不規則入力をうけるリレー制御系の数値解析†

秋 月 影 雄*・重 政 隆**

* 早稲田大学理工学部 東京都新宿区西大久保 4-170

** 東京芝浦電気(株)総合研究所 川崎市末広町 250

(昭和 46 年 4 月 22 日 受付)

Numerical Analysis of Relay Control Systems Subjected to Random Inputs

Kageo AKIZUKI* and Takashi SHIGEMASA**

(* School of Science and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo
** Electrical and Nuclear Engineering Laboratory Toshiba Research and Development
Center, Tokyo Shibaura Electric Co., LTD., Kawasaki)

(Received April 22, 1971)

Relay control systems subjected to random disturbance and random desired variables have been often analyzed by using statistical linearization method. But the results analyzed by this method are not satisfactory, it is more desirable to know the probability density functions of the error, which are obtained as the solutions of the Fokker-Planck equations representing these stochastic relay control systems.

However, in many cases, it is difficult to solve the Fokker-Planck equations by analytical methods. Numerical calculations based on the finite difference method are useful.

In this paper, the Fokker-Planck equations for the general class of relay control systems subjected to random inputs are derived and the boundary conditions are shown by using the concept of probability flow. Next some numerical techniques are shown. Finally examples of numerical analysis of relay control systems subjected to random inputs are discussed. These results are compared with the digital simulations.

1. は し が き

制御系にはなんらかの形で不規則な入力加わるのが普通であり、これに対する応答を調べる必要が生ずるのは当然のことである。ここでは不規則入力が不規則外乱あるいは不規則目標値という形で加わるリレー制御系を考え、その応答を調べるのが目的である。これまで不規則入力を持つ非線形制御系を解析する一般的方法としては、統計的等価線形化法がしばしば用いられ、多くの成果をあげていることは衆知のとうりである¹⁾。しかし系に加わる不規則入力がガウス性であっても系の応答過程は非ガウス性になることが非線形系の特徴であるので、等価線形化法は必ずしも満足できる手法ではない。より望ましいのは応答過程の確率

密度関数を厳密に知ること、このような目的のため現在おこなわれている1つの方法は系の応答を状態空間で捕らえ、そこにおける状態遷移確率密度関数の満たす Fokker-Planck 方程式と呼ばれる変係数放物形偏微分方程式を導いて、その解を求めるという方法である。現在までにいくつかの限られた系に対して、この方法により解析解が得られているが²⁾、一般には解析解を得るのは困難である。さらにここで取り上げるリレー制御系では、リレー要素がリブシット条件を満足しないので、その解の構成がさらに困難になるという問題がある。すでにこの問題に対しては筆者の1人が“確率流”の概念を用いて解を構成する手法を発表し、いくつかの解析解を得ているが³⁾、さらに多くのリレー制御系に対して数値解を見出す必要がある。しかし Fokker-Planck 方程式を用いて実際の問題を解

† 第 12 回自動制御連合講演会で発表 (昭 44・11)

析するという広い観点に立ったはん用性のある差分法に基づいた数値解析アルゴリズムは、これまで確立されていない。数値解析自身にもむずかしい問題がある。

本論文では、まず 2. で一般的なリレー制御系に対する Fokker-Planck 方程式の導出と解の構成条件を示し、3. では、差分法に基づいた数値解析のアルゴリズムを示す。4. では、このアルゴリズムに基づいていくつかの系について解析した結果を示している。

2. リレー制御系に対する Fokker-Planck 方程式と解の構成

Fig. 1 のブロック線図で示されるような不規則目標値および不規則外乱を受けるリレー制御系を考える。

Fig. 1 Relay control system subjected to random input

Fig. 1 について、プラントは線形で次の状態方程式であらわされるものとしよう。

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = F\bar{y} + G\bar{u} + H\bar{\xi} \quad (1)$$

ここで、 $\bar{y}$ はプラントの状態ベクトル、 $\bar{u}$ は制御ベクトル、 $\bar{\xi}$ は外乱ベクトル、 F, G, H は定数行列である。

外乱は一般にカラー雑音である場合を考え、

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = K\bar{\xi} + L\bar{w} \quad (2)$$

と表わせるものとしよう。ここで、 $\bar{w}$ は白色雑音ベクトルで、 K, L は定数行列である。

目標値も不規則過程で (2) 式と同様に与えられるとしよう。

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = M\bar{r} + N\bar{z} \quad (3)$$

$\bar{z}$ は白色雑音ベクトルで、 M, N は定数行列である。

(1), (2), (3) 式から、(4) 式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{\xi} \\ \bar{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & H & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{\xi} \\ \bar{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{u} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここで、

