確定入力を用いる荷重関数の同定法

古 田 勝 久*・河 注 植**

* 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

** 東京工業大学大学院 東京都目黒区大岡山 2-12-1

(昭和 46 年 4 月 19 日 受付)

A Method of Optimal Weighting Function Identification with Specified Input

Katsuhisa FURUTA* and Joo Shik HA**

(*Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo)
(**Graduate School, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo)

(Received April 19, 1971)

In this paper, a procedure to identify the weighting function of a system is presented. A new type of criterion is employed. It consists of the term concerning the a priori information of the weighting function and the ordinary squares integral term of the response error. It is shown that the optimal weighting function under the proposed criterion function can be determined easily by solving an optimal tracking problem, if the output of a linear free dynamical system is supplied as an input to the system to be identified.

The proposed criterion function is also interpreted from the viewpoint of estimation theory and found to be the same as the maximum likelihood function under the proper conditions.

A computational algorithm of the procedure to identify the weighting function of a single input and single output system is presented. It is also shown that the algorithm can be easily extended for multivariable systems.

Numerical computations of several examples show that the proposed procedure is satisfactory even when the system is observed only for a short period.

1. 緒 言

最近の同定法の研究はめざましく、種々の同定法が提案されてきた^{1)~5)}。それらの研究の多くは、最適制御を同定の目的としている。最適制御理論は、有限次元状態方程式で記述される線形系に対して発展してきた^{6),7)}。そのため、同定問題もシステムの数式化を線形有限次元方程式で行ない、そのモデルのパラメータ推定問題として取り扱われることが多い^{1)~5),8)~10)}。

近年、関数解析を用いた最適制御理論^{11)~13)}の発達により、荷重関数を用いて線形系の最適制御入力を決めるようになった。また、荷重関数と状態方程式の関係もくわしく研究されてきた^{14)~16)}。

荷重関数の同定法は、古くから相関法を用いて行な

われてきたもので^{17),18)}、一般の操業入力を用いる場合と擬似ランダム信号のような確定入力を加える場合があるが、いずれの場合もかなり長い区間の測定データを必要とする。短時間のデータから荷重関数を求める手法では、測定データの誤差を無視していた。Hsieh¹⁹⁾は、関数解析の手法を用いて、2乗誤差積分を最小にする評価の下に、荷重関数を求めた。これらは、いずれも同定するシステムの動特性が荷重関数で表わされること(線形)を仮定した。

本研究は同定するシステムが線形であろうとなかろうと線形で表わされたモデルの中から与えられた評価関数を最小にするモデルの荷重関数を求める場合の同定法を取り扱い、従来の荷重関数の同定に用いられた評価関数を改良したものに基づいた最適同定を定義す

る。特に、任意に入力信号を加えることができるシステムに対し、零入力線形有限次元系の出力を同定すべきシステムに加えた場合の応答から、最適制御的手法を用いて、系の荷重関数を求める方法を提案する。この場合、系の荷重関数の最適同定を求める問題は、入力発生システムへの最適制御入力を求める問題になることを示す。これは、最適制御論の同定問題への応用であり、最適制御理論を他の分野で活用できる可能性を示す。

2. 同定問題

本章においては、簡単のため、単一入力-単一出力系の同定問題を考えるが、本方法の多入力-多出力系への拡張は容易である。Fig. 1 に示すような単一入

Fig. 1 Error between output of system and that of model

力-単一出力線形系を考える。同定すべきシステムから測定された出力信号を $z(t)$ とし、システムに加えられたものと同じ入力 $u(t)$ を荷重関数が $g^m(t)$ であるモデルに加えたときの出力を $y^m(t)$ とした場合、時刻零でモデルが零状態にあるとすると、 $g^m(t)$ と $y^m(t)$ は (1) 式を満たす。

$$y^m(t) = \int_0^t g^m(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad (1)$$

誤差 $\varepsilon(t)$ を (2) 式で定義し、

$$\varepsilon(t) = z(t) - y^m(t) \quad (2)$$

評価関数、

$$J_1 = E[\varepsilon^2(t)] \quad \text{ただし、} E[\cdot]: \text{空間平均} \quad (3)$$

を最小にする $g^m(t)$ を求める手法として相関法があるが、これは緒言でも述べたように、数多くの測定データを必要とするので実際的同定法ではない。また、Hsieh¹⁹⁾ は、評価関数、

$$J_2 = \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \quad (4)$$

ただし、 $[0, T]$ は測定区間

を最小にする最適推定 $\hat{g}^m(t)$ を関数解析を用いて同定する方法を提案している。しかし、このような有限区間の測定データに基づいた評価関数を用いて同定を行なう場合、モデルのクラスに制限を加えないとすれ

ば、与えられた $u(t)$, $z(t)$ に対して $\varepsilon(t)=0$ にする $g^m(t)$ が存在するが、このような $g^m(t)$ は入力 $u(t)$ によって異なるので、最適なものとはいえない。

そこで、本研究ではこのような欠点を償うために、a priori に妥当だと考えられるモデルの荷重関数 $\bar{g}^m(t)$ をも考慮に入れた評価関数を提案し、これに基づく同定問題を考える。

そのため、本報告において「荷重関数の最適同定」とは次のように定義されたものを考える。

【定義 1】 「 $z(t)$, $t \in [0, T]$ が測定されたとき、荷重関数の最適同定とは、(1) 式の拘束の下で (5) 式の評価関数を最小にするようなモデルの荷重関数 $g^m(t)$ である。

$$J_c = \frac{1}{2} \int_0^T \{ [g^m(t) - \bar{g}^m(t)]^2 w_1(t) + [z(t) - y^m(t)]^2 w_2(t) \} dt \quad (5)$$

ここで、 $w_1(t)$, $w_2(t)$ はそれぞれ $[g^m(t) - \bar{g}^m(t)]^2$, $[z(t) - y^m(t)]^2$ に対する重み係数であり、同定の目的によって適当に定められる (以下、「最適同定」とは上に定義されたものを示す)。

