) : -K_1(k)U] \\ \times P(k|k-1) \begin{bmatrix} I_{n-l} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$P(k+1|k) = V(k)P_{11}(k|k)V^T(k) + Q(k) \quad (50)$$

$$V(k) = \begin{bmatrix} \Phi_s(k) \\ \dots \\ -\Phi_n(k)H_{s2}(k) \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$W(k) = H_s(k+1)\Phi_s(k) - U\Phi_n(k)H_{s2}(k) \quad (52)$$

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dots \\ I_l \end{bmatrix} \in M_{ml} \quad (53)$$

である。

$m=l$ の場合には、

$$U = I_l, \quad H_{s2}(k) = H_s(k), \quad R(k) = \mathbf{0} \quad (54)$$

とおけばよい。さらに (44), (45) から $\mathbf{z}(k)$ を消去すれば、

$$\hat{\mathbf{x}}_s(k+1|k+1) = \Phi_s(k)\hat{\mathbf{x}}_s(k|k) - K_1(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - \Phi_n(k)\mathbf{y}(k) - W(k)\hat{\mathbf{x}}_s(k|k)] \quad (55)$$

が得られ、これが Bryson と Henrikson⁵⁾ の (10) に等しいことは容易にたしかめられる。

なお、連続時間系についても有色雑音の問題が、Bucy⁷⁾ によって解かれているが、(44)~(54) において $m=l$ とし、Kalman²⁾ と同様な方法によってサンプリング間隔を 0 にもっていった極限を取ると、Bucy が観測信号の微分を取る操作を消去した式としてあげている (文献⁷⁾ の (10) が導かれる。

6. 結 言

線形離散時間系フィルタリング問題において、観測信号が観測雑音の混入しない要素をいくつか含む場合を考察し、その要素の数だけ次元数の低いフィルタを通常のカルマン・フィルタを少し変形することによって誘導した。そして、その結果を用いて Tse と Athans⁴⁾ によって議論された最小次元最適フィルタの構造をより明確にした。また、観測信号が有色雑音を含む場合のフィルタリング問題に上の結果を用いれば、Bryson と Henrikson⁵⁾ が measurement differencing method で導いたのと同じ結果が得られた。

終わりに、日ごろご指導いただいている本学植木義一教授および花房秀郎教授に深く感謝の意を表する。

また 4. の内容について討論をいただいた本学大学院生、小林博明氏に謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) R. E. Kalman : A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans. ASME, Ser. D,

- 82, 35/45 (1960)
- 2) R. E. Kalman : New Methods in Wiener Filtering Theory, Proc. of the 1st Symp. on Engng. Appl. of Random Function Theory and Probability, 270/388, J. Wiley (1963)
 - 3) K. G. Brammer : Lower Order Optimal Linear Filtering of Nonstationary Random Sequences, IEEE Trans., 13-2, 198/199 (1968)
 - 4) E. Tse and M. Athans : Optimal Minimal-Order Observer-Estimators for Discrete Linear Time-Varying Systems, IEEE Trans., 15-4, 416/426 (1970)
 - 5) A. E. Bryson Jr. and L. J. Henrikson : Estimation Using Sampled Data Containing Sequentially Correlated Noise, J. of Spacecraft and Rockets, 5-6, 662/665 (1968)
 - 6) R. W. Rishel : Convergence of Sampled Discrete Optimum Filters, Preprints of JACC, 863/870 (1968)
 - 7) R. S. Bucy : Optimal Filtering of Correlated Noise, J. M. A. A., 20, 1/8 (1967)
 - 8) 吉川 : ある種の疑似逆行列と離散時間型カルマン・フィルタ, システムと制御, 15-8 (1971)
-