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{\xi} \\ \bar{r} \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{z} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} F & H & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

とおき、またリレー出力は、 $\bar{y}$ と $\bar{r}$ のある関数値の符号で与えられるとする。

$$\bar{u} = \text{sgn}(\bar{g}(\bar{x}(t))) \quad (5)$$

ここで、

$$\text{sgn}(g_i) = \begin{cases} 1; & g_i \geq 0 \\ -1; & g_i \leq 0 \end{cases}$$

$\bar{g}(\bar{x})$ は、 m 次元ベクトル値非線形関数であり、 $\text{sgn}(\bar{g}) = \text{col.}(\text{sgn}(g_1), \text{sgn}(g_2), \dots, \text{sgn}(g_m))$ なる m 次元のリレーを表わすベクトルである。

以上をまとめると (4) 式は (6) 式のように表わすことができる。

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A\bar{x}(t) + B \cdot \text{sgn}(\bar{g}(\bar{x}(t))) + C \cdot \bar{v}(t) \quad (6)$$

$\bar{v}(t) = \text{col.}(v_1(t), v_2(t), \dots, v_l(t))$ は、

$$E[\bar{v}(t) \cdot \bar{v}(\tau)'] = I_l \cdot \delta(t - \tau) \quad (7)$$

で表わされる l 次元正規性白色雑音ベクトルで (ただし、 E は期待値、 $'$ は転置、 I_l は l 次元単位行列、 $\delta(t - \tau)$ は Dirac のデルタ関数) A, B, C はおのおの、 $n \times n, n \times m, n \times l$ 次元の定数行列とおくことができる。また A は安定な行列とする。

(6) 式からわかるように、状態ベクトル $\bar{x}$ は正規性白色雑音 $\bar{v}$ の影響を受けて時間とともに変動するが、その変動の様子は状態ベクトル $\bar{x}$ について拡散過程を形成すると仮定して解析することにする。

そこで、状態の遷移を表わす確率密度関数 $u(\bar{x}, t | \bar{x}_0, \tau)$ を考える。これは、時刻 τ で $\bar{x}_0$ にあった状態が時刻 t で状態 $\bar{x}$ の近傍 $d\bar{x}$ の中へ遷移する確率が $u(\bar{x}, t | \bar{x}_0, \tau) d\bar{x}$ で与えられることを意味している。

一般に、遷移確率密度関数 $u(\bar{x}, t | \bar{x}_0, \tau)$ は、次の 3 つの条件が満足されるとき、(11) 式の Fokker-Planck 方程式を満たすことが知られている。

(I) 強連続性 任意の $\delta > 0$ に対して、

$$\lim_{t \rightarrow \tau + 0} \frac{1}{t - \tau} \int_{\|\bar{x} - \bar{x}_0\| \geq \delta} u(\bar{x}, t | \bar{x}_0, \tau) d\bar{x} = 0, \quad \bar{x}_0 \in R^n \quad (8)$$

(II) 条件付 1 次、2 次モーメントの増分が有限で次のように定まる。

$$\lim_{t \rightarrow \tau + 0} \frac{1}{t - \tau} \int_{\|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \delta} (x_i - x_{i0}) u(\bar{x}, t | \bar{x}_0, \tau) d\bar{x} = m_i(\bar{x}_0) \quad (9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \tau + 0} \frac{1}{t - \tau} \int_{\|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \delta} (x_i - x_{i0})(x_j - x_{j0}) \times u(\bar{x}, t | \bar{x}_0, \tau) d\bar{x} = m_{ij}(\bar{x}_0) \quad (10)$$

(III) 条件付 3 次以上のモーメントの増分は 0 にな

る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [m_i(\bar{x}) \cdot u(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau)] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [m_{ij}(\bar{x}) \cdot u(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau)] \end{aligned} \quad (i > \tau) \quad (11)$$

(6) 式の系に対して, (9), (10) 式に従ってモーメントの増分を計算すれば Fokker-Planck 方程式は (12) 式ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [h_i(\bar{x}) \cdot u(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau)] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [d_{ij} \cdot u(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau)] \end{aligned} \quad (12)$$

ここで,

$$h_i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j + \sum_{j=1}^m b_{ij} \cdot \text{sgn}(g_j(\bar{x}))$$

$D = (d_{ij})$, $(D = CC')$; $n \times n$ 次半正定値行列である。

(12) 式には, リレーを表わす sgn 関数が含まれているので, 実際には各リレーの on, off の組合わせにより R^n 状態空間に区分領域ができ, (12) 式はこの各区分領域への遷移を表わす確率密度関数が満たす偏微分方程式系を表わしている。そこで, 全体の解の構成に対して, 個々の区分領域内で (12) 式を満たし, さらに区分領域を形成する個々の境界で解が接続される境界条件が必要となる^{3), 4)}。