本同定法が (4) 式の評価関数をもつ同定の場合をも含むことは (5) 式から容易にわかる。また、本同定法による荷重関数の最適同定は 3. で後述するように同定されるシステムが線形で測定誤差が正規分布をなす場合、システムの荷重関数を推定理論を用いて同定したものと一致する。このように同定したものを「最適同定」と区別するために「最適推定」と呼ぶ。

次に、この最適同定は入力信号として線形自由系の出力を選ぶとき容易に求まることを示す。まず、入力信号 $u(t)$ を次のように選ぶ。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0} \quad (6)$$

$$u(t) = \mathbf{h}^T \mathbf{x}(t) \quad (7)$$

ここで、 $\mathbf{A}$ は $n \times n$ 行列、 $\dot{\mathbf{x}}(t)$, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{h}$ は n 次元ベクトルであり、 $(\mathbf{A}, \mathbf{h})$ は可観測であるとする。(6) 式、(7) 式から、

$$u(t) = \mathbf{h}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0 \quad (8)$$

となり、これを (1) 式に代入すると、

$$y^m(t) = \int_0^t \mathbf{x}_0^T e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{h} g^m(t-\tau) d\tau \quad (9)$$

となる。(9) 式から $g^m(t)$ と $y^m(t)$ は、

$$\dot{\mathbf{x}}'(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{x}'(t) + \mathbf{h} g^m(t), \quad \mathbf{x}'(0) = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$y^m(t) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{x}'(t) \quad (11)$$

ただし、 $\mathbf{x}'(t)$ は n 次元ベクトルなる関係式を持つことがわかる。したがって、 $y^m(t)$ は (10) 式、(11) 式で記述される系の入力 $g^m(t)$ である場合の出力である。以上を次の定理 (1) でま

とめる。

【定理 1】 「時刻零で零状態にあり、荷重関数 $g^m(t)$ をもつ線形系に、(8) 式で記述される入力 $u(t)$ が加えられた場合の観測出力 $z(t)$, $t \in [0, T]$ が与えられたとき、荷重関数の最適同定は、(10) 式、(11) 式で記述される系の (5) 式の評価関数を最小にする最適入力 $\hat{g}^m(t)$ である」。

【系 1】 「(10) 式、(11) 式の拘束の下で (5) 式を最小にする最適入力 $\hat{g}^m(t)$ は (12) 式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{g}^m(t) = & \bar{g}^m(t) - w_1^{-1}(t) h^T R(t) \hat{x}'(t) \\ & + w_1^{-1}(t) h^T \int_t^T \Phi(t, \tau) [x_0 w_2(\tau) z(\tau) \\ & - R(\tau) h \bar{g}^m(\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $R(t)$, $\Phi(t, \tau)$, $\hat{x}'(t)$ はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) = & -R(t) A^T - A R(t) + R(t) h w_1^{-1}(t) h^T R(t) \\ & - x_0 w_2(t) x_0^T, \quad R(T) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = & [R(t) h w_1^{-1}(t) h^T - A] \Phi(t, t_0), \\ \Phi(t_0, t_0) = & I_n \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、 I_n : n 次の単位行列

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}'(t) = & [A - h w_1^{-1}(t) h^T R(t)] \hat{x}'(t) \\ & + h \left\{ \bar{g}^m(t) + w_1^{-1}(t) h^T \int_t^T \Phi(t, \tau) [x_0 w_2(\tau) z(\tau) \right. \\ & \left. - R(\tau) h \bar{g}^m(\tau)] d\tau \right\}, \quad \hat{x}'(0) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

の解である (証明は付録 A 参照)。

3. $w_1(t)$, $w_2(t)$ に関する考察

前章の (5) 式における重み係数 $w_1(t)$, $w_2(t)$ は、一般に同定の目的に応じて適当に選ぶべきであるが、ここでは、推定論的立場から荷重関数を同定する場合にも、(5) 式と同じ評価関数が与えられることを示し、この場合の $w_1(t)$, $w_2(t)$ の意味について検討する。システムが線形で、荷重関数が $g(t)$ であり、その入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ が、

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) u(t-\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (1)'$$

を満足するとする。すなわち、時刻零で、同定されるシステムは零状態にあるとする。そして、観測出力 $z(t)$ は、

$$z(t) = y(t) + n(t)$$

で与えられるとする。ここで、 $n(t)$ は測定誤差であり、平均値が零である正規性確率変数であるとする。なお、その自己相関関数が (16) 式で与えられるとする。

$$E[n(t)n(\tau)] = r(t)\delta(t-\tau) \quad (16)$$

ただし、 $\delta(\cdot)$: デルタ関数

$z(t)$, $t \in [0, T]$ が測定されるとき、

$$Z_T \triangleq \{z(\tau); \tau \in [0, T]\} \quad (17)$$

とし、 $g(\tau)$ の Z_T に基づいた推定値を $\hat{g}(\tau)$ とすると、

$$E \left\{ \int_0^T [g(\tau) - \hat{g}(\tau)]^2 d\tau \right\} \quad (18)$$

を最小にする最適推定値 $\hat{g}_T^0(\tau)$ は、

$$\hat{g}_T^0(\tau) = E[g(\tau) | Z_T] \quad (19)$$

となる。また、 $g(\tau)$ の a priori な推定値を $\bar{g}(\tau)$ とし、

$$e(t) = g(t) - \bar{g}(t) \quad (20)$$

で与えられる $e(t)$ を平均値が零で、その自己相関関数が (21) 式のような正規性確率変数とする。

$$E[e(t)e(\tau)] = q(t)\delta(t-\tau) \quad (21)$$

すると、この場合、次の [定理 2] が成立する。

【定理 2】 「(19) 式で与えられる最適推定は、(1)' 式の拘束の下で、

$$\begin{aligned} J_c' = & \frac{1}{2} \int_0^T \{ q^{-1}(\tau) [g(\tau) - \bar{g}(\tau)]^2 \\ & + r^{-1}(\tau) [z(\tau) - y(\tau)]^2 \} d\tau \end{aligned} \quad (5)'$$

