非線形フィルタの近似と変換†

中 溝 高 好

防衛大学校機械工学教室 横須賀市走水 1-10-20

(昭和 46 年 6 月 24 日 受付)

Approximation and Interpretation of Optimal Nonlinear Filter

Takayoshi NAKAMIZO

(Department of Mechanical Engineering, Defense Academy, Yokosuka)

(Received June 24, 1971)

This paper gives a contribution to the physical interpretation of nonlinear filter obtained for continuous-time Markov processes governed by the stochastic (Ito) differential equations. Since the dynamical system for constructing the sample solution of stochastic differential equation is not physically available, results obtained for continuous-time Markov processes must be translated by known formula into results described by the ordinary differential equations. There is however a difficulty involved in such interpretation, since in most cases a truly optimal nonlinear filter is infinite dimensional. A method is presented here in this connection for finding the dynamical equation (in the ordinary sense) for the conditional probability density, from which a set of ordinary differential equations for conditional moments can be directly derived. The present nonlinear filter described by ordinary differential equations displays marked difference to the filter obtained by the finite dimensional approximation and the translation into a set of ordinary differential equations. Incidentally, the analysis shows that no serious problem is introduced whenever the linear observation scheme is available.

1. 緒 言

非線形力学系の状態推定問題（非線形フィルタリング問題）は Markov 過程の理論を基礎として、現在時刻までの観測値の集積のもとで状態のとり条件付確率密度の時間的進化を評価し、それを通して条件付積率の満足する（無限連立）確率微分方程式を導びくという手順によって解かれている^{1)~3)}。しかしながら実在の物理系は元来常微分方程式で記述されるものであるから、与えられた物理的問題を解くためには、それをいったん確率微分方程式で記述されるマルコフモデルに変換し、それに対して既存のフィルタ理論を適用しなければならない。いっぽう、最適非線形フィルタの動特性を与える積率（確率）微分方程式は一般に無限次元であるため、非線形フィルタの連続時間系による物理的構成にあたって次のような独立な 2 つの問題

が生起する

(a) 近似の問題 無限次元の確率微分方程式を、なんらかの方法によって有限次元の微分方程式で近似しなければならない。

(b) 変換の問題 確率微分方程式は物理的に実現不可能であるから、フィルタの構成のためには常微分方程式に変換しなければならない。

従来の非線形フィルタ理論では (a) の問題のみが強調され、近似と変換との関係については明確な議論がなされていない。すなわち、従来のフィルタ理論は Fig. 1 の右半分に示すように、物理系の動特性および観測過程はマルコフモデル①として確率微分方程式で記述されているところから出発している。もちろん、物理系からマルコフモデルを設定する問題は、常微分方程式を確率微分方程式へ変換する問題であり、これに対してはすでに一般的な変換公式^{9)~11)}が確立されているので問題はない。次に Markov 過程の理論を

† 第 2 回統計学的制御理論シンポジウムで発表 (昭 45・12)

Fig. 1

適用して、条件付確率密度が満たす確率微分方程式 (Kushner の方程式²⁾) ②を導びき、これを通して非線形フィルタの動特性を記述する無限連立確率微分方程式③がえられている。しかしこのままでは無限次元であるため非線形フィルタは物理的に実現不可能であるから、なんらかの有限近似がなされなければならないのである。事実、実用的な近似構成法を確立することが非線形フィルタ理論における重要な研究課題であり、これまでいくつかの試みが報告されてきたのである^{12)~17)}。このようにしてえられた有限次元での近似フィルタ方程式④を再び既知の変換公式によって常微分方程式に変換すれば、物理的に実現可能なフィルタがえられるから非線形フィルタの問題は確率微分方程式①に対して展開されておれば十分であると認められがちである。しかしながら上述のように、はじめに有限近似を行ない、その後で常微分方程式へ変換する手順すなわち ③→④→④' の手順は、変換を行なったのちに近似する手順 ③→③'→④' と同一結果に到達するとは限らないのである。一般に、いかなる近似法を用いてもなんらかの意味で高次の積率を省略せざるをえないから、近似のあとで変換する手順では、変換に及ぼす高次の積率の影響を無視していることとなる。この事実からみて、変換したあとで近似する手順のほう

が合理的であると考えられるのであるが、Fig. 1 における③から③'への変換は方程式が無次元であるため一般には計算不可能である。したがって連続時間系による物理的実現可能な非線形フィルタをうるためには、②から②'への変換を行なうことによって直接フィルタの動特性を常微分方程式で記述するのが最も望ましいのである。

ここでは、条件付確率密度が満たす確率微分方程式 (Kushner の方程式) を変換し、すなわち②→②'の変換を行ない、それを通して非線形フィルタの動特性を常微分方程式で記述する方法について述べる。次に近似と変換の手順前後による差異について検討し、特に観測機構が線形であれば、たとえ力学系の特性が非線形であって