ある区分領域 $D_M, D_N (\subset R^n)$ の境界を $\Gamma_{M,N}$ としよう。

(A) 境界 $\Gamma_{M,N}$ での確率の連続条件は,

$$u_M(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau) = u_N(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau), \quad \bar{x} \in \Gamma_{M,N} \quad (13)$$

ここで, $u_M(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau)$, $u_N(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau)$ はおのおの, D_M, D_N における解である。

(B) 境界 $\Gamma_{M,N}$ での確率流の連続条件は,

$$\begin{aligned} \bar{J}_M(\bar{x}, t) \cdot \bar{n}_M(\bar{x}) + \bar{J}_N(\bar{x}, t) \cdot \bar{n}_N(\bar{x}) = 0, \\ \bar{x} \in \Gamma_{M,N} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで, $\bar{n}_M(\bar{x})$, $\bar{n}_N(\bar{x})$ は Fig. 2 で示されるような境界 $\Gamma_{M,N}$ 上の任意の点 $\bar{x}$ における単位法線ベク

Fig. 2 Probability flow on the boundary surface

トル, $\bar{J}_M(\bar{x}, t)$, $\bar{J}_N(\bar{x}, t)$ は, (15), (16) 式で示されるように, 各区分領域 D_M, D_N での確率流ベクトルの $\bar{x} \in \Gamma_{M,N}$ への極限値を表わすものとする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_M(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} J_i^{(M)}(\bar{x}, t) &= 0 \\ J_i^{(M)}(\bar{x}, t) &= h_i^{(M)}(\bar{x}) \cdot u_M(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [d_{ij} \cdot u_M(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau)] \\ \bar{J}_M(\bar{x}, t) &= \text{col.} [J_1^{(M)}(\bar{x}, t), \dots, J_n^{(M)}(\bar{x}, t)] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_N(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} J_i^{(N)}(\bar{x}, t) &= 0 \\ J_i^{(N)}(\bar{x}, t) &= h_i^{(N)}(\bar{x}) \cdot u_N(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [d_{ij} \cdot u_N(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau)] \\ \bar{J}_N(\bar{x}, t) &= \text{col.} [J_1^{(N)}(\bar{x}, t), \dots, J_n^{(N)}(\bar{x}, t)] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

さらに, 求める解が遷移確率密度関数であることから, 全体の解は (17), (18) 式の, 自然境界条件と規格化条件を満足しなければならない。

$$\lim_{\|\bar{x}\| \rightarrow \infty} u(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau) = 0 \quad (17)$$

$$\sum_{N=1} \int_{D_N} u_N(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau) d\bar{x} = 1 \quad (18)$$

$$\left(\bigcup_{N=1} D_N = R^n \right)$$

3. 数値解析のアルゴリズム

前章で問題の定式化ができあがったので, この解を求めるれば良いことになるが, 多くの場合解析解を求めるのは困難である。そこで, ここではそのような場合に対し差分法に基づいた数値解析により解を構成するアルゴリズムについて考察する。数値解析を実行する手段として現在の計算機の処理能力を考えると, 実際問題として解析できるのは 2 次元までと考えられる。もちろん, より高性能な計算機が開発されることにより, このわくは広げられるであろう。

また, 計算機による数値計算を $-\infty < \|\bar{x}\| < \infty$ にわたって実行することは不可能であるから, 適当なある数 K をとり, $\|\bar{x}\| < K$ の領域において演算を実行することになる。この数 K は, D と (6) 式によって大体決まり, 計算機の記憶容量に制限されて, 空間刻み幅に影響を与える。

3.1 過渡解 $\|\bar{x}\| < K$ の領域内のおのおのの区分領域の格子点について, (12) 式の Fokker-Planck 方程式を陽的あるいは陰的な差分近似手法により近似差分方程式系を作る。次に, 境界での確率と確率流の連続条件から得られた境界条件を用いて, 境界点と境界近傍の格子点についての関係を近似差分式により与

える。

自然境界条件については、 $\|\bar{x}\| < K$ の領域であるから、なんらかの条件に置きかえる必要があるが、十分な適当な数 K をとれば（経験的に、標準偏差の約 4 倍以上）、 $\|\bar{x}\| = K$ で $u(\bar{x}, t|\bar{x}_0, \tau) \equiv 0$ としても良いだろうと考えられる。