を最小にする $g(\tau)$ で与えられる (証明は付録 B 参照)。

したがって、[定義 1] と [定理 2] を比較すると、測定誤差 $n(t)$ の自己相関関数 (16) 式と、確率変数 $e(t)$ の自己相関関数 (21) 式が与えられたとき、2. で定義した荷重関数の最適同定は、 $w_1(t) = q^{-1}(t)$, $w_2(t) = r^{-1}(t)$ とすれば、(19) 式で与えられる最適推定と一致することがわかる。

4. 離散値系の場合

これまで述べてきた最適同定法の離散値系の場合を考える。サブスクリプト i を時刻 i の値とし、離散値系で作ったモデルの出力 y_i^m が、入力 u_i と (22) 式で関係づけられるとする。

$$y_i^m = \sum_{j=1}^i g_{j-1}^m u_{i-j}, \quad i=1, 2, \dots \quad (22)$$

すなわち、 $i=0$ でモデルが零状態にあるとする。このとき、離散値系の荷重系列の最適同定を次のように定義する。

【定義 2】 「系の出力 z_i , $i=1, 2, \dots, L$ が観測されたとき、離散値系の荷重系列 g_j^m , $j=0, 1, \dots, L-1$ の最適同定とは、(22) 式の拘束の下で、

$$J_D = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{L-1} (g_j^m - \bar{g}_j^m)^2 w_{1j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L (z_j - y_j^m)^2 w_{2j} \quad (23)$$

を最小にする g_j^m , $j=0, 1, \dots, L-1$ である。ここで、

$\bar{g}_j^m$ は a priori に考えられるモデルの荷重系列であり, w_{1j}, w_{2j} は同定の目的によって適当に定められる重み係数である。

しかるに, 入力信号 u_i として次の自由系の出力を選ぶ。

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_i, \quad \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0} \quad (24)$$

$$u_i = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_i \quad (25)$$

ここで, $\mathbf{F}$ は $n \times n$ 行列で, $\mathbf{x}_i, \mathbf{k}$ は n 次元ベクトルであり, $(\mathbf{F}, \mathbf{k})$ は可観測であるとする。すると u_i は,

$$u_i = \mathbf{k}^T \mathbf{F}^i \mathbf{x}_0 \quad (26)$$

となり, (22) 式は,

$$y_i^m = \sum_{j=1}^l \mathbf{x}_0^T (\mathbf{F}^T)^{j-1} \mathbf{k} g_{i-j}^m \quad (27)$$

となるから, (28) 式, (29) 式を得る。

$$\mathbf{x}_i' = \mathbf{F}^T \mathbf{x}_{i-1}' + \mathbf{k} g_{i-1}^m, \quad \mathbf{x}_0' = \mathbf{0} \quad (28)$$

$$y_i^m = \mathbf{x}_0'^T \mathbf{x}_i' \quad (29)$$

したがって, (28) 式, (29) 式の拘束の下で (23) 式を最小にする $\hat{g}_j^m$ が同定すべき系の荷重系列 g_j の最適同定である。この $\hat{g}_j^m$ を次の〔系 2〕で与える。

【系 2】 「系の観測出力 $z_i, i=1, 2, \dots, L$ が与えられたとき, 系の荷重系列 g_j の最適同定は, (30) 式のようになる²⁰⁾。

$$\begin{aligned} \hat{g}_j^m = & \bar{g}_j^m - w_{1j}^{-1} \mathbf{k}^T \mathbf{F}^{-1} [\mathbf{R}_j \hat{\mathbf{x}}_j' \\ & + \mathbf{x}_0' w_{2j} (z_j - \hat{\mathbf{x}}_0'^T \mathbf{x}_j') - b_j], \\ & j=0, 1, \dots, L-1 \end{aligned} \quad (30)$$

ただし, $\mathbf{R}_j, b_j$ は境界条件 (C-11) 式の下での, それぞれ (C-9) 式, (C-10) 式の解であり, また $\hat{\mathbf{x}}_j'$ は (C-13) 式の解である。(証明は付録 C 参照)。

次に, 評価関数 (23) 式における重み係数 w_{1j}, w_{2j} について検討する。

離散値系においても連続系と同様に, システムの出力 y_i と入力 u_i が (22)' 式で関係づけられるとし,

$$y_i = \sum_{j=1}^l g_{j-1} u_{i-j}, \quad i=1, 2, \dots \quad (22)'$$

出力の観測値 z_i は (31) 式で与えられたとする。

$$z_i = y_i + n_i, \quad i=1, 2, \dots \quad (31)$$

ここで, 観測誤差 n_i は平均値が零の正規性確率変数であり, その共分散が (32) 式で与えられるとする。

$$E(n_i n_j) = \gamma_i \delta_{ij}, \quad i, j=1, 2, \dots \quad (32)$$

ただし, δ_{ij} : クロネッカのデルタ

また, g_i の a priori な平均値を $\bar{g}_i$ とし,

$$e_i = g_i - \bar{g}_i \quad (33)$$

で与えられる e_i も平均値が零の正規性確率変数であり,

$$E(e_i e_j) = q_i \delta_{ij}, \quad i, j=0, 1, \dots, L-1 \quad (34)$$

$$E(n_i e_j) = 0, \quad i=1, 2, \dots, j=0, 1, \dots, L-1 \quad (35)$$

が成立するとする。すると,

$$J_D' = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{L-1} [(g_j - \bar{g}_j)^2 q_j^{-1} + (z_{j+1} - y_{j+1})^2 r_{j+1}^{-1}] \quad (23)'$$

を最小にする $\hat{g}_j$ は, (36) 式で与えられることが知られている。

$$\{\hat{g}_j\}_0^{L-1} = E[\{g_j\}_0^{L-1} | \{z_i\}_1^L, \{r_i\}_1^L, \{q_i\}_0^{L-1}] \quad (36)$$

したがって, 重み係数 w_{1i}, w_{2i} をそれぞれ, $w_{1i} = q_i^{-1}$, $w_{2i} = r_i^{-1}$ と選べば, 本同定法による荷重系列の最適同定は, (36) 式で与えられる最適推定と一致することがわかる。