も②→③→④→④'の手順と②→②'→③'→④'の手順による結果が一致することを示す。

2. フィルタ問題の設定とマルコフモデル

非線形力学系と観測機構の動特性がそれぞれ、

$$\frac{dx}{dt} = g(x, t) + G(x, t)\alpha(t) \quad (1)$$

$$z = \frac{dy}{dt} = h(x, t) + \beta(t) \quad (2)$$

のような常微分方程式で表わされるものとする。ここに $x(t)$ は n 次元状態ベクトル、 $y(t)$ (または $z(t)$) は m 次元観測値ベクトル ($m \leq n$) である。また $f(x, t)$, $h(x, t)$ はそれぞれ n 次元および m 次元ベクトル値関数、 $G(x, t)$ は $n \times r$ 行列関数であり、いずれも解の一意性、連続性等を保証する適当な条件はすべて満たされているものとする。さらに (1), (2) 式における $\alpha(t)$ および $\beta(t)$ はそれぞれ r 次元および m 次元の正規性広帯域雑音ベクトル¹¹⁾ (物理的には白色雑音とみなせる) であり、その相関行列は次のように与えられるものとする。

$$E[\alpha(t)\alpha'(s)] = \phi_{\alpha\alpha}(t-s) \quad (3)$$

$$E[\beta(t)\beta'(s)] = \phi_{\beta\beta}(t-s) \quad (4)$$

$$E[\alpha(t)\beta'(s)] = 0$$

ただし $E[\cdot]$ は数学的平均を、' は転置を表わす記

号である。また (3), (4) の相関行列は簡単のため,

$$\int_0^\infty \phi_{aa}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 \phi_{aa}(\tau) d\tau = \frac{1}{2} D \quad (5)$$

$$\int_0^\infty \phi_{\beta\beta}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 \phi_{\beta\beta}(\tau) d\tau = \frac{1}{2} R \quad (6)$$

のような対称性をもつものと仮定する。ここに D は $r \times r$ 非負定行列, R は $m \times m$ 正定行列である。

いま, 次のような性質をもつ Brown 運動過程 $\{w(t)\}$ を導入する。

$$E[w(t)] = 0, \quad E[dw(t)dw'(t)] = D dt \quad (7)$$

このとき, (1) 式は確率微分方程式,

$$dx = f(x, t) dt + G(x, t) dw(t) \quad (8)$$

で記述されるマルコフモデルと等価である¹¹⁾。ただし上式における $f(x, t)$ は,

$$f_i(x, t) = g_i(x, t) + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^n B_{kj} G_{lk}(x, t) \frac{\partial G_{ij}(x, t)}{\partial x_l} \quad (9)$$

を成分とする n 次元ベクトル値関数である。ここに,

$$B_{kj} = \int_0^\infty E[\alpha_k(t) \alpha_j(t+\tau)] d\tau \quad (10)$$

である。いっぽう, (5) 式の仮定から $B = (B_{ij})$ は対称行列であるから (9) 式は,

$$f_i(x, t) = g_i(x, t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^n D_{kj} G_{lk}(x, t) \frac{\partial G_{ij}(x, t)}{\partial x_l} \quad (11)$$

と表わせる^{*1}。

同様に, (2) 式の観測過程は,

$$E[v(t)] = 0, \quad E[dv(t)dv'(t)] = R dt$$

のような性質をもつ Brown 運動過程 $\{v(t)\}$ を導入すれば,

$$dy = h(x, t) dt + dv(t) \quad (12)$$

と等価である。

このようにして, (1), (2) 式で与えられた推定問題は力学系と観測機構がそれぞれ,

$$dx = f(x, t) dt + G(x, t) dw(t) \quad (13)$$

$$dy = h(x, t) dt + dv(t) \quad (14)$$

のような確率微分方程式で記述される場合の推定問題に変換されたことになる。

ここで考える推定問題とは $[t_0, t]$ にわたる観測値がえられたとき, 状態 $x(t)$ の最小分散推定値を求めることがある。(13), (14) 式のような確率微分方程式に対する推定問題は Kushner^{2), 3)}, Bucy⁴⁾ によって完全な定式化がなされている。すなわち, 観測値 $y(\tau)$ ($t_0 \leq \tau \leq t$) の最小 σ 集合体を Q_t と表わし, 条件付

確率密度 $p(x, t|Q_t)$ を記述の簡単のため $p(x, t|t)$ と書くとき,

$$dp(x, t|t) = L^* p(x, t|t) dt + dq(x, t|t) \quad (15)$$

のような確率微分方程式えられることはよく知られている。ただし上式で,

$$L^* p = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f(x, t) p(x, t|t) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)' \times G(x, t) D G'(x, t) p(x, t|t) \right] \quad (16)$$

$$dq = \{h(x, t) - \hat{h}(x, t)\}' R^{-1} \{dy - \hat{h}(x, t) dt\} p(x, t|t) \quad (17)$$

である。また $\hat{h}(x, t) = E^t[h(x, t)] = E[h(x, t)|Q_t]$ である。

3. 条件付確率密度が満たす偏微分方程式

非線形力学系と観測機構の動特性が (1), (2) 式のような常微分方程式で与えられているものとする。このとき条件付確率密度 $p(x, t|t)$ は,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left[\frac{\partial p(x, \tau|t)}{\partial \tau} \right]_{\tau=t} + \left[\frac{\partial p(x, \tau|t)}{\partial t} \right]_{\tau=t} \quad (18)$$