初期条件については、初期確率密度関数 $u(\bar{x}, \tau|\bar{x}_0, \tau)$ を空間刻み幅と (18) 式の規格化条件を考慮して、格子点の値を定めることによって与える。

得られた差分方程式系を解く方法としては陽的方法と陰的方法とが考えられる。この問題を解く方法としてこの 2 つの方法について調べてみると次のようなことがいえる⁵⁾。陽的方法は、簡便な方法であるが、数値的な安定性が悪く、空間刻み幅に比べ時間刻み幅を非常に小さくとらなければならないため、長時間にわたる状態遷移の様子を計算するには莫大な演算時間を要する。いっぽう、陰的方法は、未知の格子点の値を求めることが線形代数方程式の解を求めることに帰着され、直接法による演算では、大量のメモリーを必要とする。反復法では、1 つの時間ステップの計算にも相当時間がかかる。しかし安定性については、陽的手法に比べ特に心配する必要はないことが知られている。このようにいずれも長短があるので、問題に応じて適切な手法を選ぶ必要がある。

3.2 定常解 定常状態における確率密度関数を $U(\bar{x})$ とする。 $U(\bar{x})$ は (12) 式の左辺を 0 とした (19) 式の解である。

$$0 = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [h_i(\bar{x}) \cdot U(\bar{x})] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [d_{ij} \cdot U(\bar{x})] \quad (19)$$

(19) 式と境界条件を通常の方法により差分近似すれば、近似差分方程式系が得られる。

ここで注意しなければならぬことは、このまま数値解を求めようとすると $U(\bar{x}) = 0$ という意味のない解に収束してしまうことである。これを避けるために定常解の数値解析では、原点の値を一定に保っておくことが必要である。以上の定式化に従い、直接法または反復法で演算すれば解を得ることができる。

4. 解 析 例

4.1 積分形制御対象のリレー制御系の過渡解

Fig. 3 で示される、積分形制御対象の定値リレー制御系について考える。

誤差 e に関する状態方程式は (20) 式になる。

$$\frac{de(t)}{dt} + \text{sgn}[e(t)] = v(t) \quad (20)$$

Fig. 3 A relay control system with controlled process of integral type subjected to a suddenly applied white random disturbance

ここで $v(t)$ は、

$$E[v(t) \cdot v(\tau)] = 2D \cdot \delta(t - \tau)$$

なる正規性白色雑音である。

初期条件は、 $t=0$ で $e=e_0$ として、状態遷移確率密度関数、

$$\begin{cases} u_{\text{on}}(e, t|e_0); & e > 0 \\ u_{\text{off}}(e, t|e_0); & e < 0 \end{cases}$$

の満たす Fokker-Planck 方程式を作ると (21) 式になる。

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{\text{on}}}{\partial t} = \frac{\partial u_{\text{on}}}{\partial e} + D \frac{\partial^2 u_{\text{on}}}{\partial e^2}; & e > 0 \\ \frac{\partial u_{\text{off}}}{\partial t} = -\frac{\partial u_{\text{off}}}{\partial e} + D \frac{\partial^2 u_{\text{off}}}{\partial e^2}; & e < 0 \end{cases} \quad (21)$$

境界条件と初期条件は、(22), (23) 式である。

$$\begin{cases} \left[u_{\text{on}} + D \frac{\partial u_{\text{on}}}{\partial e} \right]_{e=0} = \left[-u_{\text{off}} + D \frac{\partial u_{\text{off}}}{\partial e} \right]_{e=0} \\ [u_{\text{on}}]_{e=0} = [u_{\text{off}}]_{e=0} \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} u_{\text{on}}(e, 0|e_0) = \delta(e - e_0); & e_0 \geq 0 \\ u_{\text{off}}(e, 0|e_0) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

(21) 式を 2 階偏微分項について Cranck-Nicholson 形の差分をとり、1 階偏微分項については Δt 時間進んでいる方のみで中間差分をとると (24) 式になる。

$$\begin{aligned} u_{m,j+1} \cdot \left(1 + \frac{D\Delta t}{(\Delta e)^2} \right) - u_{m+1,j+1} \cdot \left(\frac{D\Delta t}{2(\Delta e)^2} \pm \frac{\Delta t}{2\Delta e} \right) \\ - u_{m-1,j+1} \cdot \left(\frac{D\Delta t}{2(\Delta e)^2} \mp \frac{\Delta t}{2\Delta e} \right) = u_{m,j} \cdot \left(1 - \frac{D\Delta t}{(\Delta e)^2} \right) \\ + (u_{m+1,j} + u_{m-1,j}) \cdot \frac{D\Delta t}{2(\Delta e)^2} \end{aligned} \quad (24)$$