5. 多変数系への拡張

これまで述べてきた手法は, 容易に多入力-多出力系へ拡張することができる。いま, m 入力- l 出力線形系を考え, 入力 $u(t)$ を m 次元ベクトル, モデルの出力 $y^m(t)$ を l 次元ベクトルとし, モデルの荷重関数行列 $\mathbf{G}^m(t)$ を $l \times m$ 行列とすると, 時刻零でモデルが零状態である場合, (37) 式が成立する。

$$\mathbf{y}^m(t) = \int_0^t \mathbf{G}^m(\tau) \mathbf{u}(t-\tau) d\tau \quad (37)$$

しかるに, 入力 $\mathbf{u}(t)$ として, 次のように線形自由系の出力を選ぶ。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0} \quad (6)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{H}: m \times n \text{ 行列} \quad (7)'$$

すると, $\mathbf{y}^m(t)$ は (38) 式のようになる。

$$\mathbf{y}^m(t) = \int_0^t \mathbf{M}(t-\tau) \mathbf{d}(\tau) d\tau \quad (38)$$

ここで, $\mathbf{M}(t)$ は $l \times (l \times m)$ 行列, $\mathbf{d}(\tau)$ は $(l \times m)$ 次元ベクトルであり,

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{H}^T & & & \\ & \mathbf{x}_0^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{H}^T & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \\ & & & & \mathbf{x}_0^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{H}^T \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\mathbf{d}^T(t) = [\mathbf{G}_1^{mT}(t), \mathbf{G}_2^{mT}(t), \dots, \mathbf{G}_l^{mT}(t)] \quad (40)$$

$$\mathbf{G}^{mT}(t) = [\mathbf{G}_1^m(t), \mathbf{G}_2^m(t), \dots, \mathbf{G}_l^m(t)] \quad (41)$$

である。(39) 式, (40) 式を用い, (38) 式を状態方程式で表わすと,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_S(t) = & \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & & & \\ & \mathbf{A}^T & & \\ & & 0 & \\ & & & \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \mathbf{x}_S(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & & & \\ & \mathbf{H}^T & & \\ & & 0 & \\ & & & \mathbf{H}^T \end{bmatrix} \mathbf{d}(t), \\ \mathbf{x}_S(0) = & \mathbf{0} \end{aligned} \quad (42)$$

$$y^m(t) = \begin{bmatrix} x_0^T & & \\ & x_0^T & 0 \\ & 0 & x_0^T \end{bmatrix} x_s(t) \quad (43)$$

となる。ここで、 $x_s(t)$ は $n \times l$ 次元状態ベクトルである。a priori に考えられるモデルの荷重関数行列が $\bar{G}^m(t)$ であるとし、システムの観測出力ベクトルを $z(t)$, $t \in [0, T]$ とすると、(42) 式、(43) 式の拘束の下に、

$$J_m = \frac{1}{2} \int_0^T [\|d(t) - \bar{d}(t)\|_{W_1(t)}^2 + \|z(t) - y^m(t)\|_{W_2(t)}^2] dt \quad (44)$$

を最小にする $d(t)$ に対応する $G^m(t)$ が荷重関数行列の最適同定である。ただし、 $\bar{d}(t)$ は、

$$\bar{d}^T(t) = [\bar{G}_1^m(t), \bar{G}_2^m(t), \dots, \bar{G}_l^m(t)]$$

であり、重み行列 $W_1(t)$, $W_2(t)$ はそれぞれ、 $(l \times m)$ 次および、 l 次の平方正定行列である。

6. 例 題

本報告で提案した最適同定法の実際的手法を、いくつかの例題を用いて説明する。よく知られているように^{(14), (15)}、(6) 式、(7) 式あるいは (24), (25) 式のような自由系の出力として与えられた $u(t)$, u_i を発生する等価なシステムは数多く存在する。それゆえ、ここでは、 (A, h) , (F, k) として observe canonical form をとるとする。すなわち、

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & & I_{n-1} \\ & \ddots & \\ -a_1 & -a_1 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \quad h^T = [0, 0, \dots, 0, 1] \quad (45)$$

$$F^T = \begin{bmatrix} 0 & & I_{n-1} \\ & \ddots & \\ -f_1 & -f_2 & \dots & -f_n \end{bmatrix} \quad k^T = [0, 0, \dots, 0, 1] \quad (45)'$$

とする。このとき、(10) 式および (28) 式で記述される系は、可制御のシステムであることがわかる。一般に、 $y^m(t)$ を与えるシステムは、可制御、可観測なものだけを考えればよいから、(46) 式、または (46') 式で表わされる伝達関数、

$$T_c(s) = \frac{x_{0n}s^{n-1} + \dots + x_{01}}{s^n + a_ns^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_1} \quad (46)$$

$$T_d(z^{-1}) = \frac{x_{0n}z^{-1} + \dots + x_{01}z^{-n}}{1 + f_nz^{-1} + \dots + f_1z^{-n}} \quad (46)'$$

の分母、分子が共通因数を持たないように x_0 を選ぶ。

ただし、 $x_0^T = [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}]$

【例題 1】 連続系

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t), & x(0) = 1 \\ u(t) = x(t) \end{cases} \quad (47)$$

で記述される $u(t)$ を伝達関数、

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad (48)$$

で与えられるシステムに加え、出力 $y(t)$ が雑音なしで測定されるとき、a priori なモデルの荷重関数 $\bar{g}^m(t) = 0$, $w_1(t) = w_1$, $w_2(t) = w_2$ なる定数で $T = \infty$ のときを考える。この場合、荷重関数の最適同定は、

$$\begin{cases} \dot{x}'(t) = -x'(t) + g^m(t), & x'(0) = 0 \\ y^m(t) = x'(t) \end{cases} \quad (49)$$

の拘束の下で、

$$J_c = \frac{1}{2} \int_0^\infty \{w_1 g^m(t) + w_2 [y(t) - y^m(t)]^2\} dt \quad (50)$$