すなわち,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = L^* p + \frac{\partial q}{\partial t} \quad (19)$$

を満足することが示せる。ただし上式において,

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} = & \{(h_t - \hat{h}_t)' R^{-1} (z - \hat{h}_t) \\ & - \frac{1}{2} (h_t - \hat{h}_t)' R^{-1} (h_t - \hat{h}_t) + \frac{1}{2} \text{tr}(H_t R^{-1})\} p \end{aligned} \quad (20)$$

である。ここで,

$$h_t = h(x, t), \quad \hat{h}_t = E^t[h(x, t)]$$

$$H_t = E^t[(h_t - \hat{h}_t)(h_t - \hat{h}_t)']$$

と表わした。また,

$$K_t \equiv h_t' R^{-1} z - \frac{1}{2} h_t' R^{-1} h_t \quad (21)$$

とおくと (20) 式は,

$$\frac{\partial q}{\partial t} = (K_t - \hat{K}_t) p \quad (22)$$

と書くこともできる。すなわち $p(x, t|t)$ は,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = L^* p + (K_t - \hat{K}_t) p \quad (23)$$

のような偏微分方程式を満足する。特別な場合として $f(x, t)$ および $h(x, t)$ がいずれも x について線形であり, かつ $G(x, t)$ が x に無関係であれば (23) 式は Kulman¹⁸⁾ および Ariaratnam & Loh¹⁹⁾ らの結果に帰着する。

上述の結果は, 原理的には Kushner の方程式 (15) を変換することによってえられるはずであるが, (17)

*1 これは Stratonovich の結果²⁰⁾ を用いて導びくことができる。誘導の過程およびマルコフモデルの意味については文献 (11) に詳述されている。

式から明らかなように既知の変換公式を直接適用することはできないので、確率積分の定義にさかのぼって導出しなければならない。その過程はやや長くなるので詳細は付録に示した。

4. 常微分方程式によるフィルタの表示

条件付積率の満たす常微分方程式は (19) 式を用いて容易に導びくことができる。(19) 式の両辺に x をかけて積分することによって、

$$\hat{x}(t|t) = E^t[x(t)]$$

が満足する常微分方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= \hat{f}_t + (\widehat{xh_t'} - \widehat{\hat{x}\hat{h}_t'}) R^{-1}(z - \hat{h}_t) \\ &\quad - \frac{1}{2} E^t[(x - \hat{x}) \cdot (h_t - \hat{h}_t)' R^{-1}(h_t - \hat{h}_t)] \quad (24) \end{aligned}$$

となる。ここで記号 $\hat{\cdot}$ は条件付平均 $E^t[\cdot]$ を表わす。同様に高次の条件付積率、

$$m_{ij} \cdots l(t|t) = E^t[(x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_j) \cdots (x_l - \hat{x}_l)]$$

に関する常微分方程式は、

$$\begin{cases} \frac{dm_{ij}}{dt} = \widehat{\theta_{ij}f_j} + \widehat{\theta_{ij}f_j} + (\widehat{GDG'})_{ij} + \widehat{\theta_{ij}h_t'} R^{-1}(z - \hat{h}_t) \\ \quad - \frac{1}{2} E^t[\theta_{ij}(h_t - \hat{h}_t)' R^{-1}(h_t - \hat{h}_t)] \\ \frac{dm_{ijk}}{dt} = \widehat{\theta_{ijk}f_k} + \widehat{\theta_{ijk}f_j} + \widehat{\theta_{ijk}f_i} + E_i[\theta_i(GDG')_{jk} \\ \quad + \theta_j(GDG')_{ik} + \theta_k(GDG')_{ij}] \\ \quad + \widehat{\theta_{ijk}h_t'} R^{-1}(z - \hat{h}_t) \\ \quad - \frac{1}{2} E^t[\theta_{ijk}(h_t - \hat{h}_t)' R^{-1}(h_t - \hat{h}_t)] \\ \vdots \end{cases} \quad (25)$$

のようになる ($i, j, k=1, 2, \dots, n$)。ただし上式において

$$\begin{cases} \theta_i = x_i - \hat{x}_i \\ \theta_{ij} = (x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_j) - m_{ij} \\ \theta_{ijk} = (x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_j)(x_k - \hat{x}_k) - (x_i - \hat{x}_i)m_{jk} \\ \quad - (x_j - \hat{x}_j)m_{ik} - (x_k - \hat{x}_k)m_{ij} - m_{ijk} \\ \vdots \end{cases} \quad (26)$$