符号は上側が on 領域 ($e > 0$) で、下側が off 領域 ($e < 0$) である。

(22) 式の境界条件は (25) 式になる。

$$u_{m,j+1} = \frac{u_{m+1,j+1} + u_{m-1,j+1}}{2 - 2\Delta e/D} \quad (25)$$

ここで、解の性質から、空間刻み幅は次の条件を満たすように選ばなければならない。

$$\Delta e < D$$

ただし、 $u_{m,j} = u(m\Delta e, j\Delta t)$ である。

(24), (25) 式と自然境界条件とから解くべき方程式は (26) 式の線形代数方程式となる。

$$A \cdot \bar{u}_{j+1} = B \cdot \bar{u}_j \quad (26)$$

ここで $\bar{u}_j$ は現在の $j\Delta t$ 時刻の格子点の値からなるベクトル, $\bar{u}_{j+1}$ は未知の $(j+1)\Delta t$ 時刻の格子点の値からなるベクトル, A, B は (24), (25) 式と自然境界条件から, 格子点の間の関係を表わしている定数行列である。

初期状態を与え (26) 式を解けば解が決定されるが, 求める格子点の数が 100 以下では, 逆行列を求めて演算するような直接法で解くことが有効である。しかし求める格子点の数がそれ以上になると直接法では, 必要なメモリの数が, 現在の計算機の記憶容量の限界に近づき, まるめの誤差などの観点からも好ましくないようである。また, ここでは陰的な差分の取り方による解析方法を示したが, もちろん陽的な差分の取り方による解析も可能である。

なお, この問題については解が解析的に求められており³⁾, Fig. 4 では, これらの比較がされている。各

Fig. 4 Time dependent probability density function of the error of the relay control system shown in Fig. 3

パラメータは, $D=0.25$, $e_0=0$ とし, 数値解析では, 空間刻み幅を $\Delta e=0.01$ ととり, 初期条件は, 初期状態を示している (23) 式の δ 関数と空間刻み幅 Δe と規格化条件 $\sum u_j \Delta e = 1$ を考慮して $t=0$ で原点の格子点に $1/\Delta e$ の大きさを与えて, $-0.5 \sim 0.5$ の区間について解析した。

4.2 1次制御対象のリレー制御系の過渡解

Fig. 5 で示されるような, 制御対象が 1 次系の場合のリレー制御系について考える。

誤差 e に関する状態方程式は (27) 式になる。

$$\frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{T} \{e(t) + \text{sgn}(e(t))\} = \frac{1}{T} v(t) \quad (27)$$

$v(t)$ は前例と同じ正規性白色雑音である。

Fig. 5 A first order relay control system subjected to white random disturbance

初期状態 $t=0$ で $e=e_0$ として状態の遷移確率密度関数,

$$\begin{cases} u_{\text{on}}(e, t|e_0) ; e > 0 \\ u_{\text{off}}(e, t|e_0) ; e < 0 \end{cases}$$

の満たす Fokker-Planck 方程式は, (28) 式になる。

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{\text{on}}}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial e} \{ (e+1) u_{\text{on}} \} + \frac{D}{T^2} \cdot \frac{\partial^2 u_{\text{on}}}{\partial e^2} \\ \frac{\partial u_{\text{off}}}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial e} \{ (e-1) u_{\text{off}} \} + \frac{D}{T^2} \cdot \frac{\partial^2 u_{\text{off}}}{\partial e^2} \end{cases} \quad (28)$$

境界条件および初期条件は, (29), (30) 式である。

$$\left[\frac{D}{2T} \left(\frac{\partial u_{\text{off}}}{\partial e} - \frac{\partial u_{\text{on}}}{\partial e} \right) \right]_{e=0} = [u_{\text{on}}]_{e=0} = [u_{\text{off}}]_{e=0} \quad (29)$$

$$\begin{cases} u_{\text{on}}(e, 0|e_0) = \delta(e - e_0) ; e_0 \geq 0 \\ u_{\text{off}}(e, 0|e_0) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