を最小にする $g^m(t)$ である。 $w_2/w_1 = \mu$ とすると最適同定は、(12) 式から、

$$\hat{g}^m(t) = \frac{\mu}{\mu-3} e^{-2t} - \frac{3\mu}{(\mu-3)(1+\sqrt{1+\mu})} e^{-\sqrt{1+\mu}t} \quad (51)$$

$$; \mu \neq 3$$

$$= \frac{1}{4}(1+3)e^{-2t} \quad ; \mu = 3$$

となる。 $\mu \rightarrow \infty$ のとき、

$$\hat{g}^m(t) \rightarrow g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = e^{-2t}$$

となる。

【例題 2】 離散値系、

1 次の入力発生システム、

$$\begin{cases} x_i = -0.5 x_{i-1}, & x_0 = 1 \\ u_i = x_i \end{cases} \quad (52)$$

および 2 次の入力発生システム、

$$\begin{cases} x_i = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 0.85 \end{bmatrix} x_{i-1} & x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ u_i = [0 \quad 1] x_i \end{cases} \quad (53)$$

で記述される入力 u_i を荷重系列 g_i , $i=0, 1, \dots, 14$ ($g_i=0$, $i \geq 15$) を持つシステムにそれぞれ加えた場合を考える。出力 y_i が雑音 n_i によって汚されたもの z_i , $i=1, 2, \dots, 15$ が測定されたとし、 $\bar{g}_i^m=0$, $i=1, 2, \dots$, $w_{1i}=w_1$ (定数), $w_{2i}=w_2$ (定数), $\mu_0=w_2/w_1$ とする。また、測定雑音 n_i は平均値が零で分散が σ_n^2 である正規乱数とする。以上の条件の下で、同定すべきシステムの荷重関数 g_i と、 $\sigma_n^2=0.25 \times 10^{-4}$, $\mu_0=100$ の場合、1 次および 2 次の入力発生システムを用いたときの g_i の最適同定 $\hat{g}_i$ を Fig. 2 に比較し、また、このときの同定すべきシステムの真の出力 y_i と、最適モデルの出力 $\hat{y}_i$ を Fig. 3, Fig. 4 に比較する。Fig. 2~Fig. 4 で、 g_i および y_i の小さい値のところで同定誤差が大きいのは、評価関数における重

Fig. 2 Comparison of g_i and $\hat{g}_i$ ($\mu_0=100$, $\sigma_n^2=0.25 \times 10^{-4}$)

Fig. 3 Comparison of y_i and $\hat{y}_i$ ($\mu_0=100$, input: 1st order, $\sigma_n^2=0.25 \times 10^{-4}$)

Fig. 4 Comparison of y_i and $\hat{y}_i$ ($\mu_0=100$, input: 2nd order, $\sigma_n^2=0.25 \times 10^{-4}$)

Fig. 5 Effect of μ_0 on $\hat{g}_i$ evaluated by $\sum_{i=0}^{L-1} (g_i - \hat{g}_i)^2$ ($L=15$, $\sigma_n^2=10^{-4}$, 0.25×10^{-4})

$=0.25 \times 10^{-4}$ の場合は $\mu_0=10$ で、また $\sigma_n^2=10^{-4}$ の場合は $\mu_0=40$ でほぼ最少になっていることは、 $10^{-4}/0.25 \times 10^{-4}=40/10$ でみることから妥当な結果であると思われる²¹⁾。

7. 結 論

従来、荷重関数の同定問題では、モデルの出力と系の出力の差だけによって作られる汎関数を評価関数としたものが多かった。本報告では、モデルの a priori な仮定からのずれと、モデルの出力と系の出力の差の加重 2 乗積分を評価関数とした荷重関数の最適同定を定義し、この同定法の推定論的説明を与えた。

また、入力信号として、有限次元線形な自由系の出力を用いた場合の荷重関数の最適同定問題は、入出力追従最適制御問題になることを示し、単一入力-単一出力系に対してその具体的な解法を述べ、この手法が多入力-多出力系にも適用できることを示した。そして、例題の計算結果から、ここで提案した方法は、測

み係数 w_{1i} , w_{2i} を定数に選んだことに起因すると思われる。そして、入力発生システムの選択が同定結果に及ぼす影響は、本例題で用いた 1 次および 2 次の入力発生システムに対してはあまりみられない。また、本例題で用いた測定データの個数が比較的少なかったにもかかわらず ($L=15$) 同定結果はほぼ良好であることがわかる。次に、評価関数における重み係数の比 μ_0 が同定結果に与える影響を調べるために、 σ_n^2 が 0.25×10^{-4} および 10^{-4} の場合、いろいろの μ_0 の値に対して計算した $\sum_{i=0}^{L-1} (g_i - \hat{g}_i)^2$ の値を Fig. 5 に与える。これから、ある範囲内で、 μ_0 の影響はほとんどないことがわかる。また、 $\sum_{i=0}^{L-1} (g_i - \hat{g}_i)^2$ の値が σ_n^2

Fig. 6 Feedback system

定時間が短いにもかかわらずかなり精度の高い結果を与えることがわかった。

なお、ここで提案した方法を実際に応用する場合には、Fig. 6 に示されるように、既知のシステムと未知のシステムがフィードバックループの中で直列に結びつき、定常状態にあるときにはそのフィードバックループを切ることによって既知のシステムの出力を未知のシステムの入力とすることができる。しかし、このようにして入力を発生することができないとき、すなわち、定常状態にある既知のシステムが出力を出さないときには、簡単にシミュレートされた有限次元線形系の入力発生装置を用いなければならない。

例でも示したように、入力が同定結果の良し悪しに影響を与えると思われるが、どのような入力発生システムを選ぶべきかの問題、および本手法の非定常系の同定への拡張などの問題に対しては、今後の検討を要する。