である。(24), (25) 式は最適非線形フィルタの常微分方程式による一般的な表示式である。

5. 近似と変換に関する考察

以下では記号のはん雑さをさけるためスカラー系について考察を進める*2。すなわち(1), (2)式における各変数は同じ記号を用いるがすべてスカラー量である。

このとき、条件付積率が満たす常微分方程式すなわちフィルタ方程式は (24), (25) 式からただちに、

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{f}_t - \frac{1}{2R} E^t[\theta_1(h_t - \hat{h}_t)^2] + \frac{1}{R} \widehat{\theta_1 h_t}(z - \hat{h}_t) \\ \frac{dm_k}{dt} = k \widehat{\theta_{k-1} f_t} + k(k-1) m_{k-2} \widehat{\theta_1 f_t} \\ \quad + \frac{1}{2} k(k-1) E^t[(x - \hat{x})^{k-2} G^2 D] \\ \quad - \frac{1}{2R} E^t[\theta_k(h_t - \hat{h}_t)^2] + \frac{1}{R} \widehat{\theta_k h_t}(z - \hat{h}_t) \\ k=2, 3, \dots \end{cases} \quad (27)$$

となる。ここに m_k, θ_k はそれぞれ、

$$m_0 = m_1 = 0, \quad m_k \equiv E^t[(x - \hat{x})^k] \quad (k \geq 2) \quad (28)$$

$$\theta_k \equiv (x - \hat{x})^k - m_k - k(x - \hat{x})m_{k-1} \quad (29)$$

のように定義された量である。

比較のため従来のフィルタ理論を用いて非線形フィルタの動特性を導びいておこう。力学系および観測機構は 2. に述べたように、

$$dx = f(x, t) dt + G(x, t) dw$$

$$dy = h(x, t) dt + dv$$

で記述されるマルコフモデルに変換できるから、これに基づく非線形フィルタの動特性は、(15) 式を用いて、

$$\begin{cases} d\hat{x} = \hat{f}_t dt + \frac{1}{R} \widehat{\theta_1 h}(dy - \hat{h}_t dt) \\ dm_k = \left\{ k \widehat{\theta_{k-1} f_t} + k(k-1) m_{k-2} \widehat{\theta_1 f_t} \right. \\ \quad + \frac{1}{2} k(k-1) E^t[(x - \hat{x})^{k-2} G^2 D] - \frac{k - \delta_{2k}}{R} \\ \quad \times (\widehat{\theta_{k-1} h_t})(\widehat{\theta_1 h_t}) - \frac{1}{2R} k(k-1) m_{k-2} (\widehat{\theta_1 h_t})^2 \Big\} dt \\ \quad + \frac{1}{R} \widehat{\theta_k h_t}(dy - \hat{h}_t dt) \quad k=2, 3, \dots \end{cases} \quad (30)$$

のような確率微分方程式で記述できる (文献 (12) の付録参照)。ただし上式において δ_{2k} はクロネッカのデルタである。(30) 式は一般に無限次元ではあるが、既知の変換公式を用いて形式的に常微分方程式に書き換えることができる*3。いま記述の便宜上、

$$F_k = \widehat{\theta_k h_t}$$

とおくと (30) 式と等価な常微分方程式は、

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{f}_t - \frac{1}{2R} \left(F_1 \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}} + \sum_{i=2}^{\infty} F_i \frac{\partial F_i}{\partial m_i} \right) + \frac{1}{R} F_1(z - \hat{h}_t) \\ \frac{dm_k}{dt} = k \widehat{\theta_{k-1} f_t} + k(k-1) m_{k-2} \widehat{\theta_1 f_t} + \frac{1}{2} k(k-1) \\ \quad \times E^t[(x - \hat{x})^{k-2} G^2 D] - \frac{k - \delta_{2k}}{R} F_{k-1} F_1 \\ \quad - \frac{1}{2R} k(k-1) m_{k-2} F_1^2 - \frac{1}{2R} \left(F_1 \frac{\partial F_k}{\partial \hat{x}} \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\partial F_k}{\partial m_i} F_i \right) + \frac{1}{R} F_k(z - \hat{h}_t) \quad k=2, 3, \dots \end{cases} \quad (31)$$

*2 一般のベクトル表示系に対しても同様な考察ができる。

*3 Fig. 1 における ③ → ③' への変換を意味する。

のようになる。しかしながら上式右辺には無限項が現われるから一般にこの計算は不可能である。

以下 (27) 式の表示と (31) 式の表示との関係を検討するさいに便利のように、両式の共通部分を、

$$Q_k \equiv k \widehat{\theta_{k-1} f_t} + k(k-1) m_{k-2} \widehat{\theta_1 f_t} + \frac{1}{2} k(k-1) E^t[(x-\hat{x})^{k-2} G^2 D] + \frac{1}{R} \widehat{\theta_k h_t}(z-\hat{h}_t)$$

とおく。このとき Kushner の方程式の変換を通してえられるフィルタ方程式、すなわち (27) 式は、

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = Q_1 - \frac{1}{2R} E^t[\theta_1(h_t - \hat{h}_t)^2] \\ \frac{dm_k}{dt} = Q_k - \frac{1}{2R} E^t[\theta_k(h_t - \hat{h}_t)^2] \quad k=2, 3, \dots \end{cases} \quad (32)$$