この問題では, 定常解だけが解析的に求められている³⁾。ここでは, 陰的な Crank-Nicholson 形の差分をとって数値解析する。

$$\begin{aligned} u_{l,j+1} & \cdot \left\{ 1 + \frac{D\Delta t}{T^2(\Delta e)^2} \right\} - u_{l+1,j+1} \\ & \times \left\{ \frac{D\Delta t}{2T^2(\Delta e)^2} + \frac{\Delta t(\Delta e(l+1) \pm 1)}{4T\Delta e} \right\} \\ & - u_{l-1,j+1} \left\{ \frac{D\Delta t}{2T^2(\Delta e)^2} - \frac{\Delta t(\Delta e(l-1) \pm 1)}{4T\Delta e} \right\} \\ & = u_{l,j} \left\{ 1 - \frac{D\Delta t}{T^2(\Delta e)^2} \right\} + u_{l+1,j} \\ & \times \left\{ \frac{D\Delta t}{2T^2(\Delta e)^2} + \frac{\Delta t(\Delta e(l+1) \pm 1)}{4T\Delta e} \right\} \\ & + u_{l-1,j} \left\{ \frac{D\Delta t}{2T^2(\Delta e)^2} - \frac{\Delta t(\Delta e(l-1) \pm 1)}{4T\Delta e} \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

となり, 境界条件は,

$$u_{l,j+1} = \frac{u_{l+1,j+1} + u_{l-1,j+1}}{2 - 2T\Delta e/D} \quad (32)$$

となる。ここで $u_{l,j} = u(l\Delta e, j\Delta t)$ で, 刻み幅は $\Delta e < D/T$ でなければならない。

Fig. 6 には, パラメータを $D=0.5$, $T=1$, $e_0=0$ の場合の数値解析の結果を示した。

Fig. 6 Time dependent probability density function of the error of the relay control system shown in Fig. 5

4.3 有色雑音を目標値とするリレー制御系の定常解⁶⁾

第3の例として、ここでは Fig. 7 に示されるような有色雑音を目標値とするリレー制御系について考える。

Fig. 7 A relay control system with Markov input
系を支配する方程式は (33) 式である。

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = \text{sgn}(e(t)) \\ e(t) = r(t) - y(t) \end{cases} \quad (33)$$

ここでは有色雑音である目標値 $r(t)$ として (34) 式で記述されるようなオーレンシュタイン・ウーレンベック過程 (Ornstein-Uhlenbeck Process) を考える。

$$T \frac{dr(t)}{dt} + r(t) = v(t) \quad (34)$$

$v(t)$ は前例と同じく、正規性白色雑音である。

この系の状態空間は r - y 空間で、その on, off 領域における定常結合確率密度関数、

$$\begin{cases} U_{\text{on}}(r, y) & (r > y) \\ U_{\text{off}}(r, y) & (r < y) \end{cases}$$

の満たす Fokker-Planck 方程式は、

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial r} (r U_{\text{on}}) - \frac{\partial U_{\text{on}}}{\partial y} + \frac{D}{T^2} \frac{\partial^2 U_{\text{on}}}{\partial r^2} ; & (r > y) \\ 0 = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial r} (r U_{\text{off}}) + \frac{\partial U_{\text{off}}}{\partial y} + \frac{D}{T^2} \frac{\partial^2 U_{\text{off}}}{\partial r^2} ; & (r < y) \end{cases} \quad (35)$$

となる。on, off 領域は r - y 状態空間の $r > y, r < y$ の領域であり。リレー切換え線は $r = y$ である。その上での境界条件は、確率と確率流の連続条件から (36) 式になる。

$$U_{\text{on}}|_{r=y} = U_{\text{off}}|_{r=y} = \frac{D}{2T^2} \left(\frac{\partial U_{\text{off}}}{\partial r} - \frac{\partial U_{\text{on}}}{\partial r} \right) \Big|_{r=y} \quad (36)$$

数値解析は、まず、(35) 式を通常の差分のとり方により、

$$\begin{aligned} U_{l,m} = & \left\{ 0.5 + \frac{T(\Delta r)^2}{4D} (l+1) \right\} U_{l+1,m} \\ & + \left\{ 0.5 - \frac{T(\Delta r)^2}{4D} (l-1) \right\} U_{l-1,m} \\ & \mp \frac{T^2(\Delta r)^2}{4D\Delta y} (U_{l,m+1} - U_{l,m-1}) \end{aligned} \quad (37)$$