最後に、本研究をするにあたり、計算でお手伝いいただいた千代田化工建設の加藤守氏に感謝致します。

参 考 文 献

- 1) M. Cuenob & A.P. Sage : Comparison of Some Methods Used for Process Identification, Survey Paper, IFAC Symp., Praha (1967)
- 2) P. Eykhoff : Process Parameters and States Estimation, Survey Paper, IFAC Symp., Praha (1967)
- 3) K.-J. Åström : System Identification, Survey Paper, IFAC Symp., Praha (1970)
- 4) 鈴木 : システムアイデンティフィケーション I~IV, 制御工学, 14-7~11 (1970)

- 5) 相良同定問題, 計測と制御, 8-4, 268/280 (1969)
- 6) L.S. Pontryagin et al. : The Mathematical Theory of Optimal Process, John Wiley (1962)
- 7) M. Athans : Optimal Control, An Introduction to The Theory and Its Application, McGraw-Hill (1966)
- 8) R. E. Kalman : Design of a Self-Optimizing Control System, Trans. ASME, J. of Basic Engineering, Vol. 80, 468/478 (1958)
- 9) K. Furuta & J.-C. Paquet : On Identification of Nonstationary Processes, IFAC Kyoto Symp., 497/502 (1970)
- 10) K. Furuta & J.-C. Paquet : On the Identification of Time Invariant Discrete Processes, IEEE, AC-15-1, 153/155 (1970)
- 11) A. V. Balakrishnan : Optimal Control Problem in Banach Spaces, SIAM, Control, 3-1, 152/180 (1965)
- 12) A. V. Balakrishnan : An Operator Theoretic Formulation of a Class of Control Problems and a Steepest Descent Method of Solution, SIAM, Control, 1-2, 109/107 (1963)
- 13) 青木 : 最適制御に関する研究, 東京工業大学博士論文 (1971)
- 14) R. E. Kalman : Mathematical Description of Linear Dynamical Systems, SIAM, Control, 1-2, 152/191 (1963)
- 15) D. C. Youla : The Synthesis of Linear Dynamical Systems from Prescribed Weighting Patterns, SIAM, J. of Applied Mathematics, Vol. 14, 527/549 (1966)
- 16) C. Bruni et al. : Order and Factorization of the Impulse Response Matrix, 19.4, IFAC Congress (1969)
- 17) 古田 : 可変交関数を用いた Process Identification, 計測と制御, 5-12, 867/874 (1966)
- 18) 茅 : プロセス動特性の統計的推定, 計測と制御, 6-4, 266/278 (1967)
- 19) H. C. Hsieh : The Least Squares Estimation of Linear and Nonlinear System Weighting Function Matrices, Information and Control, Vol. 7, 84/115 (1964)
- 20) A. E. Bryson & Y. C. Ho : Applied Optimal Control, Blaisdell (1969)
- 21) 河・古田 : 有限次元線形モデルを用いた最適同定法 (計測自動制御学会論文集投稿中)

□ 付

録 A □

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{x}'(t) + \mathbf{h} g^m(t), \quad \mathbf{x}'(0) = 0 \quad (10)$$

$$y^m(t) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{x}'(t) \quad (11)$$

の拘束の下で、評価関数、

$$J_c = \frac{1}{2} \int_0^T \{ [g^m(t) - \bar{g}^m(t)]^2 w_1(t) + [z(t) - y^m(t)]^2 w_2(t) \} dt \quad (5)$$

を最小にする $g^m(t)$ を $\hat{g}^m(t)$ とし、Hamiltonian H_c を、

$$H_c(t) = \frac{1}{2} \{ [g^m(t) - \bar{g}^m(t)]^2 w_1(t) + [z(t) - y^m(t)]^2 w_2(t) \} + \mathbf{P}^T(t) [\mathbf{A}^T \mathbf{x}'(t) + \mathbf{h} g^m(t)] \quad (\text{A} \cdot 1)$$

ただし, $\mathbf{p}(t)$: n 次元ラグランジュ乗数ベクトル
とし, $\mathbf{x}'(t)$ の最適推定値を $\hat{\mathbf{x}}'(t)$ とすると,

$$\mathbf{p}(t) = - \left(\frac{\partial H_c}{\partial \mathbf{x}'} \right)_{\mathbf{x}' = \hat{\mathbf{x}}'}^T, \quad \left(\frac{\partial H_c}{\partial \mathbf{g}^m} \right)_{\mathbf{g}^m = \hat{\mathbf{g}}^m} = 0 \quad (\text{A} \cdot 2)$$

と, (10) 式から次の式を得る.

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{x}_0 w_2(t) [\mathbf{x}_0^T \hat{\mathbf{x}}'(t) - \mathbf{z}(t)] - \mathbf{A} \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{p}(T) = \mathbf{0} \quad (\text{A} \cdot 3)$$

$$\dot{\mathbf{g}}^m(t) = \bar{\mathbf{g}}^m(t) - \mathbf{w}_1^{-1}(t) \mathbf{h}^T \mathbf{p}(t) \quad (\text{A} \cdot 4)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}'(t) = \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{x}}'(t) + \mathbf{h} [\bar{\mathbf{g}}^m(t) - \mathbf{w}_1^{-1}(t) \mathbf{h}^T \mathbf{p}(t)], \quad \hat{\mathbf{x}}'(0) = \mathbf{0} \quad (\text{A} \cdot 5)$$

しかるに, $\mathbf{R}(t)$ を $n \times n$ 対称正定行列とし, $\mathbf{b}(t)$ を n 次元ベクトルとすると,

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{R}(t) \hat{\mathbf{x}}'(t) - \mathbf{b}(t) \quad (\text{A} \cdot 6)$$

と記述できるから,

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) \hat{\mathbf{x}}'(t) + \mathbf{R}(t) \dot{\hat{\mathbf{x}}}'(t) - \dot{\mathbf{b}}(t) \quad (\text{A} \cdot 7)$$

となる. (A・6) 式, (A・7) 式を (A・3) 式, (A・5) 式に代入して得られる 2 つの式から, $\hat{\mathbf{x}}'(t)$ を消去することによって, (A・6) 式で定義された $\mathbf{R}(t)$ および $\mathbf{b}(t)$ は, それぞれ, (A・8) 式, (A・9) 式の微分方程式を満足することがわかる.