と書ける。また一方、積率（確率）微分方程式を直接形式的に変換してえられるフィルタ方程式、すなわち (31) 式は、

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = Q_1 - \frac{1}{2R} \left(F_1 \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}} + \sum_{i=2}^{\infty} F_i \frac{\partial F_i}{\partial m_i} \right) \\ \frac{dm_k}{dt} = Q_k - \frac{1}{2R} \left(F_1 \frac{\partial F_k}{\partial \hat{x}} + \sum_{i=2}^{\infty} F_i \frac{\partial F_k}{\partial m_i} \right) \\ - \frac{k - \delta_{2k}}{R} F_{k-1} F_1 - \frac{1}{2R} k(k-1) m_{k-2} F_1^2 \quad k=2, 3, \dots \end{cases} \quad (33)$$

のように書ける。

5.1 観測機構が線形である場合

特別な場合として、観測機構が線形、すなわち、

$$h(x, t) = ax$$

である場合には (32) と (33) 式が完全に一致すること示すことができる。

まず $h(x, t) = ax$ であるから、

$$F_k = \widehat{\theta_k h_t} = a(m_{k+1} - k m_2 m_{k-1}) \quad (34)$$

である。したがって、

$$\sum_{i=2}^{\infty} F_i \frac{\partial F_k}{\partial m_i} = a^2 \{ F_{k+1} - (1 - \delta_{2k}) k m_2 F_{k-1} - k m_{k-1} F_2 \} \quad (35)$$

となるから、(33) 式は、

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = Q_1 - \frac{1}{2R} F_2 \\ \frac{dm_k}{dt} = Q_k - \frac{k - \delta_{2k}}{R} F_{k-1} F_1 - \frac{1}{2R} k(k-1) m_{k-2} F_1^2 \\ - \frac{a^2}{2R} \{ F_{k+1} - (1 - \delta_{2k}) k m_2 F_{k-1} - k m_{k-1} F_2 \} \end{cases} \quad (36)$$

のように書ける。さらに (34) 式を代入して整理すると、

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = Q_1 - \frac{1}{2R} E^t[\theta_1(ax - a\hat{x})^2] \\ \frac{dm_k}{dt} = Q_k - \frac{1}{2R} E^t[\theta_k(ax - a\hat{x})^2] \end{cases} \quad (37)$$

となって (32) 式と一致することがわかる。すなわち観測機構が線形である場合には、たとえ力学系の特性が非線形であっても近似と変換の手順の前後には無関係であることを示している。したがって $h(x, t)$ が x について線形であれば、従来のフィルタ理論によってえられる無限次元の確率微分方程式をなんらかの方法で有限近似を行ない、しかるのちに既知の変換公式を用いて常微分方程式に変換してもさしつかえないのである。しかしながら $h(x, t)$ が x について非線形である場合にはこの事情が異なってくる。これについて次節で考える。

5.2 観測機構が非線形である場合

観測機構が非線形であれば、一般に (32) と (33) 式が一致しないことはすでに明らかであるが、ここでは、Taylor 級数による近似法^{13), 14)}を例にとり、高次積率が変換に及ぼす影響について調べることにする。

観測機構の特性 $h(x, t)$ を $\hat{x}$ のまわりに Taylor 展開すると、

$$h(x, t) = h(\hat{x}, t) + h_x(\hat{x}, t)(x - \hat{x}) + \frac{1}{2} h_{xx}(\hat{x}, t)(x - \hat{x})^2 + \dots \quad (38)$$

となる。ここに添字 x は偏微分を表わす。ここで $h(x, t)$ は十分なめらかであるとして3次以上の積率を省略すると、

$$E^t[\theta_1(h_t - \hat{h}_t)^2] = -m_2^2 h_x(\hat{x}, t) h_{xx}(\hat{x}, t)$$

$$E^t[\theta_2(h_t - \hat{h}_t)^2] = -m_2^2 h_{xx}^2(\hat{x}, t) \frac{1}{2} + m_2^3 h_{xxx}^2(\hat{x}, t)$$

であるから、フィルタ方程式 (32) 式は、

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = Q_1 + \frac{1}{2R} m_2^2 h_x(\hat{x}, t) h_{xx}(\hat{x}, t) \\ \frac{dm_2}{dt} = Q_2 + \frac{1}{2R} m_2^2 h_{xx}^2(\hat{x}, t) - \frac{1}{4R} m_2^3 h_{xxx}^2(\hat{x}, t) \end{cases} \quad (39)$$

となる。これが Taylor 級数近似法を用いた場合のフィルタを記述する常微分方程式である。

これに対して (33) 式は、

$$\begin{aligned} F_1 &= \widehat{\theta_1 h_t} = m_2 h_x(\hat{x}, t) \\ F_2 &= \widehat{\theta_2 h_t} = -\frac{1}{2} m_2^2 h_{xx}(\hat{x}, t) \end{aligned}$$

であることを考慮すれば、

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = Q_1 - \frac{1}{4R} m_2^2 h_x(\hat{x}, t) h_{xx}(\hat{x}, t) \\ \frac{dm_2}{dt} = Q_2 + \frac{1}{2R} m_2^2 h_x(\hat{x}, t) h_{xx}(\hat{x}, t) \end{cases}$$

$$\left| \begin{aligned} & -\frac{1}{R} m_2^2 h_x^2(\hat{x}, t) \\ & \end{aligned} \right. \quad (40)$$