と差分近似する。符号は、上側が on 領域 ($r > y$) で、下側が off 領域 ($r < y$) である。

(36) 式の境界条件は、

$$U_{l,m} = \frac{U_{l+1,m} + U_{l-1,m}}{2 - 2T^2\Delta r/D} \quad (38)$$

となる。ここで、 $U_{l,m} = U(l\Delta r, m\Delta y)$ である。また、 r 方向の空間刻み幅 Δr が次の条件を満たさなければならない。

$$\Delta r < D/T^2$$

Fig. 8 には、on, off 各領域および、境界近傍での差分の様子を図示した。

Fig. 8 Finite difference method for the system shown in Fig. 7

境界での解の値がほとんど 0 とみなせるくらい広い領域をとっておかなければならない。

解を求めるに当たって、解が原点对称であるということ、原点の値を一定に保って解き、最後に解を規格化する必要があることに注意しよう。

規格化条件は (8) 式から (39) 式のようになる。

$$\sum_t \sum_m U_{t,m} \Delta r \Delta y = 1 \quad (39)$$

求める領域を $m \times n$ の矩形の領域に分割して、格子点平面を作り、第 i 行目の格子点の値に相当するベクトルを $\bar{U}_i$ とし、行列表示すると、(40) 式になる。

$$\begin{pmatrix} T_1 H_1 & & & \\ D_1 T_2 H_2 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_n H_n \\ & & & D_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \vdots \\ \bar{U}_n \end{pmatrix} = q \quad (40)$$

ここで、 T_i は r 方向の偏微分に関する係数で、主三対角行列 (tridiagonal matrix), H_i, D_i は y 方向の偏微分に関する係数で、対角行列 (diagonal matrix), q は原点の値に関係して定まる。

(40) 式を解くことになるが、一般に非常に大次元となり、直接法 (ガウスの消去法など) による取り扱いは困難である。ここでは、反復法の S.O.R. (逐次加速緩和法) を用いた。収束の判定は、反復計算における増分の絶対値の最大値が十分小さな値以下になった時とした。

Fig. 9, Fig. 10 には、 $T=3.0, D=1.0$ の場合の r - y 定常結合確率密度関数と定常誤差 (e) 確率密

Fig. 9 Probability density function of the system shown in Fig. 7

Fig. 10 Probability density function of the error of the system shown in Fig. 7

Fig. 11 Probability density function of the system shown in Fig. 7

— : numerical analysis (number of iterations 65)
plot : simulation by modified Monte Carlo method
 $\langle e^2 \rangle = 0.7021 \quad \Delta t = 0.005 \quad \text{data numbers : 300 000}$
--- : approximate probability density function of the error

$$u(e) = \frac{T^2}{2D} \exp\left\{-\frac{D}{T^2}|e|\right\}$$

Fig. 12 Probability density function of the steady state error of the relay control system in Fig. 7

度関数の数値結果を示した。

Fig. 11, Fig. 12 には、 $T=0.5$, $D=0.5$ の場合の結果を示した。いずれの場合も、直接この系をデジタルシミュレートした結果を・で示し、数値解析と比較してある。なおこの系に対しては、時定数 T が大きいとき、 $\dot{r}$ 過程をパワーが $2D/T^2$ の正規性白色雑音とみなして解く方法が知られている¹⁾。そのようにして求めた定常誤差確率密度関数は、(41) 式になる。

$$U(e) = \frac{T^2}{2D} \exp\left\{-\frac{T^2}{D}|e|\right\} \quad (41)$$

Fig. 10 と Fig. 12 を比べると、 $T=3.0$ の Fig. 10 の場合は近似解析は成立し、 $T=0.5$ の Fig. 12 の場合は近似解析は成立しないことがわかる。

4.4 白色外乱を受ける2次リレー制御系の定常解⁴⁾

第4の例として、**Fig. 13** で示されるような、正規性白色外乱を受ける2次リレー制御系について考える。

Fig. 13 A second-order relay control system subjected to white random disturbance

この制御系は、誤差を e_1 、その微分 $de_1/dt=e_2$ とすると、(42) 式で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_n^2 \end{pmatrix} \text{sgn}(e_1 + \lambda e_2) + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{pmatrix} v(t) \end{aligned} \quad (42)$$

on, off 領域における定常誤差確率密度関数 $U(e_1, e_2)$ の満たす Fokker-Planck 方程式および、切換線 $e_1 + \lambda e_2 = 0$ 上における境界条件は、それぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial}{\partial e_1}(e_2 U) + \frac{\partial}{\partial e_2} \\ &\times [\{ 2\zeta\omega_n e_2 + \omega_n^2 e_1 + \omega_n^2 \text{sgn}(e_1 + \lambda e_2) \} U] \\ &+ \omega_n^4 D \frac{\partial^2 U}{\partial e_2^2} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} U_{\text{on}} \Big|_{e_1 + \lambda e_2 = 0} &= U_{\text{off}} \Big|_{e_1 + \lambda e_2 = 0} = \frac{\omega_n^2 D}{2} \\ &\times \left[\frac{\partial U_{\text{off}}}{\partial e_2} - \frac{\partial U_{\text{on}}}{\partial e_2} \right] \Big|_{e_1 + \lambda e_2 = 0} \end{aligned} \quad (44)$$