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = -\mathbf{R}(t) \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \mathbf{R}(t)$$

$$+\mathbf{R}(t) \mathbf{h} \mathbf{w}_1^{-1}(t) \mathbf{h}^T \mathbf{R}(t) - \mathbf{x}_0 w_2(t) \mathbf{x}_0^T \quad (\text{A} \cdot 8)$$

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = [\mathbf{R}(t) \mathbf{h} \mathbf{w}_1^{-1}(t) \mathbf{h}^T - \mathbf{A}] \mathbf{b}(t) + \mathbf{R}(t) \mathbf{h} \bar{\mathbf{g}}^m(t) - \mathbf{x}_0 w_2(t) \mathbf{z}(t) \quad (\text{A} \cdot 9)$$

ただし, 境界条件は (A・6) 式から, それぞれ,

$$\mathbf{R}(T) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}(T) = \mathbf{0} \quad (\text{A} \cdot 10)$$

となる. $\Phi(t, \tau)$ を $n \times n$ 行列とし,

$$-\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = [\mathbf{R}(t) \mathbf{h} \mathbf{w}_1^{-1}(t) \mathbf{h}^T - \mathbf{A}] \Phi(t, t_0) \quad (\text{A} \cdot 11)$$

$$\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}_n \quad (\text{A} \cdot 12)$$

を満たすものとする, (A・9) 式の一般解は,

$$\mathbf{b}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{b}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \times [\mathbf{R}(\tau) \mathbf{h} \bar{\mathbf{g}}^m(\tau) - \mathbf{x}_0 w_2(\tau) \mathbf{z}(\tau)] d\tau \quad (\text{A} \cdot 13)$$

となり, 境界条件 $\mathbf{b}(T) = \mathbf{0}$ を考慮すると $\mathbf{b}(t)$ は,

$$\mathbf{b}(t) = \int_t^T \Phi(t, \tau) \times [\mathbf{x}_0 w_2(\tau) \mathbf{z}(\tau) - \mathbf{R}(\tau) \mathbf{h} \bar{\mathbf{g}}^m(\tau)] d\tau \quad (\text{A} \cdot 14)$$

で与えられる. したがって, (A・4) 式に (A・6) 式と (A・14) 式を代入すると (12) 式を得る. また, (A・5) 式に (A・6) 式と (A・14) 式を代入すると (15) 式を得る.

□ 付 録 B □

$n(t)$, $e(t)$ が正規性確率変数のとき, (19) 式の $\hat{g}_T^0(\tau)$ は, (B・1) 式で表わされる $g(\tau)$ の条件付き確率密度関数,

$$p[g(\tau), 0 \leq \tau \leq T | Z_T] \quad (\text{B} \cdot 1)$$

を最大にする $g(\tau)$ であることが知られている. しかるに, (B・1) 式は,

$$p(dg_0, dg_1, \dots, dg_{N-1} | dz_0, dz_1, \dots, dz_{N-1}) \quad (\text{B} \cdot 2)$$

ただし,

$$dg_i \triangleq \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} g(t) dt, \quad dz_i \triangleq \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} z(t) dt \quad (i=0, 1, \dots, N-1) \quad (\text{B} \cdot 3)$$

$$N \triangleq \frac{T}{\Delta t} \quad (\text{B} \cdot 4)$$

の $\Delta t \rightarrow 0$ の極限と考えられるから, Bayes rule により,

$$p(dz_0, dz_1, \dots, dz_{N-1} | dg_0, dg_1, \dots, dg_{N-1}) p(dg_0, dg_1, \dots, dg_{N-1}) \quad (\text{B} \cdot 5)$$

を最大にする $dg_0, dg_1, \dots, dg_{N-1}$ が最適推定を与えることになる. $\Delta t \ll 1$ とすると,

$$E \left[\int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} n(t) dt \int_{j\Delta t}^{(j+1)\Delta t} n(t') dt' \right] = \delta_{ij} \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} r(t) dt = r(i\Delta t) \Delta t \delta_{ij} \quad (\text{B} \cdot 6)$$

となり, 同様に,

$$E \left[\int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} e(t) dt \int_{j\Delta t}^{(j+1)\Delta t} e(t') dt' \right] = q(i\Delta t) \Delta t \delta_{ij} \quad (\text{B} \cdot 7)$$

となるから,

$$p(dz_0, dz_1, \dots, dz_{N-1} | dg_0, dg_1, \dots, dg_{N-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \left\{ \prod_{i=0}^{N-1} [\gamma(i\Delta t) \Delta t] \right\}^{1/2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left[dz_i - \Delta t \int_0^{i\Delta t} g(\tau) u(i\Delta t - \tau) d\tau \right]^2 \frac{1}{\gamma(i\Delta t) \Delta t} \right\} \quad (\text{B} \cdot 8)$$

$$p(dg_0, dg_1, \dots, dg_{N-1}) = 1 / (2\pi)^{N/2} \left\{ \prod_{i=0}^{N-1} [q(i\Delta t) \Delta t] \right\}^{1/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (dg_i - d\bar{g}_i)^2 \frac{1}{q(i\Delta t) \Delta t} \right\} \quad (\text{B} \cdot 9)$$

ただし,

$$d\bar{g}_i = \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} \bar{g}(t) dt \quad (\text{B} \cdot 10)$$

を得る。したがって, (B・5) 式を最大にすることは,

$$J_d = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{q(i\Delta t) \Delta t} (dg_i - d\bar{g}_i)^2 + \frac{1}{\gamma(i\Delta t) \Delta t} \left[dz_i - \Delta t \int_0^{i\Delta t} g(\tau) u(i\Delta t - \tau) d\tau \right]^2 \right\} \quad (\text{B} \cdot 11)$$

を最小にすることと等価である。(B・11) 式において, $N\Delta t = T$, $i\Delta t = t$ とし, $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると (5') 式を得る。

□ 付 録 C □

$$\mathbf{x}_i' = \mathbf{F}^T \mathbf{x}_{i-1}' + \mathbf{k} g_{i-1}^m, \quad \mathbf{x}_0' = \mathbf{0} \quad (\text{28})$$

$$\mathbf{y}_i^m = \mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_i' \quad (\text{29})$$