となる。明らかに上式は (39) 式と一致していない。これは (40) 式が近似→変換の手順で導びかれたものであり、変換に及ぼす 3 次以上の積率の影響が無視されているからである。事実、(38) 式を有限項で打ち切り現われる全ての積率を考慮して変換し、そのあとで 3 次以上の積率を省略すれば (39) 式と一致することを示すことができる。たとえば (38) 式を $(x-\hat{x})^2$ の項までとり全ての積率をひろうと F_i は、

$$F_1 = m_2 h_x(\hat{x}, t) + \frac{1}{2} m_3 h_{xx}(\hat{x}, t)$$

$$F_2 = m_3 h_x(\hat{x}, t) + \frac{1}{2} (m_4 - m_2^2) h_{xx}(\hat{x}, t)$$

$$F_3 = (m_4 - 3m_2^2) h_x(\hat{x}, t) + \frac{1}{2} (m_5 - 4m_2 m_3) h_{xx}(\hat{x}, t)$$

⋮

ようになる。したがって (33) 式は、

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= Q_1 - \frac{1}{2R} \left\{ m_2^2 h_x(\hat{x}, t) h_{xx}(\hat{x}, t) \right. \\ &+ \frac{1}{2} m_2 m_3 h_{xx}^2(\hat{x}, t) + m_3 h_x^2(\hat{x}, t) \\ &+ (m_4 - 2m_2^2) h_x(\hat{x}, t) h_{xx}(\hat{x}, t) \\ &\left. + \frac{1}{2} (m_5 - 4m_2 m_3) h_{xx}^2(\hat{x}, t) \right\} \\ \frac{dm_2}{dt} &= Q_2 - \frac{1}{2R} \left\{ \frac{1}{2} m_3^2 h_{xx}^2(\hat{x}, t) \right. \\ &- \frac{1}{2} m_2 (m_4 - m_2^2) h_{xx}^2(\hat{x}, t) \\ &+ (m_4 - 3m_2^2) h_x^2(\hat{x}, t) \\ &+ \frac{1}{2} (m_5 - 4m_2 m_3) h_x(\hat{x}, t) h_{xx}(\hat{x}, t) \\ &+ \frac{1}{4} (m_6 - 4m_3^2 - m_2 m_4) h_{xx}^2(\hat{x}, t) \left. \right\} \\ &- \frac{1}{R} \left\{ m_2^2 h_x^2(\hat{x}, t) + \frac{1}{4} m_3^2 h_{xx}^2(\hat{x}, t) \right. \\ &\left. + m_2 m_3 h_x(\hat{x}, t) h_{xx}(\hat{x}, t) \right\} \end{aligned} \right. \quad (41)$$

となる。ここで $m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = 0$ とおくと (39) 式と一致する。

6. 結 言

非線形フィルタ理論によれば、理論的に最適なフィルタは無限次元の確率微分方程式で記述される。したがって非線形フィルタの物理的構成にあたって、

(a) 有限次元での近似

(b) 常微分方程式への変換

という 2 つの問題が生起する。確率微分方程式に支配される Markov 過程と常微分方程式で支配される実

際の過程との関係はすでに明確な対応づけがなされているため、有限次元での近似については多くの報告があるが、近似と変換の相互関係についてはあまり明確な議論がなされていない。ここでは非線形フィルタの連続時間系による物理的構成をうるために、フィルタ動特性の常微分方程式による一般的な表示を与えた。次に近似と変換との関係について検討し、特別な場合として観測機構が線形でありさえすればたとえ力学系の動特性が非線形であっても近似と変換の順序には無関係であることを明らかにした。したがって線形フィルタ理論においては、ここで述べたような問題は生じないのである。