ここで、 U_{on} , U_{off} はおのおの on 領域 ($e_1 + \lambda e_2 > 0$)、off 領域 ($e_1 + \lambda e_2 < 0$) における定常結合誤差確率密度関数である。

(43), (44) 式を差分近似して、原点の値を一定に保って、SOR で繰返し演算により数値計算するのが現

在のところ適当な方法であらう。

$$\begin{aligned} U_{l,m} &= U_{l,m+1} \\ &\times \left\{ 0.5 + \frac{\xi(\Delta e_2)^2}{2\omega_n^3 D}(m+1) + \frac{\Delta e_1 \Delta e_2}{4\omega_n^3 D} l \pm \frac{\Delta e_2}{4\omega_n^2 D} \right\} \\ &+ U_{l,m-1} \\ &\times \left\{ 0.5 - \frac{\xi(\Delta e_2)^2}{2\omega_n^3 D}(m-1) - \frac{\Delta e_1 \Delta e_2}{4\omega_n^3 D} l \mp \frac{\Delta e_2}{4\omega_n^2 D} \right\} \\ &- \frac{(\Delta e_2)^3 m}{4\omega_n^4 D \Delta e_1} \{ U_{l+1,m} - U_{l-1,m} \} \end{aligned} \quad (45)$$

$$U_{l,m} = \frac{U_{l,m+1} + U_{l,m-1}}{2 - 2\Delta e_2 / \omega_n^2 D} \quad (46)$$

ここで、 $U_{l,m} = U(l\Delta e_1, m\Delta e_2)$ である。また $\Delta e_2 < \omega_n^2 D$ である。数値解析の結果を **Fig. 14, Fig. 15** に示す。ここでも定常結合誤差確率密度関数 $U(e_1, e_2)$ と定常誤差確率密度関数 $U(e_1)$ の数値解析を直接デジタルシミュレーションした結果と比較して示してある。

パラメータは、 $2D=1.0$, $\omega_n=2.0$, $\xi=0.5$, $\lambda=$

$2D=1.0$ $\omega_n=2.0$ $\zeta=0.5$ $\lambda=0.5$
—: numerical analysis plot: simulation
data numbers: 800 000
Fig. 14 Probability density function of the system shown in Fig. 13

Fig. 15 Probability density function of the steady state error

0.5 にとり、数値解析は、 $\Delta e_1=0.05$, $\Delta e_2=0.1$ で、 $[e_1] \times [e_2] = [-2.5 \sim 2.5] \times [-5.0 \sim 5.0]$ の領域を解析したものである。またシミュレーションのデータ個数は、800 000 個である。

5. お わ り に

不規則入力を受けるリレー制御系がどのような応答をするかという問題に対して、Fokker-Planck 方程式の数値解析により求める方法を示した。この数値解はかなり求めにくいものであり、種々の工夫が必要であることが指摘された。

実際に数値解析をおこなった例題のなかで、例 4.3 は初めて厳密な解の形が示されたものであり、これまで用いられていた近似法との差異が明らかにされたことは興味深いと思われる。また例 4.4 の系においてリレー切り換え線のこう配の応答に与える影響も未知なことであるが、この数値解析をさらに適用することによって明らかにすることができる。

なお、ここで行なった解析は、リレー制御系の応答過程がマルコフ拡散過程を形成するという仮定に基づ

いたものであり、この仮定が完全に成立するかどうかは明らかではないが、デジタルシミュレーションの結果は、このような解析結果を納得せしめるものと考ええる。

最後に、筆者らは、これまでに解の構成に対して、確率流を考慮すべきことを強調してきたが、ここでも確率流の考え方の意味が顕著に表われていることを指摘しておく。

参 考 文 献

- 1) 榎木・砂原：統計学的手法による自動制御理論（昭和 42 オーム社）
- 2) A. T. Fuller : Analysis of Nonlinear Stochastic Systems by Means of the Fokker-Planck Equation, INT. J. Control, 9-6, 603/655 (1969)
- 3) 秋月：不規則外乱をうけるリレー制御系の解析，電気学会誌，90-7 (1970)
- 4) 秋月・荻野・重政：白色外乱を受ける 2 次リレー制御系の数値解析，第 12 回自動制御連合講演会 (1969)
- 5) M. Klerer & G. A. Korn : Digital Computer User's Handbook, McGraw-Hill (1967)
- 6) 秋月・荻野・重政：マルコフ目標値をもつ非線形制御系の解析，第 8 回計測自動制御学会学術講演会 (1969)