の拘束の下で,

$$J_D = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{L-1} (g_j^m - \bar{g}_j^m)^2 w_{1j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L (z_j - y_j^m)^2 w_{2j} \quad (\text{23})$$

を最小にする g_j^m を $\hat{g}_j^m$ とし, J_D^* を,

$$J_D^* = J_D + \sum_{j=0}^{L-1} \mathbf{p}_{j+1}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{x}_j' + \mathbf{k} g_j^m - \mathbf{x}_{j+1}') \quad (\text{C} \cdot 1)$$

ただし, $\mathbf{p}_j$: n 次元ラグランジュ乗数ベクトルとすると, J_D^* は,

$$J_D^* = \frac{1}{2} (g_0^m - \bar{g}_0^m)^2 w_{10} + \mathbf{p}_1^T \mathbf{k} g_0^m + \frac{1}{2} (z_L - \mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_L')^2 w_{2L} - \mathbf{p}_L^T \mathbf{x}_L' + \sum_{j=1}^{L-1} (H_j - \mathbf{p}_j^T \mathbf{x}_j') \quad (\text{C} \cdot 2)$$

ただし,

$$H_j = \frac{1}{2} [(g_j^m - \bar{g}_j^m)^2 w_{1j} + (z_j - \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_j')^2 w_{2j} + \mathbf{p}_{j+1}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{x}_j' + \mathbf{k} g_j^m)] \quad (\text{C} \cdot 3)$$

($j=1, 2, \dots, L-1$)

となる。 $\mathbf{x}_j'$ の最適推定値を $\hat{\mathbf{x}}_j'$ とすると,

$$\left(\frac{\partial H_j}{\partial \mathbf{x}_j'} \right)_{\mathbf{x}_j' = \hat{\mathbf{x}}_j'} = \mathbf{p}_j^T, \quad \left(\frac{\partial H_j}{\partial g_j^m} \right)_{g_j^m = \hat{g}_j^m} = 0, \\ \left(\frac{\partial J_D^*}{\partial g_0^m} \right)_{g_0^m = \hat{g}_0^m} = 0, \quad \left(\frac{\partial J_D^*}{\partial \mathbf{x}_L'} \right)_{\mathbf{x}_L' = \hat{\mathbf{x}}_L'} = 0$$

および (28) 式から,

$$\mathbf{p}_j = -\mathbf{x}_0^T w_{2j} (z_j - \mathbf{x}_0^T \hat{\mathbf{x}}_j') + \mathbf{F} \mathbf{p}_{j+1}$$

$$(j=1, 2, \dots, L-1) \quad (\text{C} \cdot 4)$$

$$\hat{g}_j^m = \bar{g}_j^m - w_{1j}^{-1} \mathbf{k}^T \mathbf{p}_{j+1} \quad (j=0, 1, \dots, L-1) \quad (\text{C} \cdot 5)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{j+1}' = \mathbf{F}^T \hat{\mathbf{x}}_j' + \mathbf{k} (\bar{g}_j - w_{1j}^{-1} \mathbf{k}^T \mathbf{p}_{j+1}) \quad (\text{C} \cdot 6)$$

$$\mathbf{p}_L = w_{2L} (\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T \hat{\mathbf{x}}_L' - \mathbf{x}_0 z_L), \quad \hat{\mathbf{x}}_0' = \mathbf{0} \quad (\text{C} \cdot 7)$$

を得る。しかるに, $\mathbf{R}_j$ を n 次の対称正定行列, $\mathbf{b}_j$ を n 次元ベクトルとして,

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{R}_j \hat{\mathbf{x}}_j' - \mathbf{b}_j \quad (j=1, 2, \dots, L-1) \quad (\text{C} \cdot 8)$$

とおき, (C・4) 式, (C・6) 式, (C・8) 式から $\mathbf{p}_{j+1}$, $\mathbf{p}_j$, $\hat{\mathbf{x}}_{j+1}'$ を消去すると,

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{F} (\mathbf{R}_{j+1}^{-1} + w_{1j}^{-1} \mathbf{k} \mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{F}^T + w_{2j} \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T \quad (\text{C} \cdot 9)$$

$$\mathbf{b}_j = \mathbf{F} (\mathbf{I}_n + w_{1j}^{-1} \mathbf{R}_{j+1} \mathbf{k} \mathbf{k}^T)^{-1} (\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{R}_{j+1} \mathbf{k} \bar{g}_j^m) + w_{2j} \mathbf{x}_0 z_j \quad (\text{C} \cdot 10)$$

を得る。また, (C・7) 式, (C・8) 式から境界条件は,

$$\mathbf{R}_L = w_{2L} \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T, \quad \mathbf{b}_L = w_{2L} \mathbf{x}_0 z_L \quad (\text{C} \cdot 11)$$

となる。次に, (C・4) 式と (C・8) 式から $\mathbf{p}_{j+1}$ は,

$$\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{F}^{-1} [\mathbf{R}_j \hat{\mathbf{x}}_j' + \mathbf{x}_0 w_{2j} (z_j - \mathbf{x}_0^T \hat{\mathbf{x}}_j') - \mathbf{b}_j] \quad (\text{C} \cdot 12)$$

となり, これを (C・5), (C・6) 式に代入するとそれぞれ (30), (C・13) 式を得る。

$$\hat{\mathbf{x}}_{j+1}' = (\mathbf{F}^T - w_{1j}^{-1} \mathbf{k} \mathbf{k}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{R}_j + w_{1j}^{-1} w_{2j} \mathbf{k} \mathbf{k}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T) \hat{\mathbf{x}}_j' + \mathbf{k} \bar{g}_j^m - w_{1j}^{-1} \mathbf{k} \mathbf{k}^T \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{x}_0 w_{2j} z_j - \mathbf{b}_j), \quad \hat{\mathbf{x}}_0' = \mathbf{0} \quad (\text{C} \cdot 13)$$