参 考 文 献

- 1) H. J. Kushner : On the Dynamical Equations of Conditional Probability Density Functions, With Applications to Optimal Control Theory, J. Math. Anal. and Appl., 8, 332/344 (1964)
- 2) H. J. Kushner : On the Differential Equations Satisfied by Conditional Probability Densities of Markov Processes, With Applications, SIAM J. Control, 2, 106/119 (1964)
- 3) H. J. Kushner : Dynamical Equations for Optimum Nonlinear Filtering, J. Differential Equations, 3, 179/190 (1967)
- 4) R. S. Bucy : Nonlinear Filtering Theory, IEEE Trans., AC-10, 198 (1965)
- 5) R. S. Bucy and P. D. Joseph : Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance, Interscience Publishers, New York (1968)
- 6) J. R. Fisher : Optimal Nonlinear Filtering, Advances in Control Systems, 5, 198/300 (1967)
- 7) A. H. Jazwinski : Stochastic Processes and Filtering Theory Academic Press, New York (1970)
- 8) A. P. Sage and J. L. Melsa : Estimation Theory with Applications to Communications and Control, Mc Graw-Hill (1971)
- 9) R. L. Stratonovich : Topics in the Theory of Random Noise, Vol. 1, Gordon and Breach, ch. 4 (1963)
- 10) E. Wong and M. Zakai : On the Relation between Ordinary and Stochastic Differential Equations, Proc. of Third Congr. IFAC, London (1966)
- 11) 中 溝 : 連続制御理論における確率過程のモデルに関する二三の考察, 制御工学, 14, 166/176 (1970)
- 12) H. J. Kushner : Approximation to Optimal Nonlinear Filters, IEEE Trans., AC-12, 546/556 (1967)
- 13) R. W. Bass, V. D. Norum and L. Schwarz : Optimal Multichannel Nonlinear Filtering, J. Math. Anal. and Appl., 16, 152/164 (1966)
- 14) A. H. Jazwinski : Filtering for Nonlinear Dynamical Systems, IEEE Trans., AC-11, 765/766 (1966)
- 15) 砂 原 : マルコフ等価線形化法による非線形系の状態推定, 制御工学, 13, 546/556 (1969)
- 16) T. Nakamizo : On the State Estimation for Nonlinear Dynamic Systems, Int. J. Control, 11, 683/695 (1970)
- 17) L. Schwartz and E. B. Steer : A Computational Comparison of Several Nonlinear Filters, IEEE Trans., AC-13, 83/86 (1968)
- 18) N. K. Kulman : A Note on the Differential Equations of Conditional Probability Density Functions, J. Math. Anal. and Appl., 14, 301/308 (1966)
- 19) S. T. Ariaratnam and H. K. Loh : Optimal Control and Filtering Linear Stochastic Systems, Int. J. Control, 7, 433/445 (1968)
- 20) R. L. Stratonovich : A New Representation for Stochastic Integrals and Equations, SIAM J. Control, 4, 362/368 (1966)

□ 付 録 □

微小時間々隔を δt とするとき、

$$\begin{aligned}\delta p &= p(x, t + \delta t | t + \delta t) - p(x, t | t) \\ &= p(x, t + \delta t | t + \delta t) - p(x, t | t + \delta t) \\ &\quad + p(x, t | t + \delta t) - p(x, t | t) \\ &\equiv \delta \tilde{p} + \delta q\end{aligned}\quad (\text{A} \cdot 1)$$

と書ける。Kushner²⁾によれば、(13), (14) 式で表わされるマルコフモデルに対して、

$$\begin{aligned}\delta q &= p(x, t | t + \delta t) - p(x, t | t) \\ &= (h_t - \hat{h}_t)' R^{-1} (\delta y - \hat{h}_t \delta t) p(x, t | t)\end{aligned}\quad (\text{A} \cdot 2)_1$$

である。極限において、

$$dq = (h_t - \hat{h}_t)' R^{-1} (dy - \hat{h}_t dt) p(x, t | t) \quad (\text{A} \cdot 2)_2$$

と書ける。これが (17) 式である。上式は Ito 形の確率微分方程式であるから、まずこれを Stratonovich 形の確率微分方程式に変換することを考える。

記述の簡単のため (A・2) 式を、

$$dq_t = F'(p_t, t) d\gamma_t \quad (\text{A} \cdot 3)$$

と書く。ここにそれぞれ

$$\begin{aligned}q_t &\equiv q(x, t | t), \quad p_t \equiv p(x, t | t) \\ F(p_t, t) &\equiv R^{-1} (h_t - \hat{h}_t) p_t \\ d\gamma_t &\equiv dy - \hat{h}_t dt\end{aligned}$$

である。(A・3) 式は厳密には積分形式で、

$$q_t = q_{t_0} + \int_{t_0}^t F'(p_\tau, \tau) d\gamma_\tau = q_{t_0} + I(t) \quad (\text{A} \cdot 4)$$

と書かれる。ただし上式における積分、

$$I(t) = \int_{t_0}^t F'(p_\tau, \tau) d\gamma_\tau \quad (\text{A} \cdot 5)$$

は Ito の意味の確率積分である。

ここで (A・5) 式と同形の Stratonovich の意味での積分、

$$J(t) = \int_{t_0}^t F'(p_\tau, \tau) d\gamma_\tau \quad (\text{A} \cdot 6)$$

について考察する。 $[t_0, t]$ を Δ 分割⁴⁾ すれば定義²⁰⁾ から、

$$\begin{aligned}J(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_i F'\left(\frac{p_{t_{i+1}} + p_{t_i}}{2}, t_i\right) (\gamma_{t_{i+1}} - \gamma_{t_i}) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_i F'\left(p_{t_i} + \frac{1}{2} \delta q_{t_i}, t_i\right) (\gamma_{t_{i+1}} - \gamma_{t_i})\end{aligned}\quad (\text{A} \cdot 7)$$

と表わすことができる。ここで、

$$\delta F_{t_i}' \equiv F'\left(p_{t_i} + \frac{1}{2} \delta q_{t_i}, t_i\right) - F'(p_{t_i}, t_i) \quad (\text{A} \cdot 8)$$

$$\delta \gamma_{t_i} \equiv \gamma_{t_{i+1}} - \gamma_{t_i} \quad (\text{A} \cdot 9)$$

とおくと (A・7) 式は、

$$\begin{aligned}J(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_i \{F'(p_{t_i}, t_i) + \delta F_{t_i}'\} \delta \gamma_{t_i} \\ &= I(t) + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_i \delta F_{t_i}' \delta \gamma_{t_i}\end{aligned}\quad (\text{A} \cdot 10)$$

となる。ただし上式右辺の $I(t)$ は (A・5) 式で定義さ

れた Ito 形積分である。したがって (A・10) 式右辺第 2 項を評価すればよい。 $\delta F_{t_i}'$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\delta F_{t_i}' &= \left\{ h_{t_i} - \int h_{t_i} \left(p_{t_i} + \frac{1}{2} \delta q_{t_i} \right) dx \right\}' R^{-1} \\ &\quad \times \left(p_{t_i} + \frac{1}{2} \delta q_{t_i} \right) - \left\{ h_{t_i} - \int h_{t_i} p_{t_i} dx \right\}' R^{-1} p_{t_i} \\ &= \frac{1}{2} (h_{t_i} - \hat{h}_{t_i})' R^{-1} \delta q_{t_i} - \frac{1}{2} \delta \hat{h}_{t_i}' R^{-1} \left(p_{t_i} + \frac{1}{2} \delta q_{t_i} \right)\end{aligned}\quad (\text{A} \cdot 11)$$

ここに上式右辺第 2 項に現われる $\delta \hat{h}_{t_i}$ は、

$$\delta \hat{h}_{t_i} = \int h_{t_i} \delta q_{t_i} dx \quad (\text{A} \cdot 12)$$

である。(A・2)、式を考察すれば上式は、

$$\begin{aligned}\delta \hat{h}_{t_i} &= \int h_{t_i} (h_{t_i} - \hat{h}_{t_i})' R^{-1} \delta \gamma_{t_i} p_{t_i} dx \\ &= \widehat{(h_{t_i} h_{t_i}' - \hat{h}_{t_i} \hat{h}_{t_i}')} R^{-1} \delta \gamma_{t_i} \\ &= H_{t_i} R^{-1} \delta \gamma_{t_i}\end{aligned}$$

となる。したがって (A・10) 式の右辺第 2 項は、

$$\begin{aligned}\delta F_{t_i}' \delta \gamma_{t_i} &= \frac{1}{2} (h_{t_i} - \hat{h}_{t_i})' R^{-1} \delta \gamma_{t_i} \delta \gamma_{t_i}' R^{-1} (h_{t_i} - \hat{h}_{t_i}) p_{t_i} \\ &\quad - \frac{1}{2} \delta \gamma_{t_i}' R^{-1} H_{t_i} R^{-1} \delta \gamma_{t_i} p_{t_i} \\ &\quad - \frac{1}{4} \delta \gamma_{t_i} R^{-1} H_{t_i} R^{-1} \delta \gamma_{t_i} \delta \gamma_{t_i}' R^{-1} (h_{t_i} - \hat{h}_{t_i}) p_{t_i} \\ &= \frac{1}{2} (h_{t_i} - \hat{h}_{t_i})' R^{-1} (h_{t_i} - \hat{h}_{t_i}) (t_{i+1} - t_i) p_{t_i} \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr}[H_{t_i} R^{-1}] (t_{i+1} - t_i) + o(\Delta)\end{aligned}\quad (\text{A} \cdot 13)$$

のようになる。したがって (A・10) 式は、

$$\begin{aligned}J(t) &= I(t) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (h_\tau - \hat{h}_\tau)' R^{-1} (h_\tau - \hat{h}_\tau) p_\tau d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \text{tr}[H_\tau R^{-1}] d\tau\end{aligned}\quad (\text{A} \cdot 14)$$

と書ける。(A・4) 式右辺の $I(t)$ に上式を用いれば、

$$\begin{aligned}q_t &= q_{t_0} + J(t) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (h_\tau - \hat{h}_\tau)' R^{-1} (h_\tau - \hat{h}_\tau) p_\tau d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \text{tr}[H_\tau R^{-1}] d\tau\end{aligned}\quad (\text{A} \cdot 15)$$

すなわち微分形式で、

$$\begin{aligned}dq_t &= \left\{ (h_t - \hat{h}_t)' R^{-1} d\gamma_t - \frac{1}{2} (h_t - \hat{h}_t)' R^{-1} (h_t - \hat{h}_t) dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{tr}[H_t R^{-1}] dt \right\} p_t\end{aligned}\quad (\text{A} \cdot 16)$$

をうる。上式は (A・2) 式と等価な Stratonovich 形確率微分方程式であるから (20) 式がえられたことになる。また、(A・1) 式における $\delta \tilde{p}$ は動特性に基づく p の変化分であるから、(1) 式の力学系は (8) 式のようなマルコフモデルで記述されることを考慮すると $\tilde{p}$ は前向きの方程式、

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = L^* p \quad (\text{A} \cdot 17)$$

を満足していることがわかる。したがって (19) 式が導出できた。

*4 $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = t$,
 $\Delta = \max_i [\delta t_i] = \max_i [t_{i+1} - t_i]$